我國爲參加一九九二年第三十三屆
國際數學奧林匹亞競賽模擬試題及解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

引　言

在教育部與國科會行政經費支援下，甫於去年九月成立的中華民國數學奧林匹亞委員會積極規劃繼續參加一九九二年第四屆亞太數學奧林匹亞競賽，並籌辦爭取一九九二年第三十三屆的國際數學奧林匹亞競賽。亞太數學奧林匹亞競賽在既有的經驗基礎，加以更充裕嚴謹的研習活動後，續獲佳績，已躍居全部 12 個參與國的第一名（陳昭地，民 81 年）。今年首次籌劃參加第三十三屆國際奧林匹亞競賽，雖然主辦國俄羅斯遲至今年四月下旬才發出邀請函，參加選訓活動也遲至五月一日才開始，選訓期間頗短，但於七月十日～七月二十一日莫斯科舉行的第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽中，我國六位競賽學生代表，共獲三面銀牌及二面銅牌，僅有一位代表以一分之差未獲獎牌，團體成績在 68 個參與國中名列第 17，在近十年中首次參加這個活動的國家中（包括中國大陸 1985 年首次參加、日本 1990 年首次參加）表現最突出。以下將此次選拔代表中華民國參加選訓營三次模擬試題（陳昭地、顏啓麟；民 81 年）之解答刊出，這三次模擬試題中的前二次 6 道題係爲中華民國奧林匹亞委員會試題開發小組共同設計，且已譯成英文試題與今年七月十日～七月二十一日其他國家的數學奧林匹亞試題交換，第三次的 3 道題則採用第 32 屆 IMO 預選題的問題；其成績在此次甄選代表中占最大的比例。

一九九二年中華民國國際數學奧林匹亞選訓營模擬競試題

模擬競試(一)

注意事項：(1)　考試時間：08:00～12:30

(2)　配分：每題 35 分

(3)　計算紙必須連同試卷交回

(4)　不可使用計算器

問題1：設A，B爲圓上兩點，l爲過A之切線，自B作l之垂線而交l於C，設M爲$\widehat{AB}$中點，過M作切線分別交$\overline{AC}$與$\overline{BC}$於A'與B'，

試證：若$\angle BAC \leqq \frac{\pi}{8}$，則$\triangle A'B'C > \frac{1}{2}\triangle ABC$。

（台大數學系李白飛教授設計）

問題2：每個正整數都可以表示成一個或若干個連續正整數的和，試對任意正整數n討論此種表示法的個數。

（台師大數學系趙文敏教授設計）

問題3：試證：若$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲n個非負實數，$n \geqq 3$，且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

則 $x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_n^2x_1 \leqq \frac{4}{27}$ 。

（台師大數學系趙文敏教授設計）

模擬競試（二）

注意事項：(1) 考試時間：08:00～12:30

(2) 配分：每題35分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題4：設r爲一正整數，數列$\{a_n\}$定義如下：$a_1=1$，而對每個正整數n，

$$a_{n+1}=\frac{n\cdot a_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$$

試證：每個a_n都是整數，並討論a_n的奇偶性。

（台師大數學系趙文敏教授設計）

問題5：若I是$\triangle ABC$的內心，過I而垂直於$\overline{AI}$的直線與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別交於點P、Q，試證：

與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別相切於P、Q的圓必與$\triangle ABC$的外接圓相切。

（台師大數學系趙文敏教授設計）

問題6：求最大的整數A，使得由1001到2000的全部自然數的任一排列，其中都有10個（位置）連續的數，其和大於或等於A。

（交大應數系張鎮華、台師大數學系陳昭地教授共同設計）

模擬競試(三)(以下7～9係自1991年第32屆國際數學奧林匹亞預選改編)

注意事項：(1) 考試時間：08:00～12:30

(2) 配分：每題35分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題7：設 $n \geq 2$；$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是非負實數且 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$，試求滿足上述條件下，$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j)$ 的最大值。(德國)

問題8：設 O 為外接於一球的一個四面體 $ABCD$ 之球心；L、M 和 N 分別為 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 和 $\overline{AB}$ 的中點。

