

由0與1談起——論數學教育

李嘉淦

國立臺灣師範大學數學系

當筆者出差台中縣時，項目包括數學觀摩研討、疑難輔導等，偏又多了一專題演講，而未指明方向與實際的需要，在不得已的狀況下，僅就教材與教法之疑難問題中，覓出了一個題目，暫定為“由0與1談起”。

數學乃一切科學之母，而科學教育的方向又有：

1. 國家的遠程與近程的需要。
2. 社會文化的傳統與現代的特性。
3. 科學的本質與特性的成分。
4. 學生學習的心理與生活的狀況。

四大項，那麼數學教育呢？當然一樣的具備這四大要項的方向。

一般說來，0就是沒有，不存在；而1是全部，是存在的；在以二為底的基本運算中

+	0	1
0	0	1
1	1	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

顯然有 $S = \{0, 1\}$ ，而所有的數都表成

$$a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + a_{01} 2^{-1} + a_{02} 2^{-2} + \cdots + a_{0n} 2^{-n}$$

其中 $a_i \in S$ ， $i = n, n-1, \cdots, 1, 0, 01, 02, \cdots, 0n$ 。例如

$$(1) \quad 1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

$$(2) \quad 101.01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 + 1 + 0 + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 1 + \frac{1}{4} = 5.25$$

$$(3) \quad 11101_2 + 1011_2 = 101000_2 =$$

$$(4) \quad 1101_2 \times 101_2 = 1000001_2 =$$

算起來，好像很麻煩，不如以10為底運算的方便，其中

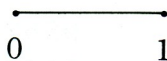
$$S = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$$

而：

$$(3) \quad 11101_2 + 1011_2 = 29 + 11 = 40$$

$$(4) \quad 1101_2 \times 101_2 = 13 \times 5 = 65$$

如果以1表ON，0表OFF，按起電算機來就方便多了；其幾何圖形就可採用圖一表
出，其敘述語句就以圖二表示出。



圖一



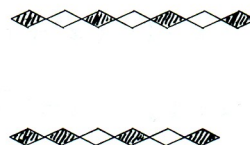
圖二

如果 p, g 表示兩個敘述時，那就是一樣的；如果以 $\diamond$ 表0， $\blacklozenge$ 表1，那麼就表出規則與不規則的圖形。

$$p \leftrightarrow g \cong (p \rightarrow g) \wedge (g \rightarrow p)$$

T	T
F	F
F	F
T	T

或



下面兩題，您們想一想，

$$(A) \quad \begin{array}{r} 63532 \quad () \\ -) \quad 4644 \quad () \\ \hline 54666 \quad () \end{array}$$

以什麼數為底，式中只有一個數字是錯的，把它找出來。

(B) 下式中 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，每一元素以一字母表示，把它找出來。

$$SEND + MORE = MONEY$$

在(A)中，底一定不會小於七，若 $S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，則：

$$\begin{array}{r} 63532 \text{ (七)} \\ -) \quad 4644 \text{ (七)} \\ \hline 55555 \text{ (七)} \end{array}$$

顯然不可以，將 S_2 令為 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，也就是以八為底，則：

$$\begin{array}{r} 63532 \text{ (八)} \\ -) \quad 4644 \text{ (八)} \\ \hline 56666 \text{ (八)} \end{array}$$

就可以得到所要求的。

您當然可以知道為什麼底一定不小於七，又為什麼顯然不可以，又為什麼要令 S_2 ，運算的方法是怎樣的，數要怎麼表出來，又為什麼是所求的答案。

在(B)中，運算是我們所熟悉的十進加法，可得答案為

$$\begin{array}{r} 9567 \\ +) 1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

您可想出 $M=1$ 嗎？ S 不為 8 即為 9 嗎？那麼 0 表什麼數字；且 E, N 必為連續數，又 $R+N$ 必然進位，想到了沒有？

我們再來看 $x^3=1$ ，

$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

$$x=1, \quad x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

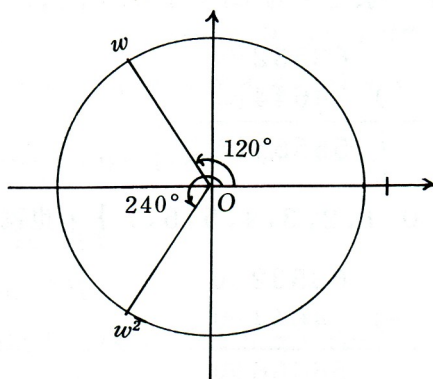
習慣上，以 $1, w, w^2$ 表之，當然可以以 $1, w^2, w$ 表之，要看得出 $w^{3n}=1$ ，(n 為任意的正整數)，若

$$w^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

則

$$\begin{aligned} w &= w^3 \cdot w = w^4 = (w^2)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

n 為負整數也可以，為什麼要說正整數呢？只是在用途上沒有必要罷了。而其幾何圖形就常採用下圖表示。



此時 $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$$

顯然由 $x^3 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ 而

$$x_n = \cos \frac{360^\circ n}{3} + i \sin \frac{360^\circ n}{3} \quad (n=0, 1, 2)$$

