

中華民國參加一九九二年第三十三屆 國際數學奧林匹亞競賽選訓營簡介

陳昭地 顏啓麟

國立臺灣師範大學數學系

引 言

有鑑於參加國際性中學生科學競賽，對發掘培養科學資賦優異人才及提昇我國在國際上科學教育地位的積極功能，國內數學界在教育部與國科會共同支持下，規劃我國參加一九九一年第三屆亞太數學奧林匹亞競賽（The Asia Pacific Mathematics Olympiad，簡稱 APMO）；雖然籌備期間頗短，但首次參加國際性的中學數學競賽活動，無論個人或團體成績都顯的一鳴驚人，極為優異（陳昭地，民 80 年），其顯示的效益在國內外均已產生相當的影響。今年繼續參加 1992 年第 4 屆的 APMO 競試，在更積極審慎的規劃下，於三月九日在國立臺灣師範大學理學院舉行，前十名試卷名單代表我們參加，成績更突出，獲得本屆 APMO 的總冠軍（陳昭地，民 81 年）。去年 2 月我國教育部接獲 1991 年第三十二屆國際數學奧林匹亞主辦國瑞典的邀請，參與 1991 年 7 月 12 日～23 日為期將近二個星期的第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽之觀察團，由國科會前科教處顏啓麟處長、前數學學會劉豐哲理事長及台灣師大數學系陳昭地教授（中華民國亞太數學奧林匹亞代表）三位組成觀察團，參與在瑞典 Uppsala 與 Sig-tuna 舉辦的第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽（The International Mathematical Olympiad，簡稱 IMO）的活動，觀察回國後向教育部及國科會提出觀察心得與建議我國積極規劃爭取參加 1992 年 7 月 10 日～21 日在俄羅斯之莫斯科舉行的第三十三屆 IMO，在教育部、國科會、數學學會及國立台灣師範大學的共同支持下，於去年九月先成立「中華民國數學奧林匹亞委員會」，擬定我國參加國際數學競試事宜，配合我國參加 1992 年亞太數學奧林匹亞競賽計畫，研辦中華民國參加 1992 年國際數學奧林匹亞競賽；本文將簡要介紹自八十一年五月一日到九日，於國立台灣師範大學理學院舉辦之「中華民國參加一九九二年國際數學奧林匹亞競賽選訓營」（教育部，民 81 年），以為國內教師或學生未來準備參加類似競賽之參考。

選訓目的及對象

依據中華民國參加一九九二年國際數學奧林匹亞競賽計畫（教育部，民81年），本選訓營之最重要目的是甄選出我國參加1992年第33屆IMO的六位正代表及二位候補代表，並利用此選訓期間達到以下之目的：

1. 加強發掘、培育輔導數學資優學生並激發其潛能。
2. 增進參與競賽學生數學解題能力。
3. 協助了解國際數學奧林匹亞競賽規則與命題趨向。
4. 增進國際數學競賽相關知識。

至於選訓對象係根據中華民國數學奧林匹亞委員會通過的四種對象來邀請：

1. 代表中華民國參加一九九二年亞太數學奧林匹亞競試之學生（共10名）。
2. 參加一九九二年中華民國亞太數學奧林匹亞研習營成績優異，經承辦單位推薦者。
3. 參加教育部八十學年度高級中學數學及自然學科資賦優異學生輔導，獲數學科鑑定小組推薦者。
4. 其他數學表現特殊優異具有具體事實，獲得中華民國數學奧林匹亞委員2人以上之推薦並經委員會審查通過者。

符合上敘四項條件的學生共23位，除了編號13及14兩位學生分別要參加跳考及聯考外，其餘21位學生均來報到參加本次的選訓營，其名單如下頁（打*者未報到）。

選訓營課程設計

本次選訓營課程根據既定目的而設計，其設計重點如下：

1. 專題探討：由IMO選訓小組與試題開發小組成員擔任為原則，講授準備IMO競試之主題，特別是國內學生教材較欠缺而IMO競試又常出現的題材，例如分析、不等式、數論、圖論、離散數學中之組合、鴿籠原理等。值得一提的是，此次選訓營期間恰逢新加坡大學數學系許其明教授（新加坡1991年IMO領隊，APMO新加坡代表）來台訪問，他是圖論方面的專家，特別安排他在5月8日早上專題探討課程中參與解說與指導。（詳見附錄一）
2. 模擬競試：為使學生適應未來參與IMO競試，並配合甄選參加代表之目的，設計三次每次為時4.5小時、三道試題之模擬競試（詳見附錄二），前兩次的6

