淺釋狹義相對論中的質能守恆

林朝宗
建國高中

在古典物理中認爲質量與能量純屬各自獨立存在的物理實體。因此質量守恆與能量守恆乃是互不相關的兩種獨立原理。但根據狹義相對論（以下簡稱相對論），質量與能量其實是同一種東西的不同表現，在某些情況下它表現爲質量，在另外一些情況下它表現爲能量，其間的量值關係即衆所週知的

$$E = mc^2$$

E的單位爲焦耳，m的單位爲公斤，則$c^2 = 9\times10^{16}$(米／秒)^2，因此相對論把質量守恆與能量守恆統一起來成爲質能守恆，其中的道理如何呢？爲了獲得清楚的答案，我們需要分爲以下三個步驟來探討：㈠相對論的相對速度、㈡質點的質量隨其速率而變、㈢質量與能量的關係及質能守恆。

㈠ 相對論中的相對速度

設有 $s\,\bar{s}$ 兩個慣性坐標系，x 與 $\bar{x}$ 軸重合，y 與 $\bar{y}$ 軸以及 z 與 $\bar{z}$ 軸兩兩平行，$\bar{s}$ 對 s 之相對速度爲 u 方向爲 $+x$。當原點 $o\,\bar{o}$ 重合時 $t=\bar{t}=0$。又設有質點A在運動，在 s 中當 A 通過 $P(x, y, z)$ 點時，位於P點之校準鐘讀數爲 t。此一事件設爲 E_1，則其時空坐標以 $E_1(x, y, z, t)$ 表示，稍後A經$Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$點時，位於$Q$點的校準鐘讀數爲 $t+\Delta t$，設此一事件爲 E_2，則其時空坐標可以 $E_2(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$ 表示。E_1 及 E_2 這兩個事件在 $\bar{s}$ 中的時空坐標設爲$E_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ 及$E_2(\bar{x}+\Delta\bar{x}, \bar{y}+\Delta\bar{y}, \bar{z}+\Delta\bar{z}, \bar{t}+\Delta\bar{t})$ 則依洛仁茲轉換式知

$$\bar{x} = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\bar{y} = y \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\bar{z} = z \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$\bar{t} = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$(\overline{x}+\Delta\overline{x})=\frac{(x+\Delta x)-u(t+\Delta t)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdots\cdots(5)$$

$$\overline{y}+\Delta\overline{y}=y+\Delta y \cdots\cdots(6)$$

$$\overline{z}+\Delta\overline{z}=z+\Delta z \cdots\cdots(7)$$

$$(\overline{t}+\Delta\overline{t})=\frac{(t+\Delta t)-u(x+\Delta x)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdots\cdots(8)$$

由(5)−(1)，(6)−(2)，(7)−(3)，(8)−(4)得

$$\Delta\overline{x}=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdots\cdots(9)$$

$$\Delta\overline{y}=\Delta y \cdots\cdots(10)$$

$$\Delta\overline{z}=\Delta z \cdots\cdots(11)$$

$$\Delta\overline{t}=\frac{\Delta t-u\Delta x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdots\cdots(12)$$

按定義，A經P之瞬時速度，相對於 s 及 $\overline{s}$ 各爲

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \overline{v}_x=\lim_{\Delta\overline{t}\to 0}\frac{\Delta\overline{x}}{\Delta\overline{t}}$$

$$v_y=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \overline{v}_y=\lim_{\Delta\overline{t}\to 0}\frac{\Delta\overline{y}}{\Delta\overline{t}}$$

$$v_z=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad \overline{v}_z=\lim_{\Delta\overline{t}\to 0}\frac{\Delta\overline{z}}{\Delta\overline{t}}$$

但
$$\frac{\Delta\overline{x}}{\Delta\overline{t}}=\frac{\Delta\overline{x}}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\Delta\overline{t}}{\Delta t}} \cdots\cdots(13)$$

把(9)÷Δt 及把(12)÷Δt 分別得

$$\frac{\Delta\overline{x}}{\Delta t}=\frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}-u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \frac{\Delta\overline{t}}{\Delta t}=\frac{1-u\dfrac{\Delta x}{\Delta t}/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdots\cdots(14)$$

