一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

陳昭地
國立臺灣師範大學數學系所

前　言

有鑑於參加國際性科學競賽，對於發掘培養科學資賦優異人才及提昇我國在國際上科學教育地位的積極功能，國內數學界在教育部與國科會共同支持下，已於二年前開始參加第三屆亞太數學奧林匹亞競賽（The Asia Pacific Mathematics Olympiad, 簡稱APMO），並於去年獲邀參加觀察在瑞典舉行之第32屆國際數學奧林匹亞競賽活動〔陳昭地，民80年a，b〕今年更在中華民國數學奧林匹亞委員會之積極規劃下，選訓參加國際數學奧林匹亞活動的競賽代表，獲得邀請參加於本年七月十日～二十一日在主辦國俄羅斯之莫斯科舉行之第33屆IMO活動；本文的目的在於分析統計第三十三屆IMO競賽成績資料並對這6道試題提出解答並加以評析，尤其針對我國六位參與競賽的學生答題得失作簡要說明，以提供參考。

第三十三屆IMO競賽試題

IMO競賽試題來源於各參與國，依主辦國邀請期限內各自提供1～6道試題，再由主辦國組織成之試題委員會先行研究挑出適當分量的預選題。由於去年蘇聯之解體，主辦國俄羅斯遲至四月下旬始正式通知各參與國確定主辦本屆IMO活動， 因此各參與國都無法迅速地提供試題，包括我國提供的3道試題在內，在68個參與國僅有中國大陸、美國、波蘭、羅馬尼亞、日本等26個國家提供65道試題，而俄羅斯主辦第33屆IMO試題委員會作業期間頗短，僅從其中彙整出18道包含數論、代數、幾何、圖論等主題難中易不等之試題。各國領隊於七月十日報到後，隨即拿到這18題試題資料，並各自詳加研究其適切性，再於七月十日晚上後三天有關試題挑選會議中共同研討選擇試題；今年試題挑選過程爭議較多，預選題數過少，並集中於數論的題目，受到很多的批評，另外有幾位領隊或者認爲他們原先設計的問題比挑出之試題更適當，或埋怨本屆邀題期限過於倉促且俄羅斯通訊困難無法及時送達試題，因此有四位領隊各另補1道試題，結

果竟然這4道試題，投票通過2道獲選編爲正式試題，連同原來預選18道中選出 4 道題，總共6道題，再依試題包括主題、難中易層次安排爲每天3道題之二份競試題。這二份競試題先確定好英文版本，並改編成俄文版、法文版、德文版，經大會同意後，各參與國再依這四種版本之形式內容，翻譯成各參與國自行使用的語言版本，再經大會各參與國互相審查通過始定案，以下就是這屆IMO競賽中華民國的學生代表所使用的試題。

第三十三屆國際數學奧林匹亞競試試題

Version：Chinese Taipei R.O.C.第一天　7月15日

1. 試求出所有的整數 a，b，c 使得 $1<a<b<c$ 且 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的因數。
2. 設 R 是全體實數的集合。試求出所有的函數 $f: R \to R$ 使得對一切 R 中的 x，y，下列恆成立　$f(x^2+f(y)) = y+(f(x))^2$
3. 給定空間中的9個點，其中任意4點都不在同一平面上。在每兩點之間連上一條線段，其中有的線段著上藍色，有的線段著上紅色，有的不著色。試求出最小的 n 值，使得對任意 n 條線段每段或著上藍色或著上紅色時，必定會有一個三邊爲同色的三角形。

考試時間：4.5小時

每題至多7分

Version：Chinese Taipei R.O.C.第二天　7月16日

4. 在一平面上，C 爲一圓，L 爲圓 C 的切線，M 爲 L 上的一點。試求出滿足下列性質的點 P 的軌跡：

   在 L 上存在兩點 Q，R 使得 M 爲線段 QR 的中點，

   且 C 爲三角形 PQR 的內切圓。
5. 設 S 是空間直角座標系中有限個點形成的集合，並設 S_x，S_y，S_z 分別表示 S 中的點在 yz 一平面，zx 一平面，xy 一平面上的正射影之集合。證明：

   $$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

   其中 $|A|$ 表示有限集合 A 的元素個數。

   （注：一點在一平面上的正射影是指此點到該平面所作垂線的垂足）

6. 對每個正整數 n ，$S(n)$ 定義爲滿足下列條件的最大整數：對一切正整數 $k \leq S(n)$，n^2 都可表示成 k 個正整數的平方之和。

(a) 證明：對每一個 $n \geq 4$ ，$S(n) \leq n^2 - 14$;

(b) 試找出一個整數 n ，使得 $S(n) = n^2 - 14$;

(c) 證明有無限多個整數 n 使得 $S(n) = n^2 - 14$。

考試時間：4.5 小時

每題至多 7 分

第三十三屆 IMO 成績資料統計

根據主辦國公布之第三十三屆 IMO 68 個參與國共 350 位學生競賽成績，參考第三十一屆 [Zhang and Guo, (1991)] 、第三十二屆（陳昭地，民 81 年）之統計方式，列表如下：

表 1　第 33 屆 IMO 全部參與競試學生之成績統計表

總人數 350

項目 ＼ 題次	1	2	3	4	5	6	總　計
平均得分	3.65	2.95	1.90	3.49	0.76	2.25	15.01
得 分 率	0.52	0.42	0.27	0.50	0.11	0.32	0.36
標 準 差	3.09	2.38	2.64	2.74	1.80	2.22	10.09
變異係數	85 %	81 %	139 %	78 %	238 %	99 %	67 %
難度指數	0.51	0.48	0.39	0.48	0.17	0.36	
鑑別指數	0.88	0.61	0.65	0.63	0.29	0.60	