中華民國參加一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽選訓營簡介

編號	姓名	性別	出生	就讀學校	年級	指導老師	備註
81 IM001	吳宏五	男	64.06.14	建國中學	二	徐正梅	符合參加資格第 1 項
81 IM002	黃傳翔	男	64.07.13	嘉義高中	二	許偉益	符合參加資格第 1 項
81 IM003	黃柏嶧	男	63.10.13	建國中學	三	林祜堂	符合參加資格第 1 項
81 IM004	林士傑	男	65.03.14	台南一中	三	孟繁梅	符合參加資格第 1 項
81 IM005	楊金彬	男	63.08.17	台中一中	三	朱標宗	符合參加資格第 1 項
81 IM006	高英勛	男	63.08.17	建國中學	三	徐正梅	符合參加資格第 1 項
81 IM007	曾建城	男	64.12.30	武陵高中	二	盧澄根	符合參加資格第 1 項
81 IM008	謝育平	男	63.02.14	台中一中	三	朱標宗	符合參加資格第 1 項
81 IM009	朱家輝	男	64.04.24	新竹實中	二	葉東進	符合參加資格第 1 項
81 IM010	魏澤人	男	63.02.02	建國中學	三	林祜堂	符合參加資格第 1 項
81 IM011	黃有章	男	67.03.26	板橋高中	一	吳敬羣	符合參加資格第 2 項
81 IM012	呂基台	男	62.12.03	基隆高中	三	潘志成	符合參加資格第 2 項
81 IM013*	黃士維	男	64.03.08	嘉義高中	二	許偉益	符合參加資格第 2 項
81 IM014*	劉奕汶	男	63.08.19	建國中學	三	徐正梅	符合參加資格第 2 項
81 IM015	朱柏貞	女	63.10.15	北一女中	三	李政貴	符合參加資格第 2 項
81 IM016	呂明鎬	男	65.03.18	嘉義高中	一	許偉益	符合參加資格第 2 項
81 IM017	彭威銘	男	63.01.11	台南一中	三	孟繁梅	符合參加資格第 3 項
81 IM018	陳鵬文	男	63.09.05	新竹高中	三	李承隆	符合參加資格第 3 項
81 IM019	葉丙成	男	62.12.27	建國中學	三	李白飛	符合參加資格第 3 項
81 IM020	黃仁弘	男	64.11.07	台中一中	二	賴瑞楓	符合參加資格第 4 項
81 IM021	黃景沂	男	64.08.23	建國中學	二	傅銘東	符合參加資格第 4 項
81 IM022	袁新盛	男	65.01.17	武陵高中	二	盧澄根	符合參加資格第 4 項
81 IM023	黃劭農	男	64.02.18	建國中學	二	王元坤	符合參加資格第 4 項

道題係為中華民國奧林匹亞委員會試題開發小組共同設計，第三次的 3 道題則採用第 32 屆 IMO 預選題的問題；其成績在此次甄選代表中占最大的比例。

- 獨立研究及個別評量：經由專題探討所提出之問題或由選訓小組所規劃之問題中從事獨立研究解題，此次提出 20 道獨立研究問題（詳見附錄三），其中前 16 題經個別評量詳實計分（每題滿分 7 分），發現解題策略得失並給予個別指導；後 4 題未作個別計分而充作共同研討用。