分別代入(13)並令$\Delta t\to 0$，則$\Delta\overline{t}\to 0$，故得

$$\overline{v}_x=\frac{v_x-u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1-uv_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}\quad 即\quad \overline{v}_x=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}\cdots\cdots(15)$$

$$\frac{\Delta\overline{y}}{\Delta\overline{t}}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\Delta\overline{t}}{\Delta t}}$$ 由(10)及(14)並令 $\Delta t\to 0$，則 $\Delta\overline{t}\to 0$，故得

$$\overline{v}_y=\frac{v_y}{\dfrac{1-uv_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}=\frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$ 同理

$$\overline{v}_z=\frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

仿上述方法，或依相對性原理均可得出

$$v_x=\frac{\overline{v}_x+u}{1+uv_x/c^2}\qquad v_y=\frac{\overline{v}_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u\overline{v}_x/c^2}\qquad v_z=\frac{\overline{v}_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u\overline{v}_x/c^2}$$

當 $u\ll c$ 時，(15)(16)(17)式便回到古典的相對速度公式：

$$\overline{v}_x=v_x-u\qquad \overline{v}_y=v_y\qquad \overline{v}_z=v_z$$

若 v_x 爲光信號在 s 中的傳播速度，即 $v_x=c$，則此一信號在 $\overline{s}$ 中之傳播速度爲

$$\overline{v}_x=\frac{c-u}{1-u\,c/c^2}=c$$

這表示光速的恆定性。

若光在任意方向傳播時，設在 s 系中光信號從 P 點傳到 Q 點費時 Δt，而

$$PQ=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\quad 則\quad \Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=c^2\Delta t^2$$

設上述信號在 $\overline{s}$ 系中從 P 傳到 Q 費時 $\Delta\overline{t}$，而 $PQ=(\Delta\overline{x},\Delta\overline{y},\Delta\overline{z})$，則 $\Delta\overline{x}$, $\Delta\overline{y}$, $\Delta\overline{z}$, $\Delta\overline{t}$ 與 Δx, Δy, Δz, Δt 之間的關係恰爲(9)，(10)，(11)，(12)式。

$$\therefore\quad \Delta\overline{x}^2+\Delta\overline{y}^2+\Delta\overline{z}^2-c^2\Delta\overline{t}^2$$

$$=\frac{(\Delta x-u\Delta t)^2}{1-u^2/c^2}+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\frac{(\Delta t-u\Delta x/c^2)^2}{1-u^2/c^2}=0$$

即該光信號在 $\overline{s}$ 中之傳播速率仍爲 c。

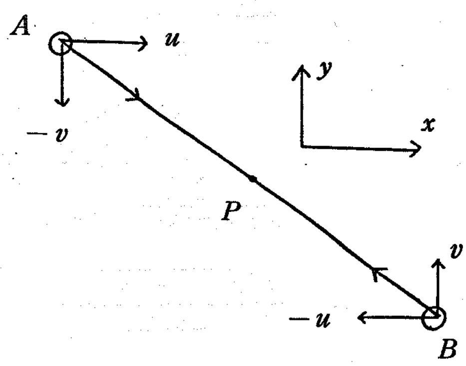
(二) 質點的質量隨其速率而變： $m=m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$

設在 s 系中有靜止質量皆爲 m_0 之 A、B 兩球，沿 AP 及 BP 方向相向運動，初速度之 xy 方向分量如下：

$v_{Ax}=u$ $\qquad v_{Ay}=-v$

$v_{Bx}=-u$ $\qquad v_{By}=v$

如圖一所示。



圖一

當 A、B 兩球作完全非彈性碰撞後便連成一體停止在 s 中之 P 點。設撞後連體末速度在 x，y 方向之分量爲 V_x，V_y，則

$V_x=0$ $\qquad V_y=0$

現在從 $\bar{s}$ 系中來分析這個實驗，則撞前 A，B 在 $\bar{s}$ 中之初速度如下：（$\bar{s}$ 對 s 之速度爲 u，方向爲 $+x$）

$$\bar{v}_{Ax}=\frac{v_{Ax}-u}{1-uv_{Ax}/c^2}=\frac{u-u}{1-u^2/c^2}=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\bar{v}_{Ay}=\frac{v_{Ay}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_{Ax}/c^2}=\frac{-v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2}=\frac{-v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\bar{v}_{Bx}=\frac{v_{Bx}-u}{1-uv_{Bx}/c^2}=\frac{-u-u}{1-u(-u)/c^2}=\frac{-2u}{1+u^2/c^2} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\bar{v}_{By}=\frac{v_{By}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_{Bx}/c^2}=\frac{v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u^2/c^2} \quad\cdots\cdots(21)$$