已知

$$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{DA} + \overline{DC}$$
$$\overline{CB} + \overline{CA} = \overline{DB} + \overline{DA}$$
$$\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{DB} + \overline{DC}$$

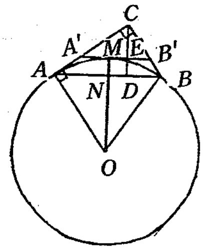
試證：$\angle LOM = \angle MON = \angle NOL$ (中國大陸)

問題9：設 n 為大於或等於3的奇數且由 $1, 2, 3, \cdots, n$。這 n 個自然數之所有排列中，至少有一種排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得下列 n 個算式之值都是正數：

$$\begin{array}{l} a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{n-1} + a_n, \\ a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_n + a_1, \\ a_3 - a_4 + a_5 - \cdots - a_1 + a_2, \\ \quad \vdots \\ a_n - a_1 + a_2 - \cdots - a_{n-2} + a_{n-1}, \end{array}$$

試求所有滿足上述條件的 n。(印度)

三、模擬競試解答



問題 1：設O爲此圓圓心，r 爲此圓半徑。若$\alpha=\angle BAC$ 則$\angle AOB=2\alpha$，$\overline{AB}=2\gamma\sin\alpha$，$\overline{AC}=\gamma\sin 2\alpha$，$\overline{BC}=\gamma(1-\cos 2\alpha)$。若$\overline{CD}$爲$\triangle ABC$中$\overline{AB}$上之高，而交$\overline{A'B'}$於$E$。

則$\triangle A'B'C:\triangle ABC=\overline{CE}^2:\overline{CD}^2$

欲證$\triangle A'B'C>\frac{1}{2}\triangle ABC$，即證$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$，亦即證$\frac{\overline{MN}}{\overline{CD}}<1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$，其中$N$爲$\overline{AB}$中點（故$\overline{MN}=\overline{DE}=\overline{CD}-\overline{CE}$）。

因$\overline{CD}=\overline{AC}\sin\alpha=\gamma\sin\alpha\sin 2\alpha=2\gamma\sin^2\alpha\operatorname{con}\alpha$，而$\overline{MN}=\gamma(1-\cos\alpha)$

因此$\frac{\overline{MN}}{\overline{CD}}=\frac{1-\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{2(\cos\alpha+\cos^2\alpha)}$

當$\alpha\le\frac{\pi}{8}$時，$2\alpha\le\frac{\pi}{4}$，故$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\ge\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$而$\cos\alpha\ge\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$。因此，只須證明 $2(\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})>2+\sqrt{2}$即可。亦即$\sqrt{2+\sqrt{2}}>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，

即 $2>\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 而此式顯然成立。

問題 2：若d是n的一個正奇因數，則

$$n=(\frac{n}{d}-\frac{d-1}{2})+\cdots+(\frac{n}{d}-1)+\frac{n}{d}+(\frac{n}{d}+1)+\cdots+(\frac{n}{d}+\frac{d-1}{2})\text{。}(*)$$

上式是將n表示成連續整數之和的一種方法。由於中間數$\frac{n}{d}$爲正整數，所以，上式各項中可能的負整數比正整數少。於是，當上式出現某個負整數$-m$時，其對應的正整數m也是上式中的一項，將這類項消去即得出n表示成連續正整數之和的一種方法。換言之，由n的每個正奇因數都可得出將n表示成連續正

整數之和的一種方法。

若 d_1 與 d_2 是 n 的兩個相異的正奇因數，則

$$\left(\frac{n}{d_1}+\frac{d_1-1}{2}\right)-\left(\frac{n}{d_2}+\frac{d_2-1}{2}\right)=\frac{d_2-d_1}{2d_1d_2}(2n-d_1d_2)$$

因為 d_1d_2 是奇數而 $2n$ 是偶數，所以，$2n-d_1d_2\neq 0$。由此可知：若 d_1 與 d_2 是 n 的兩個相異正奇因數，則 $\frac{n}{d_1}+\frac{d_1-1}{2}\neq\frac{n}{d_2}+\frac{d_2-1}{2}$。於是，對於 n 的兩個相異正奇因數，由於它們所得的將 n 表示成連續正整數之和的方法也不相同。