一九九二年中華民國國際數學奧林匹亞選訓營日程表

5月1日 (星期五)		11:00~12:00 報到	14:20~15:00 參加開訓典禮	15:00~17:50 專題探討與 個別評量(一) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與 個別評量(一) (分組實施)
5月2日 (星期六)	08:00~09:50 專題探討與 個別評量(二) (分組實施)	10:00~11:50 獨立研究與 個別評量(二) (分組實施)	14:00~15:50 專題探討與 個別評量(三) (分組實施)	16:00~17:50 獨立研究與 個別評量(三) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與 個別評量(四) (分組實施)
5月3日 (星期日)	08:00~12:30 IMO 第一次 模擬競試		14:00~15:50 專題探討與 個別評量(四) (分組實施)	16:00~17:50 專題探討與 個別評量(五) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與 個別評量(五) (分組實施)
5月4日 (星期一)	08:00~09:50 獨立研究與 個別評量(六) (分組實施)	10:00~11:50 獨立研究與 個別評量(七) (分組實施)	14:00~15:50 專題探討與 個別評量(六) (分組實施)	16:00~17:50 獨立研究與 個別評量(八) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與 個別評量(九) (分組實施)
5月5日 (星期二)	08:00~12:30 IMO 第二次 模擬競試		14:00~15:50 專題探討與 個別評量(七) (分組實施)	16:00~17:50 獨立研究與 個別評量(十) (分組實施)	康樂活動
5月6日 (星期三)	08:00~09:50 專題探討與 個別評量(八) (分組實施)	10:00~11:50 專題探討與 個別評量(九) (分組實施)	14:00~15:50 專題探討與 個別評量(十) (分組實施)	16:00~17:50 專題探討與個 別評量(十一) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與個 別評量(十一) (分組實施)
5月7日 (星期四)	08:00~12:30 IMO 第三次 模擬競試		14:00~15:50 獨立研究與個 別評量(十二) (分組實施)	16:00~17:50 獨立研究與個 別評量(十三) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與個 別評量(十四) (分組實施)
5月8日 (星期五)	08:00~09:50 專題探討與個 別評量(十二) (分組實施)	10:00~11:50 專題探討與個 別評量(十三) (分組實施)	14:00~15:50 專題探討與個 別評量(十四) (分組實施)	16:00~17:50 專題探討與個 別評量(十五) (分組實施)	19:00~20:50 獨立研究與個 別評量(十五) (分組實施)
5月9日 (星期六)	08:00~09:50 成果指導 (分組實施)	10:00~11:00 結訓典禮			

選訓營成績統計

本次選訓營成績計算方式，係由選訓小組參考其他各國 IMO 選訓代表之計分法，特別是對岸大陸之計分方式，並配合將我國今年度一連串參與國際競試有關活動的成績一併考慮，向中華民國數學奧林匹亞委員會提出如下的計分方式並獲得會中討論通過：

1. 每次 IMO 模擬競試各占 20%，三次共占 60%。
2. 獨立研究成績占 10%。
3. 參加 1992 年第四屆亞太數學奧林匹亞活動二次模擬競試及一次正式競試各占 10%，三次共占 30%。

依上述計算方式，除了一位未參加 APMO 活動者之成績，以其 IMO 取代外，其他所獲得之成績統計表如下：

次序	類別編號	姓 名	年級	IMO	APMO	獨立研究	總 分
1	81IM002	黃傳翔	2	49.52	25.43	7.75	82.70
2	81IM010	魏澤人	3	47.62	15.71	5.49	68.82
3	81IM003	黃柏嶧	3	38.10	15.43	9.22	62.75
4	81IM001	吳宏五	2	27.62	24	9.41	61.03
5	81IM007	曾建城	3	34.29	17.43	9.02	60.74
6	81IM004	林士傑	3	33.33	18.86	8.14	60.33
7	81IM005	楊金彬	3	35.24	14.29	7.16	56.69
8	81IM006	高英勛	3	31.43	16	8.53	55.96
9				26.67	17.14	8.14	51.95
10				29.52	15.71	6.07	51.30
11				30.48	13.14	7.06	50.68
12				24.76	12	9.11	45.87
13				22.85	11.43	8.03	42.31
14				20	10	7.05	37.05
15				18.09	10.86	8.03	36.98
16				20	9.43	7.35	36.78
17				20.95	7.71	7.84	36.50
18				17.14	11.14	6.96	35.24
19				16.19	8.09	7.35	31.63
20				17.14	11.43	2.94	31.51
21				8.57	11.43	6.07	26.07

選訓成果與檢討

今年是我國首次規劃參與IMO的競試活動。這次的活動限於第33屆主辦國俄羅斯近來政治不甚穩定的狀態，遲遲未能確定33屆之IMO是否能如期舉行以及我國能否受到邀請，使研辦此次計劃的選訓小組備受困擾；遲至4月23日才獲得俄羅斯教育部電傳邀請我國參加第33屆IMO的函件，但又因配合國內高級中學資優生甄試升大學之相關活動，整個培訓甄選活動遲至5月1日才開始，僅僅只有九天的培訓期間，幸好過去一年來我們有許多相關的活動與經驗才能順利產生六位正代表及二位候補代表：