說明：(1) 每題滿分 7 分，得分率爲平均得分除以 7 取到小數後第二位之近似值。

(2) 難度指數爲高分組（86 位）與低分組（89 位）得分率之平均值，鑑別指數則爲其差值，從本表中，可知除了第 5 題外，其餘的鑑別指數頗理想尤其第 1 題的鑑別指數高達 0.88 ，頗具鑑別力。

(3) 由表 1 之難度指數與得分率可知本屆試題由易而難之次序爲 1 ，4 ，2 ，6 ，3 ，5 ；即第 1 題最簡單第 5 題最難；就原先預估難易層次而言，第 1 天之次序 1 、2 、3 相當吻合，而第 2 天之次序 4 ，5 ，6 中第 5 ，6 兩題難易

次序恰好相反。

(4) 全部參賽學生各題得分變異係數都很大，尤其是第3、5兩道題，顯示各國之間水準差異頗大。

表2 金牌、銀牌、銅牌獎及未得獎牌分組成績統計表：

表2(a) 金牌獎（人數26，成績≥32）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	6.92	6.15	6.50	6.54	4.19	5.54	35.85
得分率	0.99	0.88	0.93	0.93	0.60	0.79	0.85
標準差	0.27	1.87	1.63	1.17	3.09	1.65	3.74
變異係數	4%	30%	25%	18%	74%	30%	10%

表2(b) 銀牌獎（人數56；32>成績≥24）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	6.55	5.29	4.59	5.07	1.30	4.32	27.12
得分率	0.94	0.76	0.66	0.72	0.18	0.62	0.65
標準差	1.29	2.05	2.60	2.37	2.31	1.74	2.37
變異係數	20%	39%	57%	47%	177%	40%	9%

表2(c) 銅牌獎（人數87;24>成績≥14）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	4.99	3.44	1.48	4.54	0.66	2.53	17.63
得分率	0.71	0.49	0.21	0.65	0.09	0.36	0.42
標準差	2.62	2.27	2.30	2.55	1.49	1.89	3.06
變異係數	53%	66%	155%	56%	227%	75%	17%

表 2 (d)　未得獎牌（人數 181 ，成績＜14）

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	1.64	1.54	0.61	2.06	0.14	1.01	7.01
得分率	0.23	0.22	0.09	0.29	0.02	0.14	0.17
標準差	1.64	1.22	1.24	2.19	0.35	1.45	3.65
變異係數	145%	79%	202%	106%	245%	143%	52%

說明：(1)　金、銀、銅人數比例約為 1：2：3；且得獎總人數≦全體總人數的 1／2。

(2)　金牌獎的學生水準頗高，程度整齊。

(3)　第 3 、5 兩題三個獎牌之間之得分率差異頗大，顯示這兩道題之得分為攸關能否得金牌。

(4)　比較表 1 及表 2 (c)，第 3 、5 兩題銅牌獎之平均得分已低於全體平均得分亦可顯示全體學生在這兩題得分高低差異頗大。

(5)　比較表 2 (c)、2 (d)可窺出第 1 、2 、4 、6 等 4 道題，是影響學生能否得銅牌之主要關鍵，尤其是第 1 、4 兩道題特別明顯。

(6)　上屆的金牌之得分標準為 39 分，銀牌獎為 31 分，銅牌獎為 19 分(陳昭地；民 81 年）；本屆降低許多，跟 1990 年第 31 屆相比亦降低一些；但從專家眼光直接判斷本屆題目整體看來並不比上屆難，且應遠比 1990 年第31屆簡單，而得獎標準降低的主因應該是跟評分標準有關，本屆的評分標準規定頗嚴格，尤其注重解題思考之嚴謹性及解題表達品質，比較不容易拿滿分。

表 3　1992 年第 33 屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及得獎統計表：

題次 / 編號	1	2	3	4	5	6	總分	獲獎類別
ROC 1	7	4	2	7	0	5	25	銀牌
ROC 2	7	4	1	6	7	4	29	銀牌
ROC 3	7	0	0	7	0	3	17	銅牌
ROC 4	7	4	0	7	0	7	25	銀牌
*ROC 5	0	3	2	4	0	4	13	* / *
ROC 6	3	1	1	6	0	4	15	銅牌
總分	31	16	6	37	7	27	124	三銀、二銅

* 編號 5 僅以 1 分之差未獲獎牌。

從表 1 、表 3 及表 4 ，可看出六位中華民國代表成績得分之特色：

1. 六道題第 1、4、6 遠超過國際平均水準，尤其第 4 、6 兩題已擠入前五名內。
2. 第二天 4 、5 、6 三道題總分水準亦已擠入前五名。
3. 第 3 道題遠低於國際水準，第 2 、5 與國際水準不相上下。

表4 1992第33屆IMO前十名國家成績統計表

題次	1		2		3		4		5		6		總計	
名次 國家	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均
1. 中國大陸	41	6.83	42	7.00	42	7.00	38	6.33	35	5.83	42	7.00	240	40.00
2. 美國	37	6.17	32	5.33	32	5.33	36	6.00	11	1.83	33	5.50	181	30.17
3. 羅馬尼亞	38	6.33	42	7.00	29	4.83	38	6.33	9	1.50	21	3.50	177	29.50
4. 獨立國協	41	6.83	30	5.00	35	5.83	26	4.33	15	2.50	29	4.83	176	29.33
5. 英國	42	7.00	24	4.00	23	3.83	26	4.33	21	3.50	32	5.33	168	28.00
6. 俄羅斯	35	5.83	34	5.67	35	5.83	14	3.67	8	1.33	24	4.00	158	26.33
7. 德國	38	6.33	27	4.50	32	5.33	18	3.00	10	1.67	24	4.00	149	24.83
8. 匈牙利	33	5.50	29	4.83	29	4.83	28	4.67	3	0.50	20	3.33	142	23.67
8. 日本	27	4.50	28	4.67	24	4.00	33	5.50	4	0.63	26	4.33	142	23.67
10. 越南	38	6.33	34	5.67	6	1.00	35	5.83	9	1.50	17	2.83	139	23.17
10. 法國	33	5.50	27	4.50	16	2.67	37	6.17	8	1.33	18	3.00	139	23.17
平均(66人)	6.11		5.29		4.59		5.11		2.02		4.33		27.44	
總平均(350人)	3.65		2.95		1.90		3.49		0.76		2.25		15.01	