碰撞後，連體在 $\bar{s}$ 中沿 $\bar{x}$,$\bar{y}$ 方向之速度設 $\bar{V}_x$，$\bar{V}_y$，則：

$$\bar{V}_x=\frac{V_x-u}{1-uV_x/c^2}=\frac{0-u}{1-uv/c^2}=-u \quad\cdots\cdots(20)'$$

$$\bar{V}_y=\frac{V_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uV_x/c^2}=0 \quad\cdots\cdots(21)'$$

[(15)(16)(17)式務必運用自如]

如果像古典物理那樣A,B兩球之質量m_0爲不變量，則在$\bar{s}$中將發現A,B兩球在無外力作用下互相碰撞之前後，$\bar{x}$方向、$\bar{y}$方向的總動量都不守恆。我們先看$\bar{y}$方向：設碰撞前後$\bar{y}$方向之總動量各爲$\bar{P}_y$，$\bar{P}_y'$，則

$$\bar{P}_y = m_0 \times \bar{v}_{Ay} + m_0 \times \bar{v}_{By} = m_0 \frac{-v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + m_0 \frac{v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u^2/c^2} \neq 0$$

$$\bar{P}_y' = (m_0 + m_0)\,\bar{V}_y = 0$$

$$\therefore \quad \bar{P}_y \neq \bar{P}_y'$$

同樣的方法也可以推論$\bar{x}$方向的總動量不守恆。

愛因斯坦假定動量守恆原理在相對論中仍然適用，因此就需要修正古典物理中認爲質量爲不變量的觀念，而假設質量隨著其速率而變。

設A,B球在$\bar{s}$中之速度爲(18)(19)(20)(21)四式時，其質量爲m_A，m_B，而碰撞後之連體在$\bar{s}$中之質量爲M，若$\bar{y}$方向之總動量守恆，則

$$\bar{P}_y = m_A \bar{v}_{Ay} + m_B \bar{v}_{By} = \frac{-m_A v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{m_B v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u^2/c^2}$$

$$\bar{P}_y' = M\bar{V}_y = 0$$

$$\therefore \quad \frac{-m_A v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{m_B v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u^2/c^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (22)$$

令 $\dfrac{m_A}{m_B} = k$， 由(22)得

$$k = \frac{m_A}{m_B} = \frac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2} < 1 \quad \cdots\cdots\cdots (23)$$

令 $\bar{v}_A = \sqrt{\bar{v}_{Ax}{}^2 + \bar{v}_{Ay}{}^2}$ $\qquad \bar{v}_B = \sqrt{\bar{v}_{Bx}{}^2 + \bar{v}_{By}{}^2}$

現在我們想要得到的是m_A如何隨$\bar{v}_A$而變，m_B如何隨$\bar{v}_B$而變，即$m_A = m_A(\bar{v}_A)$及$m_B = m_B(\bar{v}_B)$的形式爲何？原則上，可以從(18)(19)(20)(21)與(22)中消去uv而求出來，但那樣做演算過程稍微長些。當我們仔細檢討上述實驗時，應可看出問題的答案與v之大小無關，故可令$v \to 0$，($v \neq 0$)則$\bar{v}_A \to 0$

$$m_A \to m_0 \qquad \bar{v}_B \to \frac{2u}{1+u^2/c^2} \quad \cdots\cdots\cdots (24)$$

由(23)可得

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{1-k}{1+k}\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$　　更由(25)(24)消去 u 得

$$\frac{\overline{v}_B}{c}=\frac{2u/c}{1+u^2/c^2}=\frac{2\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}}{1+\dfrac{1-k}{1+k}}=\sqrt{1-k^2}$$

$$\therefore\quad k=\sqrt{1-\overline{v}_B^2/c^2}=\frac{m_A}{m_B}=\frac{m_0}{m_B}$$ 即

$$m_B=\frac{m_0}{\sqrt{1-\overline{v}_B^2/c^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