正選代表名單：		就 讀 學 校 (年級)	就 讀 學 校 (年級)
1. 黃傳翔	省 立 嘉 中 (2)	4. 吳宏五	市 立 建 中 (2)
2. 魏澤人	市 立 建 中 (3)	5. 曾建城	省立武陵高中 (2)
3. 黃柏嶧	市 立 建 中 (3)	6. 林士傑	省立台南一中 (3)

候補代表名單：

- | | | | |
|--------|------------|--------|-------------|
| 1. 楊金彬 | 省立台中一中 (3) | 2. 高英勛 | 市 立 建 中 (3) |
|--------|------------|--------|-------------|

這些學生都將繼續參加選訓小組所規劃之第二階段培訓工作（教育部，民81年），期待這些代表利用短短二個月的期間多加努力準備投入，正如他們在本年參加APMO的傑出表現一樣（陳昭地，民81年），能再度為個人、學校及國家爭光，揚眉於國際。

參考資料

1. 陳昭地（民80年），第三屆亞太數學奧林匹亞競試成績報告，科學教育月刊，(141)，76～79。
2. 陳昭地等（民80年），第三十二屆國際數學奧林匹亞年會，科學教育月刊，(142)，8～12。
3. 中華民國數學奧林匹亞委員會（民81年），1992年亞太數學奧林匹亞試題，科學教育月刊，(149)，71～72。
4. 陳昭地（民81年），第四屆亞太數學奧林匹亞競試成績報告，科學教育月刊，(50)，42～51。
5. 教育部中教司（民81年5月），中華民國參加一九九二年國際數學奧林匹亞競賽選訓營手冊，第1～11頁。

附錄一

專題探討舉例
(新加坡 IMO 代表許其明教授主講)

* 例子 *

1. 試證：在任何一羣人中，認識奇數個人的人數必定是偶數。
2. 某晚宴上有四對夫婦，包括李氏夫婦，宴前某些人相互握手，已知每對夫婦不曾握手，且每兩人至多握一次手，握手過後，李先生問晚宴上每個人（包括李太太）握手的次數，沒料到七個人所給的答案全不同，問：李太太握過幾次手？
3. (第 32 屆 IMO) 設 G 是一個有 k 條邊的連通圖，求證可以將 G 的邊標號為 $1, 2, \dots, k$ ，使得在每一個屬兩條或更多邊的頂點，過該頂點各條邊的標號的最大公因子是 1。
4. 試證明：在任意六人中，一定有三入互相認識或者有三入互不相識。
5. (第 6 屆 IMO, 1964) 17 位科學家中的每個人和其他所有人都通信。在他們的通信中，僅僅討論三個題目，證明其中至少有三位科學家，他們互相通信中討論的是同一個題目。
6. n (≥ 2) 個參賽者 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 進行循環賽，每兩名進行一場比賽，每場決出勝負，設 w_i 和 l_i 分別表示參賽者 P_i 勝與負的局數。求證： $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2$

* 試題 *

1. 某次會議有 n 名代表出席，已知任意的四名代表中都有一個人與其餘的三個人握過手，證明任意的四名代表中必有一個人與其餘的 $n-1$ 名代表都握過手。
2. 九個數學家在一次國際數學會議上相遇，發現他們中的任意三個人中，至少有兩個人可以用同一種語言對話。如果，每個數學家至多可說三種語言，證明至少有三個數學家可以用同一種語言對話。
3. 在一個舞會上，沒有一個男孩同所有的女孩都跳過舞，但是，每個女孩至少同一個男孩跳過舞，求證：至少有兩對舞伴 g, b 和 g', b' (b, b' 是男孩， g, g' 是女孩)，使得 b 沒有同 g' 跳過舞，而 g 和 b' 也沒跳過舞。

4. 證明：在任意九個人中，一定有三個人互相認識或者有四個人互不相識。
5. 某次體育比賽，每兩名選手都進行一場比賽，每場比賽一定決出勝負，通過比賽確定優秀選手，選手 A 被確定為優秀選手的條件是：對任何其他選手 B ，或 A 勝 B ，或存在選手 C ， C 勝 B ， A 勝 C 。如果按上述規則確定優秀選手只有一名，求證：這名選手勝所有其他選手。
6. 有 $2n$ 個人在一起聚會，其中每個人至少同其中的 n 個人認識。證明從這 $2n$ 個人中總可以找出四個人來，這四個人可以圍著圓桌坐下，使得每個人旁邊都是認識的人。（ $n \geq 2$ ）
7. 平面上有 n 個點，某些點間用邊連接。每一點都和 r 個點有邊連。試問 r 可以取怎樣的值？
8. $n \geq 2$ 個參賽者進行單循環賽，每場決出勝負。證明：這 n 名參賽可適當地排列成 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 使得對每個 $i = 1, 2, \dots, n-1$ ， v_i 勝 v_{i+1}