由表4並跟1991年第32屆結果比較（陳昭地，81年）可知英國、日本、法國擠入前十名，而伊朗、印度已退出前十名，伊朗排名第14而印度則為23名，退步很大。

另列出第12名～第30名國家之總分如下：

南斯拉夫（136分）	捷克（134分）	伊朗（133分）
保加利亞（127分）	北韓（126分）	中華民國（124分）
烏克蘭（124分）	南韓（122分）	澳洲（118分）
以色列（108分）	拉脫維亞（108分）	印度（107分）
加拿大（105分）	比利時（100分）	突尼西亞（96分）
波蘭（90分）	瑞典（90分）	香港（89分）
新加坡（89分）		

試題詳解及評析

問題 1：

試求出所有的整數 a，b，c 使得 $1<a<b<c$ 且 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的因數。（紐西蘭）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）：

設 $R(a,b,c)=\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$，$1<a<b<c$

本題相當於求出所有正整數 a，b，c 使得 $1<a<b<c$ 且 $R(a,b,c)$ 爲整數；首先注意可將 $R(a,b,c)$ 表成分項分式之形式：

$$(*)\ R(a,b,c)=1+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}$$

於是易知 $R(a,b,c)>1$ 且 $R(a',b',c')\geq R(a,b,c)$, $a\geq a'$, $b\geq b'$, $c\geq c'$

其次，$R(a,b,c)$ 爲整數時 $\Rightarrow$ $(abc-1)$ 與 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 必同時爲奇數或同時爲偶數 $\Rightarrow$ a，b，c 都是偶數或 a，b，c 都是奇數。

由 $(*)$ 知 $R(a,b,c)$ 爲整數 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}$ 爲整數

$\because\ 1<a<b<c$ 易知 $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}<\dfrac{3}{a-1}\Rightarrow a<4$