(26)式的意思是說，當靜止時質量爲 m_0 的 B 球，在 $\overline{s}$ 中以 $\overline{v}_B$ 之速率運動時，在 $\overline{s}$ 中測得它的質量爲 $m_0/\sqrt{1-\overline{v}_B^2/c^2}$，同理，在 $\overline{s}$ 中 A 球的質量爲 $m_0/\sqrt{1-\overline{v}_A^2/c^2}$，故一般可寫成

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

其中 m_0 稱爲靜止質量，m 稱爲相對論質量。

(26)式雖是令 $v\to 0$ 時求得之結果，但在一般情形下都仍適用，我們可以利用(26)把 m_A, m_B 分別代入(22)來驗證，但(23)實際上與(22)相當，所以代入(23)比較方便：當 $v\neq 0$ 時，

$$1-\overline{v}_A^2/c^2=1-\frac{v^2/c^2}{1-u^2/c^2}=\frac{1-u^2/c^2-v^2/c^2}{1-u^2/c^2}$$

$$\therefore\quad m_A=\frac{m_0}{\sqrt{1-\overline{v}_A^2/c^2}}=\frac{m_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2-v^2/c^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$1-\overline{v}_B^2/c^2=1-\frac{4u^2/c^2+v^2/c^2(1-u^2/c^2)}{(1+u^2/c^2)^2}$$

$$=\frac{(1-u^2/c^2)^2-v^2/c^2(1-u^2/c^2)}{(1+u^2/c^2)^2}$$

$$=\frac{(1-u^2/c^2)(1-u^2/c^2-v^2/c^2)}{(1+u^2/c^2)^2}$$

$$\therefore \quad m_B = \frac{m_0}{\sqrt{1-\overline{v}_B{}^2/c^2}} = \frac{m_0\,(1+u^2/c^2)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-u^2/c^2-v^2/c^2)}} \cdots\cdots\cdots (29)$$

把(28)(29)代入(23)得

$$\text{左式} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{m_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2-v^2/c^2}} \cdot \frac{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-u^2/c^2-v^2/c^2)}}{m_0\,(1+u^2/c^2)}$$

$$= \frac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2} = \text{右式}$$

現在我們來驗證(26)也滿足 $\overline{x}$ 方向的動量守恆：

由(18)(20)及(20)′ 得

$$m_A \times 0 + m_B \frac{(-2u)}{1+u^2/c^2} = M\,\overline{v}_x = M\,(-u) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

即 $\dfrac{2m_B}{1+u^2/c^2} = M \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$　　由(25)得

$$2m_B = (1+u^2/c^2)M = (1+\frac{1-k}{1+k})M = \frac{2}{1+k}\mathrm{M}$$

$$\therefore \quad M = (1+k)\,m_B = (1+\frac{m_A}{m_B})\,m_B = m_A + m_B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)'$$

把(31)′ 代入(31)得

$$2m_B = (m_A + m_B)(1+u^2/c^2)$$

或 $\quad m_B\,(2-1-u^2/c^2) = m_A\,(1+u^2/c^2)$

即 $\quad \dfrac{m_A}{m_B} = \dfrac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2}$

此式即(23)式，前面已推證過它適合於(28)(29)兩式。

(三) 質與能之關係與質能守恆

(a) 相對論中的動能式：

相對論仍假定能量守恆，因此淨力對質點所做的功等於其動能的改變，設在慣性系中有靜止質量爲 m_0 之質點 A，受淨力 $\overrightarrow{F}$ 作用，經 dt 時間所生的動量改變爲 $d\overrightarrow{p}$，產生的位移爲 $d\overrightarrow{r}$，此力對它所做的功爲 dw，則

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$dw=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}=d\vec{p}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=d\vec{p}\cdot\vec{v}$$

爲簡化計算過程起見，暫令 $v=c\sin\theta$，$\vec{v}=\hat{n}v=\hat{n}c\sin\theta$，其中 $\hat{n}$ 爲 $\vec{v}$ 方向上之單位向量，故得

$$\vec{P}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\hat{n}m_0c\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\hat{n}m_0c\tan\theta$$

$\therefore\quad d\vec{p}=\hat{n}m_0c\sec^2\theta d\theta+d\hat{n}m_0c\tan\theta$

但 $\quad\hat{n}\cdot\hat{n}=1\qquad\therefore\quad\hat{n}\cdot d\hat{n}+d\hat{n}\cdot\hat{n}=2\hat{n}\cdot d\hat{n}=0$

