教育部八十學年度第一屆高級中學數學能力競試複賽、決賽試題

國立臺灣師範大學數學系提供

壹、一、台北市複賽競試(一)

注意事項：

(1) 本試卷共三題；第一題及第二題各 20 分，第三題 30 分（滿分 70 分）。

(2) 考試時間：兩小時。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題1：（20分）

設 x、y 都是正整數，其和爲 3980，且 $\dfrac{x}{y}$ 爲最簡眞分數，這樣的分數共有多少個？

問題2：（20分）

設 $ABCD$ 爲一正方形；K、N 分別爲 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 兩邊上的一點，且知 $\overline{AK}\cdot\overline{AN}=2\,\overline{BK}\cdot\overline{DN}$，$\overline{CK}$, $\overline{CN}$ 分別交對角線 $\overline{BD}$ 於 L, M；試證 A, K, L, M, N 五點共圓。

問題3：（30分）

(1) 設 a_1,a_2,a_3；b_1,b_2,b_3 都是實數，a_1,a_2,a_3 兩兩相異，

且知
$$\begin{cases}(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)=1\\(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)=1\\(a_3+b_1)(a_3+b_2)(a_3+b_3)=1\end{cases}$$

試證：
$$\begin{cases}(b_1+a_1)(b_1+a_2)(b_1+a_3)=1\\(b_2+a_1)(b_2+a_2)(b_2+a_3)=1\\(b_3+a_1)(b_3+a_2)(b_3+a_3)=1\end{cases}$$
（20分）

(2) 將(1)推廣到 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$；$b_1,b_2,\cdots\cdots b_n$ 等 $2n$ 個實數；其滿足的條件及結論各應如何？（10分）

二、台北市複賽競試(二)

注意事項：

(1) 本試卷共8題，第1至5題每題3分共 15 分，第6至8題每題5分共15分；合計滿分 30 分。

(2) 考試時間：一小時。

(3) 計算紙必須連同試卷紙交回。

(4) 不可使用計算器。

（請將答案塡在劃線空格內），第1至5題每題3分

1. （$3^{1990}+4^{1991}+5^{1992}$）除以 11 之餘數爲__________。

2. 設α爲任意實數，$5\cos^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha$ 的最小値爲 __________。

3. 邊長爲a的正方形，以其一對角線爲旋轉軸旋轉一圈所得旋轉體之體積爲 __________。

4. 設 x，y 都是正整數，$x\geq y$ 且滿足下列方程組：

$$\begin{cases} xy+x+y=71 \\ x^2y+xy^2=1020 \end{cases}$$

則x之値爲 __________。

5. 設R爲全體實數所成的集合，$f:R\to R$ 爲一周期函數，且

$$f(x)=x \quad , \quad 0<x\leq 1$$
$$f(x+1)=f(x), \quad x\in R$$

今設 k，m，n 爲三個已知正數，且函數 $g:R\to R$ 爲下式所定義：

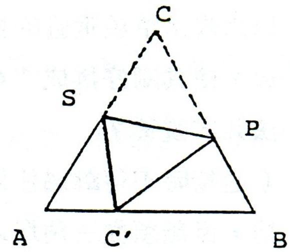
$$g(x)=\frac{f(kx+n)}{m}, \quad x\in R$$

則$g(x)$之周期爲__________。

（＊以下第6至8題每題5分＊）

6. 將$(1+0.1)^{100}$ 利用二項式定理展開得 $\sum_{K=0}^{100}A_K$，其中 $A_K=C_K^{100}(0.1)^K$，$k=0,1,2,\cdots\cdots,100$；這101個A_K中，$k=$ __________ 時，A_K之値爲最大。

7. 如圖正三角形 ABC 經折疊使得頂點 C 置於 $\overline{AB}$ 上，設 $\overline{AC'}=1$，$\overline{BC'}=2$，則 $\overline{PS}$ 之長為 ＿＿＿＿＿＿ 。



8. 設 S 為一集合，$|S|$ 表示集合 S 元素的個數，$m(S)$ 表示 S 所有子集合的總數（包含空集合及 S 本身），已知 A,B,C 為三個集合，且知 $m(A)+m(B)+m(C)=m(A\cup B\cup C)$，$|A|=|B|=10$，則 $|A\cap B\cap C|$ 的最小值為 ＿＿＿＿ 。