（上承 23 頁）

- ing. (1983). Science and Mathematics in the Schools: Report of a Convocation. Washington, D. C.: National Academy of Science.
- Smith, Walter S., et al. (1982). Comets. Washington: National Science Teachers Association.
- Weiss, I. R. (1978). Report of the 1977 National Survey of Science, Mathematics, and Social Studies Education. Research Triangle Park, N. C., Center for Educational Research and Evaluation. (U. S. Government Printing Office Stock No. 038-000-00364.)
- Wong, Harry K. How You Can Be a Super Successful Teacher (audiotape). Reno, Nev.: Worldwide, n. d.

附錄二

一九九二年中華民國國際數學奧林匹亞選訓營模擬競試

模擬競試 (一)

注意事項：(1) 考試時間：08:00～12:30

(2) 配分：每題 35 分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題 1：設 A, B 為圓上兩點， l 為過 A 之切線，自 B 作 l 之垂線而交 l 於 C ，設 M 為 $\widehat{AB}$ 中點，過 M 作切線分別交 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 於 A' 與 B' ，試證：若 $\angle BAC \leq \frac{\pi}{8}$ ，

則 $\triangle A'B'C > \frac{1}{2} \triangle ABC$ 。

問題 2：每個正整數都可以表示成一個或若干個連續正整數的和，試對任意正整數 n 討論此種表示法的個數。

問題 3：試證：若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 為 n 個非負實數， $n \geq 3$ ，且 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，

則 $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \dots + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}$ 。

模擬競試 (二)

注意事項：(1) 考試時間：08:00～12:30

(2) 配分：每題 35 分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題 1：設 r 為一正整數，數列 $\{a_n\}$ 定義如下： $a_1 = 1$ ，而對每個正整數 n ，

$$a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2(n+1)^{2r}}{n+2}$$

試證：每個 a_n 都是整數，並討論 a_n 的奇偶性。

問題2：若 I 是 $\triangle ABC$ 的內心，過 I 而垂直於 $\overline{AI}$ 的直線與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別交於點 P 、 Q ，試證：

與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別相切於 P 、 Q 的圓必與 $\triangle ABC$ 的外接圓相切。

問題3：求最大的整數 A ，使得由 1001 到 2000 的全部自然數的任一排列，其中都有 10 個（位置）連續的數，其和大於或等於 A 。

模擬競試(三)

注意事項：(1) 考試時間：08:00 ~ 12:30

(2) 配分：每題 35 分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題1：設 $n \geq 2$ ； $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是非負實數且 $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ ，試求滿足上述條件下，

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j)$ 的最大值。

問題2：設 O 為外接於一球的一個四面體 $ABCD$ 之球心； L 、 M 和 N 分別為 $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ 和 $\overline{AB}$ 的中點。

已知

$$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{DA} + \overline{DC}$$

$$\overline{CB} + \overline{CA} = \overline{DB} + \overline{DA}$$

$$\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{DB} + \overline{DC}$$

試證： $\angle LOM = \angle MON = \angle NOL$

問題3：設 n 為大於或等於 3 的奇數且由 $1, 2, 3, \dots, n$ 這 n 個自然數之所有排列中，至少有一種排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 使得下列 n 個算式之值都是正數：

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{n-1} + a_n,$$

$$a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_n + a_1,$$

$$a_3 - a_4 + a_5 - \dots - a_1 + a_2,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_1 + a_2 - \dots - a_{n-2} + a_{n-1},$$