當 $a=3$ 時，$1<R(a,b,c)\leq R(3,5,7)<3$

$\therefore\quad R(a,b,c)=R(3,b,c)$

令 $R(3,b,c)=\dfrac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}=2$

得 $3bc-1=4(b-1)(c-1)$

$bc-4b-4c+5=0\ \Rightarrow\ (b-4)(c-4)=11$

$\therefore\quad b-4=1$，$c-4=11$ $\qquad\therefore\quad b=5$，$c=15$

得出一解 $(3,5,15)$

當 $a=2$ 時，$1<R(a,b,c)\le R(2,4,6)=\dfrac{47}{15}<4$

$\therefore R(a,b,c)=R(2,b,c)=2$ 或 3

$R(2,b,c)=2$ 得 $2bc-1=2(b-1)(c-1)$ 無解

$R(2,b,c)=3$ 得 $2bc-1=3(b-1)(c-1)\Rightarrow(b-3)(c-3)=5$

$\Rightarrow b-3=1$，$c-3=5\Rightarrow b=4$，$c=8$

得另外一解 $(2,4,8)$

綜合上述本題恰有二組解 $(2,4,8)$ 及 $(3,5,15)$

〔解二〕（我國競試學生代表黃傳翔同學的作法）：

令 $x=a-1$

$y=b-1$

$z=c-1$

$\because 1<a<b<c\quad \therefore x<y<z$ 且 $x,y,z\in N$

則 $xyz\mid(x+1)(y+1)(z+1)-1$ 即 $xyz\mid xyz+(xy+yz+zx+x+y+z)$

$\therefore xyz\mid xy+yz+zx+x+y+z$，$xy+x+y=(x+1)(y+1)-1\le yz-1<yz$

$zx+z=z(x+1)\le yz\ \therefore xy+yz+zx+x+y+z<3yz$

但 $xy+yz+zx+x+y+z\ge xyz$ 故 $3yz>xyz\ \therefore x<3$ 即 $x=1$ 或 2

(1) 若 $x=1$ 則 $yz\mid 2(y+1)(z+1)-1\ \therefore yz\mid 2y+2z+1$

但 $2y+2z+1<2y+2z+2=2(y+1)+2z\le 4z$ 且 $2y+2z+1\ge yz$

$\therefore yz<4z$ 即 $y<4\quad \therefore y=2$ 或 3

若 $y=2$ 則 $2z\mid 2z+5$，不合（左為偶數右為奇數）

若 $y=3$ 則 $3z\mid 2z+7\quad \therefore 3z\mid 3(2z+7)-2(3z)$

即 $3z\mid 21\Rightarrow z\mid 7\quad \therefore z=7$

得一組解 $(a,b,c)=(2,4,8)$

(2) 若 $x=2$ 則 $2yz\mid 3(y+1)(z+1)-1$

$\downarrow(-2yz)$

$\therefore 2yz\mid yz+3(y+z)+2$

同理，$3(y+z)+2<3(y+z)+3=3(y+1)+3z\le 6z$

且 $yz+3(y+z)+2\ge 2yz\ \therefore yz\le 3(y+z)+2<6z$ 故 $y<6$

又 $3\nmid 3(y+1)(z+1)-1$ 且 $2yz \mid 3(y+1)(z+1)-1$ $\therefore y \neq 3$

$\therefore y=4$ 或 5

若 $y=4$ 則 $8z \mid 15z+14$ 即 $8z \mid 8(15z+14)-120z$

$\therefore z \mid 14 \Rightarrow z=7$（不合）或 14

若 $y=5$ 則 $10z \mid 18z+17$，顯然不合（左偶右奇）

故 $(a,b,c)=(2,4,8)$ 或 $(3,5,15)$

評析：

1. 本題原設計者爲紐西蘭 IMO，爲一數論代數綜合題依選題委員會預估爲中偏易題，其結果共有129位（37％）得滿分，全體平均值爲3.65，得分率0.52；英國之6位代表均得滿分最爲出色，這也使英國能邁入前五名之主要因素。
2. 解題成就評分方式：
   ① 能指出2個正確答案　得1分
   ② 能證得：$a \leq 3$ 的不等式　得1分
   ③ 能證得：若 $a=2$，則 $b=4$，$c=8$　得2分
   ④ ③中證得但證得 $(2,b,c)$ 爲有限個解　得1分
   ⑤ 能證得：若 $a=3$，則 $b=5$，$c=15$　得2分
   ⑥ ④中未證得但證得 $(3,b,c)$ 爲有限個解　得1分
   ⑦ 未證得④或⑥但得出 $\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ 之上界　得1分
3. 討論：
   ① 本題泰國一位學生代表獲得解題特別獎，以其解題過程均以算式表達精簡扼要而獲獎爲本屆惟一的特別獎。
   ② 大會所提供的解法頗簡潔，利用到分項分式之技巧，但我國六位學生代表均未使用到這樣的方法，可能跟我國現行高中數學教科書未涉及分項分式的內容有關。
   ③ 本題解題過程技能主要爲因式分解及質數概念，對我國學生而言應屬簡易題，六位代表中有四位得滿分，另二位未掌握問題重點或用檢驗方式得出解答，而未能得分或僅得3分，對團體或個人的成績排名都有很大的影響，非常可惜。

問題2：

設R是全體實數的集合。試求出所有的函數f：$R \to R$ 使得對一切R中的x,y，下式恆成立：

$$f(x^2+f(y)) = y + (f(x))^2 \quad \text{（印度）}$$

〔解〕

由$f(x^2+f(y)) = y + (f(x))^2 \quad x,y \in R$ ……(1)

令$s = f(0)$並於(1)式中令$x = 0$得

$$f(f(y)) = y + s^2 \quad y \in R \quad \cdots\cdots(2)$$

於(1)中令$y = 0$得

$$f(x^2+s) = f(x)^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

在上式(3)中令$x = 0$得

$$f(s) = s^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

由(3)、(4)相加：

$$s^2+f(x^2+s)=f(x)^2+f(s)$$

故得

$$f(s^2+f(x^2+s))=f(f(x)^2+f(s))$$

由(1)得

$$x^2+s+f(s)^2=s+(f(f(x)))^2$$

再由(2)、(4)得

$$x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2$$

解得　$s = 0$即$f(0) = 0$ ……(5)

將(5)之結果分別代入(2)、(3)得

$$f(f(y))=y，y \in R \quad \cdots\cdots(6)$$

$$f(x^2)=(f(x))^2，x \in R \quad \cdots\cdots(7)$$

即得

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \cdots\cdots(5) \\ f(x^2) = (f(x))^2 & \cdots\cdots(7) \\ f(f(x)) = x & \cdots\cdots(6) \end{cases}$$

於(7)中得知當$x \geq 0$時，$f(x) \geq 0$ ……(8)

若$f(x)=0 \Rightarrow 0=(f(x))^2=f(x^2)=f(x^2+f(x))=x+(f(x))^2=x$

故得　$f(x)>0$對每一$x>0$恆成立……(9)

在(1)式中以 $f(y)$ 取代 y 並利用(6)、(7)，在 $x\geq 0$ ，$y\in R$ 得：

$$f(x+y)=f((\sqrt{x})^2+f(f(y)))=f(y)+(f(\sqrt{x}))^2=f(y)+f(x)\cdots(10)$$

在(10)式中，令 $x>y$，則 $x-y>0$ 故知

$$f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)>f(y)$$

$$\Rightarrow\ f(x)>f(y)\quad x>y\ \cdots\cdots(11)$$

即 $f(x)$ 爲嚴格增函數

利用(11)及(6)最後證明：$f(x)\equiv x$

若 $f(x)>x$，則 $x=f(f(x))>f(x)$ 得到矛盾

若 $f(x)<x$，則 $x=f(f(x))<f(x)$ 亦得矛盾

故總結得證 $f(x)\equiv x$ 。

評析：

1. 本題原設計者爲印度 IMO，爲代數題（函數方程）， 預估爲中度題，其結果共有77位（22％）得滿分，全體平均值爲2.95，得分率0.42， 中國大陸和羅馬尼亞的全部代表都得滿分，最爲出色；而印度在此次6題中，本題得分率比其他5題都高，顯示對其本國學生頗有利。
2. 解題成就評分方式：
   ① 僅得出 $f(x)\equiv ax+b$ 而未確定 a 或 b 者 得4分
   ② 得出下列之任一結果（包括全部） 得2分
      (a) $f(0)=0$
      (b) $f(x^2)=(f(x))^2$
      (c) $f(f(x))=x$
   ③ 證出 $f(x)$ 爲增函數 得2分
   ④ 指出 $f(x)\equiv x$ 的答案 得1分
3. 討論：
   ① 我國六位學生代表最好者僅得4分，主要的問題沒想到需證出 $f(x)$ 爲增函數，而在試圖證出對所有之有理數 $f(x)\equiv x$ 成立後，就直接得到 $f(x)\equiv x$ 之結論，使用了“連續函數”之條件，但原問題並未指明此條件而遭到扣3分，這可能跟高三學生學習理科數學中之微積分有關！非常可惜！