由此可知：將 n 表示成連續正整數之和的方法的個數，至少等於 n 的正奇因數的個數。

下面要證明：將 n 表示成連續正整數之和的方法都是上面所介紹的型式 (*)。於是，可知：將 n 表示成連續正整數之和的方法的個數，恰好等於 n 的正奇因數的個數。

設 $n=(a-k)+(a-k+1)+\cdots+a+\cdots+(a+k)$ 將 n 表示成奇數個 ($2k+1$ 個) 連續正整數的和，即 $n=a(2k+1)$。令 $d=2k+1$，則 d 是 n 的一個正奇因數，而 $\frac{n}{d}=a$，$\frac{d-1}{2}=k$。於是，此式就是上面的 (*) 式。

設 $n=(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+2k)$ 將 n 表示成偶數個 ($2k$ 個) 連續正整數的和，即 $n=k(2k+2a+1)$。令 $d=2k+2a+1$，則 d 是 n 的一個正奇因數，而 $\frac{n}{d}=k$，$\frac{d-1}{2}=k+a$。於是，上面的 (*) 式為

$$\begin{aligned} n&=(-a)+(-a+1)+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+2k)\\ &=(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+2k) \end{aligned}$$

由此可知：將 n 表示成連續正整數之和的方法都是上面所介紹的型式 (*)。

例：1992表示成連續正整數之和的方法恰有四種：

$1992=1992$，

$1992=663+664+665$，

$1992=18+19+\cdots+64+65$，

$1992=117+118+\cdots+131+132$。

問題 3：

(1) 先證 $n=3$ 的情形

設 x_2 介於 x_1 與 x_3 之間，亦即：$x_1 \le x_2 \le x_3$ 或 $x_1 \ge x_2 \ge x_3$。由此可知

$(x_2-x_1)(x_2-x_3) \le 0 \le x_1 x_2$ 再利用算幾不等式，即得

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$

$$= x_1^2 x_2 + (x_2-x_1)(x_2-x_3)x_3 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 \le x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3^2$$

$$= (x_1+x_3)^2 x_2 = (1-x_2)^2 x_2 \le 4\left(\frac{(1/2)(1-x_2)+(1/2)(1-x_2)+x_2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{4}{27}$$

(2) 次證：當 $n>3$ 時，對滿足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的任意 n 個非負實數 $x_1, x_2, \cdots,$ x_n，必可找到滿足 $y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=1$ 的 $n-1$ 個非負實數 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$。使得 $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_1 \le y_1^2 y_2 + y_2^2 y_3 + \cdots + y_{n-1}^2 y_1$

在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}=x_1$ 中，必有一個 $j=1,2,\cdots,n$ 滿足 $x_j \le x_{j+1}$。

令 $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $\cdots$, $y_{j-1}=x_{j-1}+x_j$, $y_j=x_{j+1}$, $\cdots$, $y_{n-1}=x_n$,

則可得 $y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=1$ ，而且

$$y_{j-2}^2\, y_{j-1} + y_{j-1}^2\, y_j = x_{j-2}^2(x_{j-1}+x_j) + (x_{j-1}+x_j)^2\, x_{j+1}$$

$$= x_{j-2}^2 x_{j-1} + x_{j-2}^2 x_j + x_{j-1}^2 x_{j+1} + x_j^2 x_{j+1} + 2x_{j-1} x_j x_{j+1}$$

$$\ge x_{j-2}^2 x_{j-1} + x_{j-2}^2 x_j + x_{j-1}^2 x_j + x_j^2 x_{j+1} + 2x_{j-1} x_j x_{j+1}$$

$$\ge x_{j-2}^2 x_{j-1} + x_{j-1}^2 x_j + x_j^2 x_{j+1}$$

由此即得 $y_1^2 y_2 + y_2^2 y_3 + \cdots + y_{n-1}^2 y_1 \ge x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_n^2 x_1$ 。

(3) 依數學歸納法，對滿足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的任意 n 個非負實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，必可找到三個非負實數 z_1, z_2, z_3，使得 $z_1+z_2+z_3=1$ 且