試求所有滿足上述條件的 n 。

附錄三

獨立研究題及成績評分

1. 設 a, b, c 為非負數，證明 $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$ 。
2. 設 $a_1, \dots, a_{100}, b_1, \dots, b_{100}$ 為互不相同的實數，將它們按如下法則填入 100×100 的方格表中，即在位於第 i 行和第 j 列之交處的方格內填入 $a_i + b_j$ ，今知任何一列中的數字之積皆等於 1，證明，任何一行中的數字之積均等於 -1。
3. 給定了 $2n$ 個不同的數字 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ ，並將它們按如下法則填入方格表，即在位於第 i 行和第 j 列相交處的方格內填入數字 $a_i + b_j$ ，證明：若各列數字的乘積相等，則各行數字的乘積亦相等。
4. 根據給定的自然數 a_0 ，按照如下的法則依次建造數字 $a_n, n = 1, 2, \dots$ ，如果 a_{n-1} 的最後一位數不超過 5，則將其捨去，而得到 a_n （這時也可能什麼也不剩下，那麼造數過程即告結束）；否則，則令 $a_n = 9a_{n-1}$ 。試問，數列 a_n 可否為無窮數列？
5. 求下列方程組的整數解

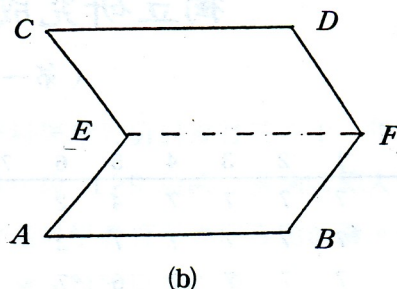
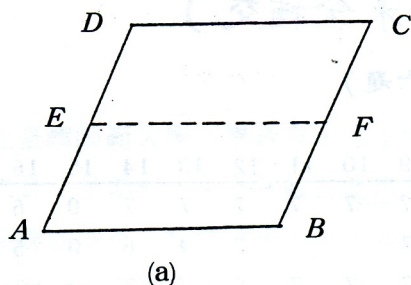
$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$
6. (a) 試找出兩個自然數 x 和 y ，使得 $xy + x$ 和 $xy + y$ 是兩個不同的自然數的平方。
(b) 能否在 988 和 1991 之間找出這樣的 x 和 y ？
7. 在黑板上寫有自然數 $1, 2, 3, \dots, n$ ，其中 $n > 3$ ，每一次允許擦去其中任何兩個數字 p 與 q ，而代之以 $p+q$ 和 $|p-q|$ ，經過這樣若干次改寫之後，黑板上所有的數字全都變成了 k ，試問： k 可能為哪些值？
8. 在巴斯卡三角形中，每個位置的數都等於它上面兩個數的和。這個三角形的最初幾行是

第 0 行										1									
第 1 行										1		1							
第 2 行										1		2		1					
第 3 行										1		3		3		1			
第 4 行										1		4		6		4		1	
第 5 行										1		5		10		10		5	
第 6 行										1		6		15		20		15	

那麼在巴斯卡三角形的哪一行中將有三個連續的位置上的數的比為 3 : 4 : 5？

9. 集合 $\{1000, 1001, 1002, \dots, 2000\}$ 中有多少對相鄰自然數，它們相加時將不出現進位的情況？
10. 彩票上有依次排列著的 50 個空格，每個參加者都應在自己的彩票上不重覆地填上 1 至 50 這 50 個正整數，填寫的順序由自己決定，主持人亦在一張彩票上填寫這 50 個數字作底，如果某人所填的數字只要有一個與底票相同（即在某個相同的格子裏填寫了相同的數字），即可中彩，試問，一個參加者至少應當填寫多少張彩票，才可以保證自己一定中彩（即不論底票是如何填寫的，他都至少會有一張彩票中彩）？
11. 火星上有 100 個互相敵視的國家，爲了維持和平，決定結成若干個聯盟，要求每一個聯盟中使包括不多於 50 個國家，而任何兩個國家都至少要同屬於某一個聯盟，試問：
 - (a) 爲了足以應付，最少可以結成多少個聯盟？
 - (b) 如果增加一個限制條件，即任何兩個聯盟的聯集中不多於 80 個國家，那麼該如何回答如上問題？
12. 四面體 $ABCD$ 的 ABC 面和 BCD 面相交成 30° 的角， $\overline{BC} = 10$ ， ABC 面的面積是 120， BCD 面的面積是 80，試求四面體的體積。
13. 在平面上有四條直線，其中任何兩條均相交，但任何 3 條均不共點，於是在每條直線上都交得 3 個交點，它們從直線上截出兩條線段，這樣共得到 8 條線段，試問這 8 條線段的長度能否分別等於如下各情形：
 - (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8？
 - (b) 互不相同的自然數？
14. 在矩形 $ABCD$ 的邊 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 和 $\overline{DA}$ 上分別取點 K, L, M 和 N ，使它們均不與頂點重合，現知 $\overline{KL} \parallel \overline{MN}$, $\overline{KM} \perp \overline{NL}$ 。證明：線段 $\overline{KM}$ 與 $\overline{LN}$ 的交點位於矩形的對角線 BD 之上。
15. 是否存在這樣的三角形，其中
 - (a) 有兩條邊上的中線？
 - (b) 所有的 3 條中線？均比相應邊的長度小整數倍？
16. 由一個多邊形可以借助如圖所示的方式得到一個新的多邊形：先沿著某條線段將多邊形切成爲兩部分（見圖(a)），將其中一部分翻轉過來，再沿著切口拼湊（圖(b)）