② 我國有二位學生代表一開始就先說明 $f(x)$ 一定是多項式函數， 而其說明中排除了三角函數、指數函數及對數函數，而得出，顯然函數概念很不清楚，僅得1分或3分。

③ 我國一位學生代表未能掌握，考試時間（花過多的時間寫第1題）而沒有作本題而得0分，顯得很失常。

問題3：

給定空間中的9個點，其中任意4點都不在同一平面上。在每兩點之間連上一條線段，其中有的線段著上藍色，有的線段著上紅色，有的不著色。試求出最小的 n 值，使得對任意 n 條線段每段或著上藍色或著上紅色時，必定會有一個三邊爲同色的三角形。（中國大陸）

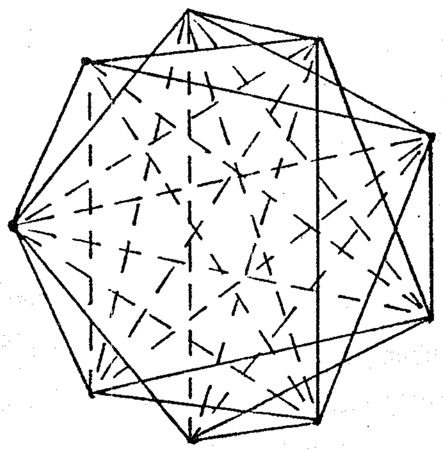
〔解〕

九點中，任意二點相連共得36條線段。

當33線段分別被著上紅色或藍色時，則全部36線段中，僅留下3條線段未著色。此時我們可挑出3頂點使得其中任一點爲未著色條線之一端點，於是餘下來的6個頂點，其兩兩頂點間所連接的線段均已被著上紅色或著上藍色，而構成2色完全圖，故由朗塞（F.P. Ramsey）定理知此六頂點形成之2色完全圖必含單色三角形。

故知 $n \geq 33$ 時，本題必含同色三角形。

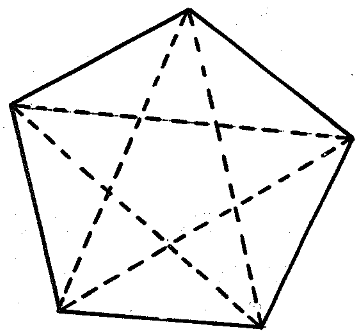
但當僅含有32條線段著二色的圖形中，如下圖所示（實色表著紅色，虛色表著藍色），得知其圖中不含任一單色三角形：



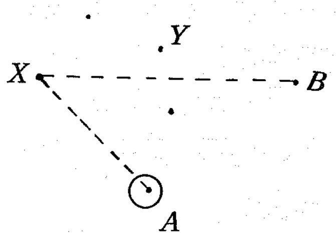
綜合以上，本題最小的 n 值爲33條。

評析：

1. 本題原設計者為中國大陸 IMO，為圖論的問題，預估為難題，其結果有58位（16％）得滿分，全體平均值 1.90，得分率為 0.27，為第一天競試中之最難的一道題，全部六道題中，難度僅次於第5題；大陸 IMO 學生頗為專精的問題，六位學生都得滿分，奠定大陸隊獲得本屆總分冠軍之基礎；集訓比較嚴謹的國家在本題的得分相對提高，奠定能否擠入前十名或得到金牌之重要。



2. $n=32$ 之不含任一同色三角形可由右圖五頂點不含單色三角形之完全圖思考起：
於其中任一非單色三角形H，造出多一個頂點之不含單色三角形之圖：標出H中之一頂點令為A，而加上另一頂點B。
將B點跟H中A點外之頂點連之，BX與AX著同色，則新的三角形亦不單色，因為$\triangle AXY$ 不為單色所以$\triangle BXY$亦不為單色；如此手續作4次於G_5得G_6（不含任一同色之三角形），依此由$G_6 \to G_7 \to G_8 \to G_9$而得到上圖有32條著色而不含任一同色三角形之圖。



3. 解題成就評分方式：
① 估計$n \leq 33$之完全正確說明　得3分
② 較不準確$n \leq 34$之說明　得1分
③ 在33邊的圖中提及包括六頂點完全圖者　得1分
④ 造出$n=32$之完全正確不含同色三角形之圖者　得4分
⑤ 造出$n=30$或$n=31$之不含同色三角形之圖　僅得1分

4. 討論
① 我國高中學生對圖論問題很生疏，雖然在選訓過程中很強調的主題，但為時

已晚，全部六位只得6分，爲得分最低的一道題。

② 在試題選題委員會議中，我投反對票，無奈因爲此次預選題中僅有之圖論問題及許多參加競賽次數經驗多的國家之支持而獲得表決通過。

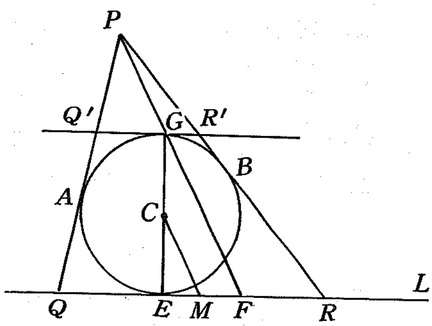
問題4：

在一平面上，C爲一圓，L爲圓C的切線，M爲L上的一點。試求出滿足下列性質的點P的軌跡：

在L上存在兩點Q，R使得M爲線段QR的中點，且C爲三角形PQR的內切圓。（法國）

〔解一〕 （平面幾何法）

點P爲軌跡爲過G點平行於$\overleftrightarrow{CM}$之射線$\overrightarrow{GP}$（不含G點），證明如下



(1) 連接$\overrightarrow{EC}$交圓於G

(2) 過點G作$Q'R' \parallel QR$

(3) 圓C爲$\triangle PQ'R'$之外切圓可得

$\overline{GR'} = s' - \overline{PR'}$（$s'$爲$\triangle PQ'R'$之半周長）：

$\because \overline{Q'A} = \overline{Q'G}$，$\overline{R'G} = \overline{R'B}$；

$\overline{PA} = \overline{PB}$，$\overline{PQ'} + \overline{Q'R'} + \overline{R'P} = 2s'$