$\therefore\quad dw=(\hat{n}m_0c\sec^2\theta d\theta+d\hat{n}m_0c\tan\theta)\cdot\hat{n}c\sin\theta=m_0c^2\sec^2\theta\sin\theta d\theta$

即 $\quad dw=m_0c^2\sec\theta\tan\theta d\theta$

設質點從靜止開始受力作用至速率爲 v 時，共做功 w，因 $v=0$ 時，$\theta=0$，故得

$$w=\int_0^w dw=m_0c^2\int_0^\theta\sec\theta\tan\theta d\theta=m_0c^2\sec\theta\Big]_0^\theta$$

$$=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$$

即 $\quad w=(m-m_0)c^2=mc^2-m_0c^2$

令質點在此期間所獲得之動能爲 E_K，則

$$w=E_K=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=mc^2-m_0c^2\cdots\cdots\cdots(32)$$

此即相對論之動能式，表面上看起來和古典動能形式完全不同，可是我們可以預料當 $v\ll c$ 時，(32)必定回到古典形式來：

$$\because\quad\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\cdots\cdots$$

當 $v\ll c$ 時收斂很快，故略去小於 $(\frac{v}{c})^2$ 各項時便得

$$E_K=m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-1\right]=\frac{1}{2}m_0v^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

從(32)還可以看出當 v 由小逐漸變大時，m 跟著變大，E_K 也一齊變大，若 $v \to c$ 則 $E_K \to \infty$，表示若要 $v \to c$，就要對質點做無限多的功，換言之，不論加再多的能量給它，也不可能使其速度達到 c，由此可以推斷物質質點的相對速度不能達到光速 c，只能逐漸趨近 c。

(32)式也可以不用微積分而改用另一種方法求得：

設在一慣性系中有一靜止質量爲 m_0 之子彈，從靜止開始對它施力做功 w 時其速度爲 v，質量增加 Δm，所得動能 E_K，則 $\Delta m = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$，$E_K = w$，若有完全相同的子彈兩個，發生與上述完全相同的過程，則總動能爲 $2E_K$，質量總增加量也是 $2\Delta m$，所以

$$E_K \propto \Delta m \quad \text{或} \quad E_K = K(m - m_0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

$v \ll c$ 時，(34)必回到古典式，依上面級數展開方法得

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = K\left(\frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \therefore \; K = c^2$$ ，代入(34)，即得(32)。

(b) 能量與質量爲什麼是“同一種東西的不同表現”

(32)與(33)式基本上是一樣的，只是後者精確度較低而已。可是從(33) $E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2$ 來看，動能與質量確是各自獨立存的物理量，就同一質點而言，m_0 是不變量，E_K 則是隨著淨力對它所做的功而變，即隨 v^2 而變，若從(32)來考慮，當質點受到淨力對它做功，從而取得動能之結果，其質量變大了！換言之，在這個特例中，質點的動能變大與其質量變大是同一回事。愛因斯坦在原著中寫：“ Mass and energy are therefore essentially alike; they are only different expressions for the same thing …… ”

令一質點之相對論質量爲 m_1 及 m_2 時，動能爲 E_{K1} 及 E_{K2}，並設 $\Delta m = m_2 - m_1$，$\Delta E_K = E_{K2} - E_{K1}$，則由(32)得

$$\Delta E_K = (m_2 - m_0)c^2 - (m_1 - m_0)c^2 = (m_2 - m_1)c^2 = \Delta m c^2$$ 即

$$\Delta E_K = \Delta m c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

質量與能既然是屬於同一種東西，(32)中的 mc^2 及 $m_0 c^2$ 也都可視爲能量，分別以 $E = mc^2$ 及 $E_0 = m_0 c^2$ 表示，E 叫做總能量，或相對論總能量，E_0 叫靜止能量，當然(32)中之 E_K 也可視爲質量：$E_K/c^2 = (m - m_0)$，換言之，由做功加給質點 $w = E_K$ 之能