這時兩個部分除了切口上的點外，不再有其它的公共點，試問，能否通過若干次這樣的變化，將一個正方形變為一個三角形？



17. 在平面上，給定 $\triangle ABC$ ，及不在其邊上的兩相異點 P, Q ， $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{CP}$ 分別交 $\triangle ABC$ 的三邊（非頂點）於 D 、 E 、 F ， $\overline{AQ}$ 、 $\overline{BQ}$ 、 $\overline{CQ}$ 分別交 $\triangle ABC$ 的三邊於 G 、 H 、 I 。

試證： D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 在一圓錐曲線上。

18. 求最大的整數 A ，使得由 1 到 1992 的全部自然數的任一排列，其中都有 10 個（位置）連續的數，其和大於或等於 A 。
19. A 和 B 兩人玩下述遊戲：兩人各自寫下一正整數並將它交給裁判，裁判在黑板上寫出兩整數，其中之一是 A 和 B 二人給出的兩個整數的和。然後，裁判問 A ：「你能告訴我你的對手所寫的整數嗎？」，如果 A 回答「否」，裁判轉而問 B 相同的問題，如果 B 回答「否」，裁判再問 A 相同的問題……，依此類推。假設 A 和 B 都是很聰明而且誠實，求證在經過有限次問題之後，其中有一人將回答「是」。
20. 令 $0 < a < 1$ 且 a 為有理數

試證：若 $\cos(3\pi a) + 2\cos(\pi a) = 0$ ，則 $a = \frac{2}{3}$

一九九二年中華民國國際數學奧林匹亞選訓營 獨立研究成績(未含補交)

(第一~第十六題)

名次\題序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	總分
1	7	7	7	7	4	2		7	7	7	7	7	7	7	0	6	89
2	7	7	7	7	7	2		6	7			7	4	6	0	5	72
3	7	7	7	7	6	7		6	7	7	7	6		7	0	7	88
4	7	7	7	6	7		4	6	7	3		7	4	7	0	7	79
5	7	4	4	6	3		0	7	7	0	3	7	3	3	6	7	67
6	7	7	7	6	7			7	7	3		7	5	7	3	7	80
7	7	7	7	5	7	7		7	7	3	7	7		7	5	7	90
8	7	7	7		7			7	7	0		7	6	7	3	7	72
9	7	7	7	5	4			7	7		7	7	4	7		7	76
10	7	7	7	7	7							4	7	6	0		52
11	6	6	6	7	7	7	4	7	6	3	7	7	6	7	0	7	93
12	7	7	7	5	3			7	7			7	0	7	5		62
13	7	7	7	6	7	7	2	6	7		6	7		7	3	0	79
14	0			2	2	0		6	0	3	4	7	2	1	3	0	30
15	7	6	7	4	7	0	4	7	7	4		7	1	7	0	7	75
16	7	7	7	7	4	7		7	7		4	7	3	7	0	4	78
17	7	7	6	7	6	0			7	3	4	7	2	7	7	7	77
18	7	6	4	7	6			7	7	3	7	7	3	7	1	0	72
19	3	7	6	4	6	2		6	7		4	6	3	7	0	7	68
20	0	4	4	3	3			7	7	3	5	7		7	0	7	57
21	7	2	2	4	3	7		7	5	3	5	5	3	7	0	6	66
平均值: 6.1 6.0 5.9 5.3 5.4 2.3 0.7 6.0 6.2 2.1 3.7 6.7 3.0 6.4 1.7 5.0 72.5																	
標準差: 2.2 1.9 1.9 1.9 1.8 3.1 1.4 2.0 2.1 2.2 2.9 0.8 2.3 1.5 2.3 2.9 14.0																	