貳、一、板橋區複賽競試㈠

共3題，第1、2題各佔15分，第3題佔19分

(1) 假設 $a_n=[\sqrt{8n^2+8n+4}]$, $n=1,2,\cdots$，其中 $[x]$ 表示不大於 x 之最大整數。

(a) 若存在正整數 l，使得 $a_l=\sqrt{8l^2+8l+4}$，試證 $a_{l+1}-a_l=2$。

(b) 試問存在多少個正整數 m，使得 $a_m=\sqrt{8m^2+8m+4}$ ？
又存在多少個正整數 k，使得 $a_k-a_{k-1}>2$ ？

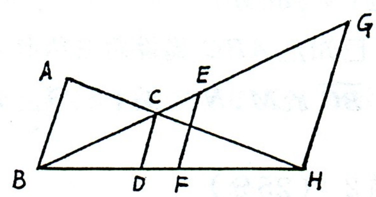
(2) 試證任意 k 個實數 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，若滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_k=k^2$ 以及 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=k^3$，則這 k 個實數都等於 k。

(3) 在平面上，兩相交的直線 L_1,L_2 將平面剩餘部分分割成四區域，點 P_1,P_2 為同一區域的兩點，試就 P_1,P_2 的位置與 L_1,L_2 的夾角之情況來決定點 P_1 到點 P_2 的最短路徑，但途中必須經過 L_1 與 L_2（並證明你的結論）。

二、板橋區複賽競試㈡

每一題3.5分，共六題

(1) 如下圖所示：線段 $\overline{AB},\overline{CD},\overline{EF},\overline{GH}$，相互平行，且 $\overline{AB}=2$，$\overline{GH}=3$，若 $\overline{CD}:\overline{EF}=3:4$，則 $\overline{BD}:\overline{DF}:\overline{FH}=$



(2) 甲、乙兩人擲一粒骰子，言明由甲先擲，每局出現的點數是1或2時甲勝，否則乙勝；連勝兩局者就贏得比賽，若局數不限，則甲贏得比賽的機率為

(3)　以六條水平或垂直的線段連結下圖中的字母，使其剛好拼成“ *CONTEST* ”的走法共有幾種？
（連接時不得跳過任何一個字母或斜向連結，但無須從三角形之頂端走起）

C
C O C
C O N O C
C O N T N O C
C O N T E T N O C
C O N T E S E T N O C
C O N T E S T S E T N O C

(4)　$A_1(0,1)$, $A_2(1,0)$, $A_3(0,0)$,爲座標平面上三點，若 A_{n+3} 爲線段 $\overline{A_nA_{n+1}}$ 的中點，$n=1,2,\cdots$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 的座標爲

(5)　直線 $3x+19y=k$ 不通過第一象限內之整數格子點的最大整數 $k=$

(6)　對於任意實數 x ，令 $[x]$ 爲不大於 x 的最大整數。

令 $a=2.45$, $b_1=[a]$, $b_n=\sqrt[n]{[ab_{n-1}]}$, $n=2,3,\cdots$,

則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=$

叁、一、新竹區複賽競試(一)

注意事項：

(1)　本試卷共三題；第一題20分，第二題及第三題各25分（滿分70分）。
(2)　考試時間：兩小時。
(3)　計算紙必須連同試卷交回。
(4)　不可使用計算器。

問題1：(20分)

已知△ABC 爲銳角三角形，D爲△ABC 的外心，△ABD 的外接圓分別交$\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 於M,N 二點；試證△BMN與△CMN的外接圓之半徑等長。

問題2：(25分)

設 a,b,c 都是正實數，試判定

$(a+b)^{a+b}\cdot(b+c)^{b+c}\cdot(c+a)^{c+a}$ 與 $[(a+b)(b+c)(c+a)]^{\frac{2(a+b+c)}{3}}$

之大小關係，並證明您的答案。

問題3：(25分)

設黑板已經寫上了 n 個數，忠明每次擦掉其中的兩個數，並寫上一個數，其規則爲：若擦掉的兩數爲 a，b，則寫上的一個數爲 $\frac{a+b}{4}$。如果一開始寫上的 n 個數都是 1，試證：