$\therefore \overline{GR'} = \overline{R'G} = s' - \overline{PR'}$

(4) $\because \triangle PQ'R' \sim \triangle PQR$

$$\therefore \overline{FR} = \overline{GR'}\left(\frac{\overline{PR}}{\overline{PR'}}\right) = (s' - \overline{PR'})\frac{\overline{PR}}{\overline{PR'}} = s - \overline{PR} = \overline{QE}$$

（s爲$\triangle PQR$之半周長）

$\therefore \overrightarrow{GP}$上點除$G$以外滿足問題之條件

反之，若P點滿足問題之條件：

(1)′ 連接$\overrightarrow{PG}$交L於F

(2)′ $\because \overline{MQ} = \overline{MR}$，$\overline{FR} = \overline{QE}$

$\therefore \overline{EM} = \overline{MF}$

(3)′ 在$\triangle EMC$與$\triangle EFG$中

$\because \angle E = 90^\circ \quad \overline{EC} : \overline{CG} = 1 : 1 = \overline{EM} : \overline{MF}$

$\therefore \triangle EMC \sim \triangle EFG \quad \therefore \angle FGC = \angle MCE \quad \therefore \overline{FG} \parallel \overline{MC} \quad \therefore \overline{GP} \parallel \overline{MC}$

〔解二〕（我國競試學生代表吳宏五同學的向量證法）：

$\because C$為$\triangle PQR$之內心

$\therefore \overline{RQ}(\overrightarrow{CP}) + \overline{PQ}(\overrightarrow{CR}) + \overline{PR}(\overrightarrow{CQ}) = 0$

推得 $\overrightarrow{GP} = \dfrac{2\overline{PA}}{\overline{PQ}}\ \overrightarrow{MC}$（過程詳略）

仿照幾何證法確定軌跡就是不含G點之射線$\overrightarrow{GP}$。

〔解三〕 解析幾何法（詳略）

評析：

1. 本題為法國領隊 Deschamps 教授，於試題選擇會議中向大會提出，原法國 IMO 設計題未能在預定 33 屆 IMO 期限寄達的幾何題，由於此次 18 題選題委員會原先提出的預選題中有關平面幾何題偏難，因此法國領隊所提的問題經簡略說明後，很快的被試題委員會通過；本題屬中偏易題，為第二天三題中最簡易的問題，其結果共有 84 位（24%）得滿分，全體平均值為 3.49，得分率為 0.5。
2. 法國領隊適時提出本問題，對其本國學生頗有利，六位學生代表有四位滿分，一位得 6 分，一位得 3 分共得 37 分；法國在六題之中，本題得分最高，與我國六位代表比較不相上下；都僅以一分之差略遜中國大陸和羅馬尼亞。
3. 解題評分方式：

① 平面幾何或向量幾何證法中，僅證“充分”或“必要”單方向者至多僅得 5 分。

② 在坐標幾何證法中僅寫出軌跡所含的直線方程式至多得 3 分。

③ 在平面幾何或向量幾何證法中

G_1 正確描述軌跡所在的直線　得 1 分

G_2 軌跡正確地確定出來　得 1 分

G_3 正確地描述軌跡$\overrightarrow{GP}$之點G位置及不包括此點　得1分

G_4 正確證明線段之間相似關係　得2分

G_5 充分必要條件兩方向都推論　得2分

④ 在坐標幾何證法中

C_1 軌跡點P所在之參數方程式　得1分

C_2 正確的軌跡所在之直線方程式（不含參數）　得2分

C_3 正確描述出軌跡射線　得1分

C_4 描述C_3所得軌跡射線等價於原問題之條件　得1分

C_5 軌跡爲不含端點G之開射線　得1分

C_6 軌跡使用原問題之幾何術語、方向與端點等　得1分

4. 討論

① 本問題雖屬於平面幾何的範圍，但有鑑於國內學生專精於坐標幾何及向量幾何，因此法國領隊——提出本問題後，對我國學生頗有利，及時投下贊成票，結果不出所料，僅以一分之差略遜於大陸隊，我國學生代表在此道題獲得第二名。

② 我國六位學生代表中，有一位使用平面幾何法，一位使用向量幾何法，另外四位都使用解析幾何法；使用平面幾何法的黃傳翔同學簡潔扼要（解一之前半段），比大會提供之解答方式還好，惟一地對另一方向沒有完整的證明，經極力爭取，始未遭到扣分；另一位向量幾何法的吳宏五同學思考方式頗突出，雖然表達欠佳，仍經協調亦得滿分；至於坐標幾何證法中僅有一位得滿分，二位被扣減1分，有一位把軌跡描述成整條直線被扣減4分，僅得3分非常可惜。