$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_n^2 x_1 \le z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1$ 。

再依(1)，即得 $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_n^2 x_1 \le \dfrac{4}{27}$

(4) 令 $x_1=\dfrac{2}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{3}$，$x_3=x_4=\cdots=x_n=0$

則 $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_n^2 x_1 = \dfrac{4}{27}$

問題4：先觀察數列 $\{a_n\}$ 的前若干項：

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1+2^{2r+1}}{3},$$

$$a_3=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1+2^{2r+1})+2\times3^{2r}\right]=\frac{2(1+2^{2r+1}+3^{2r+1})}{3\times4},$$

$$a_4=\frac{1}{5}\left[\frac{3\times2}{3\times4}(1+2^{2r+1}+3^{2r+1})+2\times4^{2r}\right]=\frac{2(1+2^{2r+1}+3^{2r+1}+4^{2r+1})}{4\times5}$$

由此可臆測並可用數學歸納法證明：對每個正整數 n，恆有

$$a_n=\frac{2(1^{2r+1}+2^{2r+1}+\cdots+n^{2r+1})}{n(n+1)}$$

令 $b_n=1^{2r+1}+2^{2r+1}+\cdots+n^{2r+1}$，則可得

$$2b_n=(0^{2r+1}+n^{2r+1})+(1^{2r+1}+(n-1)^{2r+1})+\cdots+(n^{2r+1}+0^{2r+1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1})$$

$$2b_n=(1^{2r+1}+n^{2r+1})+(2^{2r+1}+(n-1)^{2r+1})+\cdots+(n^{2r+1}+1^{2r+1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1})$$

因爲 $2r+1$ 是奇數，所以，$x^{2r+1}+y^{2r+1}$ 是 $x+y$ 的倍數。由此可知：$2b_n$ 是 n 與 $n+1$ 的公倍數，因爲 n 與 $n+1$ 互質，所以，$2b_n$ 是 $n(n+1)$ 的倍數。於是，a_n 是整數。

(1) 若 $n=4m+1$ 或 $n=4m+2$，則 $1^{2r+1}, 2^{2r+1}, \cdots, n^{2r+1}$ 中有奇數項（$2m+1$ 項）爲奇數。於是，b_n 是奇數。又因爲 $n(n+1)/2$ 是整數，所以，$a_n=b_n/[n(n+1)/2]$ 爲奇數。

(2) 若 $n=4m+3$，則 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r+1}$ 是 $n+1$ 的倍數（請注意：$2r+1\geq3$）。

因爲 $bn=\sum_{k=1}^{(n+1)/2}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]-[(n+1)/2]^{2r+1}$，

所以，b_n 是 $n+1$ 的倍數。因爲 $n\mid 2b_n/(n+1)$ 而 $(n,2)=1$，所以，$n\mid b_n/(n+1)$ 或 $n(n+1)\mid b_n$。由此可知：a_n 是偶數。

(3) 若$n=4m$，則$(\frac{n}{2})^{2r+1}$是n的倍數。因為

$$bn=\sum_{k=0}^{n/2}\left[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}\right)-(n/2)^{2r+1},$$

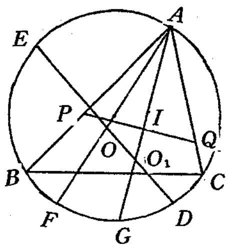
所以，b_n是n的倍數。因為$(n+1)\mid 2b_n/n$而$(n+1,2)=1$，所以，$n+1\mid b_n/n$或$n(n+1)\mid b_n$。由此可知：a_n是偶數。

問題5：（證1）

設△ABC的外接圓圓心為O，半徑為R；△ABC的內切圓，半徑為r；與$\overline{AB}$, $\overline{AC}$分別相切於P, Q的圓的圓心為O_1，半徑為ρ。