量，也可視同加給 $(m-m_0)=E_K/c^2$ 之質量。

(c) 靜止質量與動能之互變：

現在我們舉另一個例子來探討質與能的關係：

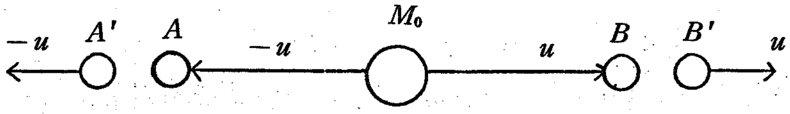


圖 二

假定在慣性系 s 中，有一物體靜止質量爲 M_0 停止於 x 軸上，忽然裂開爲等質量之 A、B 兩片向 $+x$ 及 $-x$ 方向飛去，速率都是 u，相對論質量及靜止質量各爲 m 及 m_0，而在 s 中，令其速度分別以 v_{Ax}，v_{Bx} 表示，原物體之初速度以 v_{0x} 表示，則

$$v_{Ax}=-u \qquad v_{Bx}=u \qquad v_{0x}=0$$

在另一慣性系 $\bar{s}$ 中（對 s 以 u 之速度在 x 方向運動）上述各速度以 $\bar{v}_{Ax}$，$\bar{v}_{Bx}$，及 $\bar{v}_{0x}$ 表示，則

$$\bar{v}_{Ax}=\frac{v_{Ax}-u}{1-uv_{Ax}/c^2}=\frac{-u-u}{1-u(-u)/c^2}=\frac{-2u}{1+u^2/c^2}$$

$$\bar{v}_{Bx}=\frac{v_{Bx}-u}{1-uv_{Bx}/c^2}=\frac{u-u}{1-u^2/c^2}=0$$

$$\bar{v}_{Ox}=\frac{v_{Ox}-u}{1-uv_{Ox}/c^2}=\frac{-u}{1-0/c^2}=-u$$

在 $\bar{s}$ 中引用動量守恆並設 AB 在 $\bar{s}$ 中之相對論質量爲 $\overline{m_A}$ 及 $\overline{m_B}$，原物體在 $\bar{s}$ 中之相對論質量爲 $\overline{M}=\dfrac{M_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$，

$$\bar{m}_A\bar{v}_{Ax}+\bar{m}_B\bar{v}_{Bx}=\overline{M}\bar{v}_{Ox} \quad 即$$

$$\bar{m}_A\cdot\frac{-2u}{1+u^2/c^2}+\bar{m}_B\cdot O=\overline{M}(-u) \quad 即 \quad \overline{M}=\frac{2\bar{m}_A}{1+u^2/c^2} \cdots\cdots\cdots (36)$$

由 (27) $\bar{m}_A=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\bar{v}_{Ax}^2/c^2}}$

$$但 \quad 1-\bar{v}_{Ax}^2/c^2=\frac{(1+u^2/c^2)^2-4u^2/c^2}{(1+u^2/c^2)^2}=\frac{(1-u^2/c^2)^2}{(1+u^2/c^2)^2}$$

$$\therefore \quad \overline{m_A} = m_0 \frac{1+u^2/c^2}{1-u^2/c^2} \quad \text{代入(36)得}$$

$$\overline{M} = 2m_0 \frac{1+u^2/c^2}{1-u^2/c^2} \times \frac{1}{1+u^2/c^2} = \frac{2m_0}{1-u^2/c^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

$$\therefore \quad \overline{M} = \frac{M_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2m_0}{1-u^2/c^2} \quad \text{故得}$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2m$$

由(32)知此兩裂片之總動能為 $E_K = 2(m - m_0)c^2 = (M_0 - 2m_0)c^2$

即 $E_K = (M_0 - 2m_0)c^2 = M_0(1-\sqrt{1-u^2/c^2})c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (38)$

為了解釋(38)式，我們可令在 A，B 之正前方各有 A', B' 兩靜止球，其靜止質量亦各為 m_0 與 A, B 做完全彈性正面碰撞，則 A', B' 各以 u 之速率離去，A, B 則停止下來，只剩下總靜止質量 $2m_0$，因此，靜止質量之淨減少量為

$$\Delta m = M_0 - 2m_0 = M_0(1-\sqrt{1-u^2/c^2})$$

故(38)表示一極重要現象：當一物體在一慣性系中呈靜止，靜止質量 M_0，不管什麼原因分裂成碎片，各碎片之靜止質量總和為 Σm_{0i}，則各碎片之總動能為

$$E_K = (M_0 - \Sigma m_{0i})c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