③ 在平面幾何作法中，經實驗（例如多找幾個滿足條件的P點）後，可判斷出軌跡的位置，進而依圓切線、相似等性質即可證明完成，簡潔扼要又嚴密。

④ 本題解法較多，惟主辦國協調委員會之協調員數學水準頗高，邏輯思考嚴密，評分頗嚴格，任何參與國都沒有全部得到滿分。

問題5：

設S是空間直角坐標系中有限個點形成的集合，並設S_x，S_y，S_z分別表示S中的點在yz—平面，zx—平面，xy—平面上的正射影之集合。證明：

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

其中 $|A|$ 表示有限集合 A 的元素個數。（義大利）

（注：一點在一平面上的正射影是指此點到該平面所作垂線的垂足）

〔解〕

設 $|S_x|=a$ ，$|S_y|=b$，$|S_z|=c$ 對 $|S|$ 之個數用數學歸納來證明：

(1) 當 $|S|=1 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow |S|^2=|S_x||S_y||S_z|$

(2) 設 $|S|<n$ 時，$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|$ 成立

則當 $|S|=n$ 時，必存在一個與坐標軸平面平行之平面 E，而平面 E 將 S 中之點分成兩非空集合 S^*，T^* 且

$$n=|S^*|+|T^*|，|S^*|<n，|T^*|<n$$

利用歸納假設：

$$|S^*|^2 \leq a_1b_1c_1 \qquad |T^*| \leq a_2b_2c_2$$

$$其中\ a_1=|S_x^*|，a_2=|T_y^*|，\cdots$$

可設平面 E 平行於 xy 平面，則

$$a_1+a_2=a，b_1+b_2=b，c_1\leq c，c_2\leq c$$

利用柯西不等式：

$$\begin{aligned}|S|^2&=(|S^*|+|T^*|)^2 \leq (\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2\\&\leq(\sqrt{a_1b_1}\sqrt{c}+\sqrt{a_1b_2}\sqrt{c})^2=c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2\\&\leq c\ (a_1+a_2)(b_2+b_2)=abc\end{aligned}$$

故得 $|S|=n$ 時亦成立。

因此本問題得證。

評析：

1. 本題原設計者爲義大利 IMO ，屬代數題， 原預估爲中度題，亦爲本次競試六道題獲得最高票入選的問題，以國內學生的訓練來判斷，我也極力贊成本問題，惟其結果卻相反，本題成爲最難題，全部只有21 位（6％）得滿分， 我國只有1位，全體平均值僅爲0.76 ，得分率頗低0.11 ， 眞是跌破專家的眼鏡。
2. 本題爲義大利於 1990 年第 31 屆 IMO 時所提供試題，但未被採用，而已出現在大陸有關數學奧林匹亞叢書內，更是促使大陸此次成績極爲突出之因素。
3. 解題主要概念：

① 數學歸納法第2原理

② 給定有限個點可藉平行於某一坐標平面的直觀性質

③ 柯西不等式

4. 討論：

① 我國六位學生中僅有1位（魏澤人）專注於本問題，其解法辦法雖然掌握了數學歸納法之原理，惟歸納過程係以給定點集 S 在平行於 xy — 平面的面數出發，較爲繁雜且說明表達未盡完善，但經極力爭取未遭扣分，奠定了銀牌獎的榮譽；其餘5位都把時間耗在4、6兩題，而未得到任何分數。

② 根據本題的解題概念，若能充分快速掌握平面分割有限點集之直觀性質，以國內學生在數學歸納法及柯西不等式之能力，應有較突出的表現才對，國內數學教學方式值得檢討改進。

問題6：

對每個正整數 n ，$S(n)$ 定義爲滿足下列條件的最大整數：對一切正整數 $k \le S(n)$，n^2 都可表示成 k 個正整數的平方之和。

(a) 證明：對每一個 $n \ge 4$ ，$S(n) \le n^2 - 14$ ；

(b) 試找出一個整數 n ，使得 $S(n) = n^2 - 14$ ；

(c) 證明有無限多個整數 n 使得 $S(n) = n^2 - 14$ 。（英國）

〔解〕

(a) $$n^2 = \sum_{j=1}^{n^2} 1^2 = \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n^2\text{ 項}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

若 $n \ge 4$ ，$n^2 \ge 16$ ，則 n^2 中無法表示成（$n^2 - 13$）項之正整數平方之和：在 $(*)$ 中要減少項數，必集結若干個 1^2 作成平方數：

集結4個 1^2 ，寫成 2^2 ，減少3項

集結9個 1^2 ，寫成 3^2 ，減少8項

但 $3x + 8y = 13$ 沒有非負整數能或能減少之平方數的項數依次爲3,6,8,9,11,12,14……，無法減少13個平方數

$\therefore\ S(n) \le n^2 - 14$

(b) 欲使 $S(n) = n^2 - 14$ 成立 $\Rightarrow n^2 \ge 14 \Rightarrow n \ge 4 \Rightarrow S(n) \ge 2$

所以 n^2 能寫2個以上平方數之和⇒5^2，10^2 及 13^2，…

但經檢驗 $S(5)=S(10)=2$，故推測最小的 n 至少是13。

現證 13^2 可分別寫成 $1,2,\cdots,k,\cdots,155$ 個平方數之和：

先注意到：在平方數之和中一旦含有 $(2r)^2$ 形式的偶數項可將它拆成 $r^2+r^2+r^2+r^2$，比原來的多3項，亦即原來 k 項平方和變成了 $(k+3)$ 項平方和。