顯然地，$\overline{O_1P}\perp\overline{AP}$，$\overline{O_1Q}\perp\overline{AQ}$。

因為O_1與$\overline{AB}$相切，也與$\overline{AC}$相切，所以，其圓心O_1在$\angle BAC$的分角線$\overline{AI}$上。設外接圓過A的直徑為$\overline{AF}$，過O_1的直徑為$\overline{DE}$，又射線$\overline{AI}$與外接圓的另一交點為G。我們只須證明$\overline{OO_1}=R-\rho$即可。設$\angle C\geq\angle B$。



因為外接圓的兩弦$\overline{AG}$與$\overline{DE}$相交於O_1，所以，可知$\overline{O_1D}\times\overline{O_1E}=\overline{O_1A}\times\overline{O_1G}$。

顯然地，$\overline{O_1D}\times\overline{O_1E}=R^2-\overline{OO_1}^2$, $\overline{O_1A}=\overline{O_1P}\csc\frac{A}{2}$，$\overline{AG}=\overline{AF}\cos\angle FAG$。

不論點O在$\angle BAC$的內部或外部，都可證得$\angle FAG=\frac{A}{2}-(\frac{\pi}{2}-C)=\frac{C-B}{2}$。

於是，得$\overline{OO_1}^2=R^2-\overline{O_1D}\times\overline{O_1E}=R^2-\overline{O_1A}\times\overline{O_1G}$

$$=R^2-\rho\csc\frac{A}{2}(2R\cos\frac{C-B}{2}-\rho\csc\frac{A}{2})$$

$$(R-\rho)^2-\overline{OO_1}^2=-2R\rho+\rho^2+\rho\csc\frac{A}{2}(2R\cos\frac{C-B}{2}-\rho\csc\frac{A}{2})$$

$$=\rho\csc\frac{A}{2}\left[2R(\cos\frac{C-B}{2}-\sin\frac{A}{2})+\rho(\sin\frac{A}{2}-\csc\frac{A}{2})\right]$$

$$=\rho\csc\frac{A}{2}(4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\rho\csc\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2})$$

$$=\rho\csc^2\frac{A}{2}\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\rho\csc^2\frac{A}{2}\right)$$

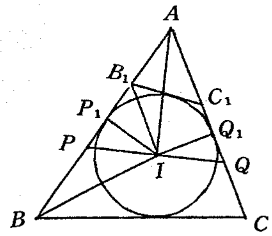
在△ABC中，外接圓半徑R與內切圓半徑r滿足$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。

另一方面，在上圖中，r是I至$\overline{AB}$的垂直距離，所以，

$r=\overline{PI}\cos\frac{A}{2}=\overline{O_1P}\cos^2\frac{A}{2}$。於是，$(R-\rho)^2-\overline{OO_1}=0$，$\overline{OO_1}^2=R-\rho$。

（證2）

用反轉變換



作內切圓的一切線$\overline{B_1C_1}$與$\overline{AB}$交於B_1，與$\overline{AC}$交於C_1，點I與A在切線$\overline{B_1C_1}$異側，而且$\angle AB_1C_1=\angle C$，$\angle AC_1B_1=\angle B$。

在△AB_1I與△AIB中，$\angle B_1AI=\angle IAB$，$\angle AB_1I=\angle AIB=180-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$，所以，△$AB_1I\sim$△$AIB$。由此得$\overline{AI}^2=\overline{AB_1}\times\overline{AB}$。

同理可得$\overline{AI}^2=\overline{AC_1}\times\overline{AC}$，利用以$A$爲圓心，$\overline{AI}$爲半徑的圓爲反轉圓。則反轉變換$I(A,\overline{AI}^2)$將點$B_1$反轉至$B$，將點$C_1$反轉至$C$。於是，$I(A,\overline{AI}^2)$將直線$B_1C_1$反轉成過$B$，$C$與$A$的圓，亦即：$I(A,\overline{AI}^2)$將直線$B_1C_1$反轉成△$ABC$的外接圓。

另一方面，設內切圓與$\overline{AB}$相切於P_1，與$\overline{AC}$相切於Q_1，則△$AIP\sim$△AP_1I。由此得$\overline{AI}^2=\overline{AP_1}\times\overline{AP}$。同理$\overline{AI}^2=\overline{AQ_1}\times\overline{AQ}$。於是，$I(A,\overline{AI}^2)$將$P_1$反轉成$P$，將$Q_1$反轉成$Q$。也因此將內切圓反轉成與$\overline{AB}$，$\overline{AC}$分別切於$P$，$Q$的圓。因爲直線$\overline{B_1C_1}$與內切圓相切，所以外接圓與此圓相切。