這表示靜止質質量可轉化為動能，原子核的分裂與此極為相似。(39)之正確性，在核能實驗中早已獲得充分的證明。

與以上過程完全相反的現象也可能發生：

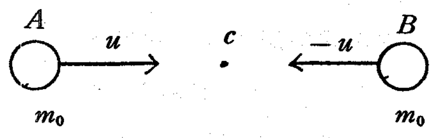


圖 三

設在一慣性系 s 中有靜止質量皆為 m_0 之 A，B 兩球靜止於 x 軸上，同時對 A，B 施以量值相等、方向相反之兩力，使之沿 x 軸相向運動，當兩者速率皆達 u 時，使外力停止作用，令 A，B 做完全非彈性碰撞後連成一體而停止於 c 點如圖所示。令撞後之連體靜止質量為 M_0，則由以上例子知

$$M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

但也可以從圖一所示之碰撞結果算出來。

由(31)′即$M=m_A+m_B$，M係$\overline{s}$中量到連體之相對論質量，故知$M=M_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$，又由(28)(29)，把m_A，m_B代入，則得：

$$M=M_0/\sqrt{1-u^2/c^2}=\frac{m_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2-v^2/c^2}}+\frac{m_0\,(1+u^2/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}\;\sqrt{1-u^2/c^2-v^2/c^2}}$$

$$\therefore\quad M_0=m_0\,\frac{(1-u^2/c^2)+(1+u^2/c^2)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2+v^2}{c^2}}}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2+v^2}{c^2}}}$$

令A，B在s中之速率設爲v_s，則$v_s{}^2=u^2+v^2$，設A，B在s中之相對論質量各爲m，則$m=m_0/\sqrt{1-v_s{}^2/c^2}$，故得：

$M_0=2m=2m_0/\sqrt{1-v_s{}^2/c^2}$ ………(40)　（此v_s與圖三中的u相當）

令A，B在s中相撞前刹那總動能爲E_K，外力對A，B做的總功w，則

$w=E_K=2\,(m-m_0)\,c^2$ ……………(41)　由(40)(41)得

$M_0=2m=E_K/c^2+2m_0$　或　$M_0-2m_0=E_K/c^2$ ………(42)

這表示：在一慣性系中，經由做功施加給一獨立系統之力學能，起先表現爲系統之動能E_K，或質量之增加，$2\,(m-m_0)\,c^2$，等相撞後成一連體，巨觀運動消失，則所加入之能量改以靜止質量之增加來表達：$\Delta m=E_K/c^2=M_0-2m_0$，能量與質量本爲一物，只是對外表現方式不同，這種特點在這例子中表露無遺。

(d)　位能與質量的互換：

在上述例子中，設A，B之間有一條質量可以不計的理想彈簧，當A，B逐漸接近時，彈簧便逐漸被壓縮，當彈簧之壓縮量達最大值時，設法使彈簧不要伸張，繼續保持壓縮狀，則其總靜止質量仍爲$M_0=E_K/c^2+2m_0$，但由力學能守恆知彈簧之位能即爲A，B所減少之總動能，令位能爲U，則$U=E_K$，故

$M_0=U/c^2+2m_0$ ………………………(43)

(43)表示在一慣性系中，加給一獨立系統U之位能，系統之靜止質量即增加U/c^2，由此推論，若有一彈簧，呈自然狀態時，放在天平上稱其質量爲m_0，然後取下來加以壓縮使之儲存位能U後設法保持其壓縮狀，再放在天平上稱，則其質量爲$m_0+U/c^2>m_0$，（依等價原理，慣性、重力質量相等），其他任何形式之位能都可獲得一樣結論並不只限於彈簧位能。

若令彈簧伸張逐漸恢復其自然狀態，此過程中原來儲存之位能已消耗於對外做功，故其靜止質量就恢復到本來的m_0值。這表示彈簧向外輸出位能U，與輸出質量U/c^2是

一樣的。

(e) 熱能與質量的互換：

在前面所舉 A, B 兩球做完全非彈性碰撞之例子中，設完全絕熱，則相撞結果，相撞前之利那（在 s 中）之總動能即全部變爲連體之熱能，設爲 Q，則 $Q=E_K=2(m-m_0)c^2$ 即