其次，因爲

$$169=8^2+8^2+4^2+4^2+3^2$$

在這五項平方和經逐一拆解偶數項，可知

169可表爲 (*) $2+3t$ 項平方數之和，其中 $1\leq t\leq 53$

又因 $3^2=2^2+2^2+1$，故

$$169=8^2+8^2+4^2+4^2+2^2+2^2+1$$

在這七項平方和中，逐一拆解偶數項可知

169可表爲 (**) $1+3t$ 項平方數之和，其中 $2\leq t\leq 56$

另再由

$169=12^2+4^2+3^2$ 可知169可表爲

(***) $3t$ 項平方數之和，其中 $1\leq t\leq 51$

以上綜合得知169可分別表示成

(*) 5項，8項，11項，…，155項，158項，161項平方數之和

(**) 7項，10項，13項，…，154項，157項，…，169項平方數之和

(***) 3項，6項，9項，…，150項，153項平方數之和

另 $169=13^2=12^2+5=10^2+8^2+2^2+1^2$

故169形表示成 k 項平方數之和，$1\leq k\leq 155$，即得證 $S(13)=13^2-14$

(c) 設 $S(n)=n^2-14\ (n\geq 13)$

欲證 $S(2n)=4n^2-14$

注意到：當 $n^2=a^2+b^2+\cdots$ 時

$$(2n)^2=(2a)^2+(2b)^2+\cdots$$

將每一個偶數項平方拆解每次多出3項之事實可知

$$S(2n)\geq 4\,(n^2-14)=4n^2-56$$

只要再證明：對於 $4n^2-56<k\leq 4n^2-14$ 之 k，

可把 $4n^2$ 寫成 k 項平方數之和即可：

若 $k \equiv 4n^2 \pmod 3$，則可將 $4n^2$ 寫成

$$\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{(k-\frac{4n^2-k}{3})\text{個}}+\underbrace{2^2+2^2+\cdots+2^2}_{(\frac{4n^2-k}{3})\text{個}}$$

若 $k \equiv 4n^2+1 \pmod 3$，則可將 $4n^2$ 寫成

$$\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{(k-\frac{4n^2-k-8}{3}-1)\text{個}}+\underbrace{2^2+2^2+\cdots+2^2}_{(\frac{4n^2-k-8}{3})\text{個}}+3^2$$

若 $k \equiv 4n^2+2 \pmod 3$，則可將 $4n^2$ 寫成

$$\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{(k-\frac{4n^2-k-16}{3}-2)\text{個}}+\underbrace{2^2+\cdots+2^2}_{(\frac{4n^2-k-16}{3})\text{個}}+\underbrace{3^2+3^2}_{2\text{個}}$$

因此得證：若 $S(n)=n^2-14$，則 $S(2n)=(2n)^2-14$

因此使 $S(n)=n^2-14$ 成立之 n 有無限多解。

評析：

1. 正如第4題一樣，本題為英國領隊 Gardiner 教授，於選題會議補提英國 IMO 設計題，此題對英國學生亦頗有利，其得分在六題之中得分排名第3，可能是使英國此次排名能擠入第五名的重要原因之一；中國大陸全隊每位代表都得滿分，頗不容易。
2. 本題為代數題，原預估為難題，其結果僅為中偏難，全體共有27位（8％）得滿分，平均值為2.25，得分率為0.32，在六題中其難度低於第5、第3兩題。
3. 解題成就評分方式：

   各小題占2分（包括完整的證明）全部答對多加1分。
4. 討論：

   ① 本題我國學生代表獲得的總分為27分，名列前矛；吳宏五的解法思考方式特殊，他證明 $S(25)=25^2-14$，且若 $S(n)=n^2-14$，則 $S(n^2)=n^4-14$，其證法跟(b)、(c)解法類似，得到滿分；其解五位分別得到3～5分，以書寫

略欠嚴謹分別被扣減 2～4 分。

② 本年度有關國際數學奧林匹亞研習營或選訓營類似於本題的問題曾出現過，但解題過程描述繁複，一不小心就會被扣分。

結論與展望

本屆六道試題之解答及有關統計分析，詳如上述，我們可提出以下結論：

1. 本屆各參與國所提供的試題總數最少，主辦國選題委員會僅就其中選出 18 道預選題，最後確定的六道試題有二道題（占1／3）是臨時再補上的，創歷年來的記錄。
2. 本屆試題表面看來似較上一屆簡單，但由於主辦國批閱分數頗為嚴刻，使得競賽學生所得成績遠比上一屆低。
3. 各題解題策略僅涉及高中生應了解的基本數學知識，只要思考嚴謹，注意表達品質及平時正確的數學學習經驗，就不難獲取獎牌。
4. 今年得獎牌的成績水準比往年低得很多，能作好2道題 14 分，就可獲得銅牌獎，以往大多作好 3 道題始有得獎牌的希望。

最後對我國首次參加 IMO 競賽六位學生之試卷，經親自評閱其成績，跟其他國家作比較，我們可提出如下的特色及展望：

1. 我們六位學生代表獲得三銀、二銅之佳績，僅有一位以 1 分之差未能獲獎牌，在全部 68 個參與國中排名第 17，以本屆參與國數之多以及與近年來首次參加的隊伍（如中國大陸、日本等）比較起來應屬最突出、最好的國家。
2. 第二天 4、5、6 道題我國總分排名已擠入前五名，尤其第 4 題排名第 3，最為突出。
3. 除了中國大陸仍為超級隊伍外，以其餘國家的成績分布消長情況來看，我國很有機會邁入前十名，甚或前五名。

因此，若能針對以上特色及適時創造更積極鼓勵的教育政策，我國在未來的數學奧林匹亞競賽必然會有更好的成績，成為國際上的數學強國應該是可成為事實的一天。

參考資料

1. 陳昭地（民 80年 a），中華民國參加一九九一年亞太地區數學奧林匹亞競賽計畫報告，國立臺灣師範大學數學系。
2. 陳昭地等（民 80年 b），第三十二屆國際數學奧林匹亞年會，科學教育月刊，142期（80年9月），8～12。
3. 陳昭地（民81年），一九九一年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊（81年2月），6～22。
4. Zhang Junda and Guo Chunyan (1991), The Analysis and Evaluation of the 31st IMO , Mathematics Competitions, 4(1) 70 — 83.