問題6：設$\sigma=(a_{1001},a_{1002},\cdots,a_{2000})$是從1001到2000的自然數的一個排列，

令 $A\sigma=\max\limits_{1000\leq n\leq1990}\sum\limits_{k=1}^{10}a_{n+k}$

於是，排列σ中有某10個連續項之和等於$A\sigma$，而其餘任何連續項之和都不大於$A\sigma$。因此，本題歸結爲求數$A=\min\limits_{\sigma}A\sigma$

特別地，由數$A\sigma$的定義(1)知

$$A\sigma \geq a_{1001} + a_{1002} + \cdots + a_{1010}$$
$$A\sigma \geq a_{1011} + a_{1012} + \cdots + a_{1020}$$
$$\vdots$$
$$A\sigma \geq a_{1991} + a_{1992} + \cdots + a_{2000}$$

將這些不等式兩邊分別相加，得

$$100\,A\sigma \geq a_{1001} + a_{1002} + \cdots + a_{2000}$$
$$= 1001 + 1002 + \cdots + 2000 = 1500500$$

因此，對於任何排列σ，有不等式$A\sigma \geq 15005$

由此（見A的定義式(2)），$A \geq 15005$

另一方面，考察由1001到2000的自然數的下列一種排列

$$\tau = (\ a_{1001},\ a_{1002},\ \cdots,\ a_{2000}\ )$$
$$2000, 1001, 1999, 1002, 1998, 1003, \cdots, 1501, 1500$$

這個排列可以用下列關係式給出：

$$a_n = (\ 5001 - n\ )/2 \qquad (\text{當 } n \text{ 爲奇數})\text{；}$$
$$a_n = (\ 1000 + n\ )/2 \qquad (\text{當 } n \text{ 爲偶數})\text{。}$$

所以，任何連續兩項的和是

$$a_n + a_{n+1} = \frac{5001 - n}{2} + \frac{1000 + n + 1}{2} = 3001 \qquad (\text{當 } n \text{ 爲偶數})$$

或是

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1000 + n}{2} + \frac{5001 - n - 1}{2} = 3000 \qquad (\text{當 } n \text{ 爲奇數})$$

所以任何連續10項之和，或爲$3001 \times 5 = 15005$或爲$3000 \times 5 = 15000$，因此$A\tau = 15005$，從而由關係式(2)得$A \leq 15005$，或比較不等式(3)和(4)，得 $A = 15005$。

問題7：令 $X = \{\ (\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ ) \mid xi \geq 0\ \&\ \sum_i x_i = 1\ \}$

$$F(V) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\ (\ x_i + x_j\ ) \qquad v = (\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ ) \in X$$

當v至少有3個分量不爲0時，可令

$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq x_{k-1} \geq x_{k+2} > 0$　$(k \geq 1)$ 且 $x_i = 0$　　$i > k+2$

爲簡便符號起見，令

$x_{k+1} = a$,　　$x_{k+2} = b$

顯然　$a + b \leq \dfrac{2}{3}$

次令　$w = (x_1, \cdots, x_k, a+b, 0, 0, \cdots, 0) \in X$，考慮下列的差：

$$F(W) - F(V)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i (a+b)(x_i + a + b) - \sum_{i=1}^{k} x_i a(x+a) - \sum_{i=1}^{k} x_i b(x_i + b) - ab(a+b)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i 2ab - ab(a+b) = (1-a-b)2ab - ab(a+b)$$

$$= ab[2 - 3(a+b)] \geq 0$$

∴　自右順次取代兩個不爲 0 的分量 F 之值每步驟可增加其值。

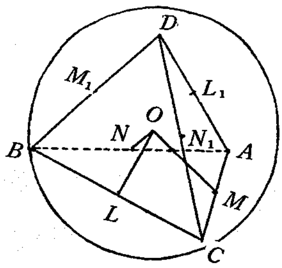
∴　知僅須求 $F(x_1, x_2, 0, 0, \cdots, 0)$ 之最大值，$x_1 + x_2 = 1$,　$x_i \geq 0$ 。