$$Q/c^2=2(m-m_0)=M_0-2m_0,$$

因此，從這個觀點來看，此系統質量之增加係由熱能所表現的，由此可以推論，在一慣性系中若有一靜止的獨立系統，其靜止質量 M_0，今以任何方式對系統加入熱能 Q（比如用熱傳導，或熱輻射，或作功或通電流等）則系統之靜止質量即增加 $\Delta m=Q/c^2$，反之若系統失去熱能 Q，則系統之靜止質量即減少 $\Delta m=Q/c^2$，比如 1 莫耳的 0°C 1 atm 之水，比 1 莫耳的 0°C 1 atm 的冰，要重 $18\times 80\times 4.2/9\times 10^{16}=-6.7\times 10^{-14}$ Kg，這麼小的量，通常不容易被測出來。

(f) 質能守恆

綜合以上各點：質量與能量是同一類的物理量，而且可能互相變換，兌換比率爲 $E=mc^2$，或 $m=E/c^2$，從這個觀點來看，質量可用 Kg 做單位，也可用 J 做單位，同理，能量可用 J 做單位，也可用 Kg 做單位（這情形與熱功關係頗爲相似，即熱或其他形式之能量都可以用卡或焦耳爲單位），因此古典的質量守恆或能量守恆便合而爲一，稱爲質能守恆：

在一慣性系中的任一獨立系統內，若在某時刻以物質形式存在之總量爲 ΣM_i，以能量形式存在之總量爲 ΣE_i，今採用質量單位，則系統內質能總和爲

$$E=\Sigma M_i+\Sigma E_i/c^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$ 稍後另一時刻變爲

$$E'=\Sigma M_i'+\Sigma E_i'/c^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

令 $\Delta M=\Sigma M_i'-\Sigma M_i \qquad \Delta E=\Sigma E_i'-\Sigma E_i$， 由 (45)－(44)

$$E'-E=\Delta M+\Delta E/c^2$$

倘 $\Delta M<0$，則表示有 $|\Delta M|$ 之質量改以能量形式表現，故總能量增加 $|\Delta M|c^2=-\Delta M c^2$，故 $\Sigma E_i'-\Sigma E_i=-\Delta Mc^2=\Delta E$

$$\therefore\quad \Delta M+\Delta E/c^2=0，\quad 即\quad E'=E，$$

同理，若 $\Delta M>0$，則表示有 ΔMc^2 之能量之減少，改做以質量形式表現，故 $\Sigma E_i'-\Sigma E_i=\Delta E<0$， $|\Delta E|=\Delta Mc^2$ 或

$-\Delta E=\Delta Mc^2=0$ 或 $\Delta M+\Delta E/c^2=0$，即仍爲 $E'=E$，當然 $\Delta M=0$，則

（下接第 44 頁）

要普及 CAI 不能忽略所謂補習班的民間機構，像補習班這種具有某一種目的的閉鎖系統中， CAI 的普及是可以預期的。

當 CAI 軟體能被使用者認同時，該補習班的營業勢必興隆，這是推廣 CAI 的有力方向。

參考資料

1. 日本文部省：教育と情報(1984)。
2. 板元昂監修：最新 CAI 事情。日本能率協會(1985)。
3. 宮本憲一：愉快的學習確率的意義。NEW Educational Waves.(Oct. 1991)。

（上承第31頁）

$\Delta E=0$，仍為$E'=E$，即E為一守恆量，

(44)也可改以能量單位表示，即

$$E=\Sigma M_i c^2+\Sigma E_i=\text{常量},$$

以上是狹義相對論中有關質量與能量的最重要推論，發表的當初，舉世震驚，不久愛因斯坦所做的寓言全部得到實驗的證明，(26)式與質能守恆已成為研究高能物理與基本粒子時不可或缺的基本公式。（限於篇幅不及詳述。）

參考資料

1. The meaning of Relativity by Albert Einstein.
2. Fundamentals of Modern Physics by Eisberg.

（上承第40頁）

伍、參考資料

1. Harvey, F.J.Chem. Educ. 1992, 69, 98.
2. Gilson, D.F.R.J.Chem Educ. 1992, 69, 23—25.
3. Lowe, J.P.J.Chem. Educ. 1988, 65, 403—406.
4. Bent, H.A. The Second Law; Oxford University Press: 1965.
5. Noggle, J.H. Physical chemistry: 1985; Chapter 5.