符合了棣美弗定理之方根，就比 1, w^2 , w 較好了。當然也有

$$w = w^4 = w^7 = \dots$$

$$w^2 = w^5 = w^8 = \dots$$

$$1 = w^3 = w^6 = \dots$$

循環處理的方法。

更有 $w + w^2 = -1$ 就可以看出說明時附上了 $x^2 + x + 1$ 的道理。

那麼運算上就有

+	1	w	w^2
1	2	$-w^2$	$-w$
w	$-w^2$	$2w$	-1
w^2	$-w$	-1	$2w^2$

•	1	w	w^2
1	1	w	w^2
w	w	w^2	1
w^2	w^2	1	w

再來看 $x^4 = 1$,

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$$

$$x=1, -1, i, -i,$$

$$(i = \sqrt{-1}, i^2 = -1)$$

其解法、說理、圖示等法與上類似。

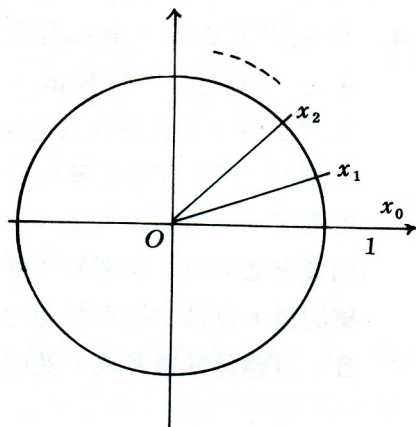
那麼 $x^n = 1$ 可以用

$$x^n = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$$

表之，而

$$x_k = \cos \frac{360^\circ k}{n} + i \sin \frac{360^\circ k}{n}$$

$$(k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$$



其循環處理法有

$$x^m = 1 \quad (m \text{ 爲任意正整數})$$

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

綜上所述，僅由簡單的0與1談起，設能加以慎密的思考，深入的研究，充分發揮數學教育的功能，就可以知道：

1. 國家遠程的需要：由於人類爲求生存，爲適應環境，爲發展資訊，爲征服自然，在在需要數學概念、符號、運算等靈感的創作，相互配合，繼而發展、改進。而近程的需要，即是教材的統整，教法的改進創新，設備的推陳更新且充實，師資素養的增高等。
2. 社會文化的傳統，具有正確的思考方向，設計方便的器械，具備刻苦耐心的嚴謹的操作技巧，使能發揮思考、想像、判斷、分析及綜合比較的能力，而現代的特性，更能激勵自動進修，配合適中合理的素材，來創高度的研究學習的精神與方法，誘導人們趨於真的功效，更能具備是非感，摒棄情感因素，而用理智、客觀來處理事物。
3. 關於數學的本質，乃在於建立數量關係的根基，研討數量間的關係，討論各個圖形的性質與關係，使能相互配合，適當的處理，適度的發揮，對問題能有更深切的認識，以便作更深廣的應用。這種認知與思想的歷程，能使其特性的成分，發展到淋漓盡致，更能達成以簡御繁，以直觀處理事物，由已知來推求未知，以抽象來統整具體的能力。於是適度合理的內容，配以螺旋式的新穎構想，創新分組相長的教法，才能培養出思考、判斷與創作的的能力。更能由嚴密精確的特性，符合邏輯化原則之思想法則方式，而陶冶其思想品性。
4. 學生學習數學，其心理就具備了反常的、認爲是步向形式陶冶的路線，不是每一個人都可以學的、不學也沒有關係的，是一科又艱辛、乏味而枯燥、深奧的學科，或許認爲只是理工科學必讀的學科、升學必考的學科。由於誤解學習的真義，產生了不正確的動機與想法，自然就缺乏了學習的興趣，加上現行時代的潮流，不按課本施教，不詳讀教材，不徹底操作隨堂練習，不想作習作，而要求老師做，又忽略了學習程度的分析，只求死背公式，一味追求不必要的類集記憶，及孤立技巧難題的解法，而大鑽其牛角尖，尤其是拚命要求增加補充題目，以應付升學考試，進而捨棄實測實驗的精神，而與實用直觀脫節。再說評量

的意義與方式，不能完成配合，更導致學生「怕」上數學課，在沒看、沒聽、沒作的大前提下，那能有巨大的收穫，而收到預期的成果？只徒使辛苦教學的老師們寒心與挫折。

是以由 0 與 1 談起，期能提高數學教育的水準，若能推演至較高深的數學，均予以研究發展，則不難革新其內涵，達成其目標，奠定復興的根基，開創更光明的前途，以維護社會的安寧，科學文明的進步，增進人類的福祉。

中華民國參加第廿四屆 國際化學奧林匹亞選手出爐

編輯室

經過四天激烈的競爭選拔賽，我國國際化學奧林匹亞指導委員工作小組，在四月十八日從來自台灣地區各個角落的十五位頂尖高中學生代表，選出了成績最好四名選手，將代表我國參加本年（1992 年）7 月 11 日至 22 日在美國賓州匹茲堡市及首府華盛頓特區舉行的第 24 屆國際化學奧林匹亞競賽（簡稱 24 th IChO）。名單如下：

林志宣（台北市市立建國高級中學，高三，20 班）

尤嘯華（台北市市立建國高級中學，高三，20 班）

莊平（台灣省立台中女子高級中學，高三，18 班）

胡康年（台北市市立建國高級中學，高三，18 班）

這四位選手，將在我國代表團，領隊吳清基司長（教育部，中教司司長），化學國際評審員彭旭明教授（國立台灣大學化學系所）、方泰山教授（國立台灣師範大學化學系所），及觀察員蕭次融教授（國立台灣師範大學化學系所）等陪同下，赴美參賽，為國家爭取最大榮譽。