得　$x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ 的最大值爲 $\dfrac{1}{4}$

問題 8：由 (*) 得

(1)　$\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{CA} = \overline{BD}$

(2)　令 L_1, M_1, N_1, 分別爲 $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$ 之中點



∵　$\overline{L_1M_1} \overset{\angle}{=} \dfrac{1}{2} \overline{AB} \overset{\angle}{=} \overline{LM}$

$\overline{L_1M} \overset{\angle}{=} \dfrac{1}{2} \overline{CD} \overset{\angle}{=} \overline{LM_1}$

$\overline{AB} = \overline{CD}$

∴　L_1M_1LM 爲菱形。

(3)　同理 M_1N_1MN 亦爲菱形，L_1N_1LN 亦爲菱形。

(4)　設 Q 爲 L_1L 之中點，

則 Q 亦爲 M_1M 之中點；

Q 亦爲 N_1N 之中點。

(5) $\because$ L_1M_1LM，M_1N_1MN，L_1N_1LN 都是菱形

$\therefore$ $\overline{QN}\perp\overline{QM}$，$\overline{QN}\perp\overline{QL}\rightarrow\overline{QN}\perp\triangle QML$ 之平面

同理 $\overline{QN_1}\perp\triangle QML$ 之平面

$\therefore$ $\overline{MN_1}\perp\triangle QML$ 之平面　　$\triangle QML$ 之平面為 $\overline{NN_1}$ 之垂直平分面

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ \overline{NN_1}\perp\overline{AB}\\ \text{同理}\ \overline{NN_1}\perp\overline{CD}\end{array}\right\}\rightarrow Q=O$$

$\therefore$ $\angle LOM=\angle MON=\angle NOL=90^\circ$

問題 9：$\{n\}=\{4k+1\mid k\geq 1\}$

由 (*) 知

$y_1+y_2=2a_1$，$y_2+y_3=2a_2$，$\cdots$，$y_n+y_1=2a_n$

(1) 當 $n=4k+1$ ($k\geq 1$)

$y_1=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-2(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})$

$$\left.\begin{array}{l}=\dfrac{4k+2}{2}(4k+1)-\text{偶數}\\ =(2k+1)(4k+1)-\text{偶數}\end{array}\right.\quad\text{為奇數}$$

$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 都是奇數

$y_1=1$，$y_2=3$，$y_3=5$，$\cdots$，$y_{2k+1}=4k+1$，$y_{2k+2}=4k+1$，

$y_{2k+3}=4k-3$，$\cdots$，$y_{4k-1}=5$，$y_{4k}=5$，$y_{4k+1}=1$

$\rightarrow a_1=2$，$a_2=4$，$\cdots$，$a_{2k}=4k$，$a_{2k+1}=4k+1$，$a_{2k+2}=4k-1$，

$a_{2k+3}=4k-3$，$\cdots$，$a_{4k-1}=5$，$a_{4k}=3$，$a_{4k+1}=1$

$\therefore$ 排列成 $2,4,\cdots,4k,4k+1,4k-1,\cdots,5,3,1$ 為合命題之條件

$\therefore$ $n=4k+1$ 形成之奇數均為滿足問題條件之 n。

(2) 當 $n=4k-1$ 時，則 $\forall i$　$1\leq i\leq 4k-1$

$y_i=(a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n+\cdots+a_{i-1})-2(a_{i+1}+a_{i+3}+\cdots+a_{i-4}+a_{i-2})$

$$=\frac{(4k-1)4k}{4}-\text{偶}\qquad\text{為偶數}$$

但有一個 $1\leq t\leq 4k-1$，$a_t=1$，此時 $y_t+y_{t+1}=2a_t=2$

當 y_t 為正偶數，y_{t+1} 亦為正偶數 $\rightarrow y_t+y_{t+1}\geq 4$ 此為矛盾。

（下接第 32 頁）