(1) 忠明作了 ($n-1$) 次後，最後寫上的數必然不小於 $\frac{1}{n}$。

(2) 當 n 爲何值及如何操作忠明可以得到最後的一數爲 $\frac{1}{n}$？

二、新竹區複賽競試(二)

注意事項：

(1) 本試卷共8題，第1至5題每題3分共15分，第6至8題每題5分共15分；合計滿分 30 分。

(2) 考試時間：一小時。

(3) 計算紙必須連同試卷紙交回。

(4) 不可使用計算器。

(請將答案塡在劃線空格內)，第1至5題每題3分。

1. 設 $A=\prod_{k=2}^{101}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{101^2}\right)$

   則與 A 等值之最簡分數爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

2. 令 P 爲正整數，且 $100!+1<P<100!+100$，這樣的 P 爲質數的個數共有＿＿＿＿＿＿＿＿個。

3. 設 $x^2-y^2=63$ 且 x, y 都是正整數，則 x^2+y 可得多少個不同的數值？＿＿＿＿＿＿＿＿。

4. 設 $a_1=1$，$a_2=11$，⋯，$a_n=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}1}$，則級數 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 的和用 n 的式子表示爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

5. 平面上三個等圓兩兩外切，且分別與一個大圓內切，若大圓的半徑爲10，則這三個等圓的半徑爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

（＊以下第6至8題每題5分＊）

6. 設S爲以原點爲球心，半徑$\sqrt{26}$的球面，則S上共有多少個格子點？________。

（空間座標系中，當x, y, z都是整數時，稱(x, y, z)爲格子點）

7. 甲、乙、丙三個籤筒中，甲籤筒中有十二支籤，分別標號爲1至12，乙籤筒中有八支籤，分別標號爲1至8，丙籤筒中有四支籤，分別標號爲1至4。王同學從三個籤筒中各抽出一籤，假設同一籤筒中各籤被抽出的機率相等。則從乙、丙兩籤筒抽出之二籤數字的和，小於從甲籤筒抽出之籤的數字的機率爲________。

8. 設平面上三點A_1，A_2，A_3的坐標分別爲$A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$。若A_4爲$\triangle A_1A_2A_3$的重心，A_5爲$\triangle A_2A_3A_4$的重心，…，A_n爲$\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$的重心，…… 已知$A_n \to P$。則$P$點的坐標以$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$,的式子表示爲________。

肆、一、花蓮區複賽競試(一)

注意事項：

(1) 考試時間：08:30-10:30

(2) 配分：第一題30分，第二題及第三題各20分（滿分70分）

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題1：(30分)

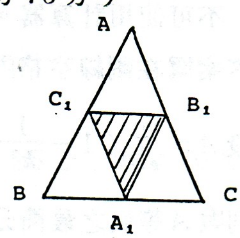
$\triangle ABC$的三邊長分別爲6, 6, 4；設D, E, F分別爲$\triangle ABC$三邊的中點，則稱$\triangle DEF$爲$\triangle ABC$中間的三角形。現在逐步在三角形中拿去中間三角形的內部，其步驟如下：

第一次：在$\triangle ABC$中拿去中間三角形$A_1B_1C_1$的內部（斜線部分）而得T_1；如圖(一)。

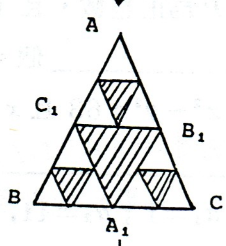
第二次：在T_1中的各個三角形中，分別各自拿去中間三角形的內部而得T_2；如圖(二)。

第三次：在T_2中的各個三角形中，又分別各自拿去中間三角形的內部而得T_3；如圖(三)。

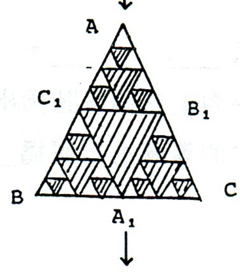
⋮



圖(一)



圖(二)



圖(三)

⋮

第n次：在T_{n-1}中的各個三角形中又分別各自拿去中間三角形的內部而得T_n；

今圓○的半徑爲$\frac{1}{1992}$，圓心在$\triangle ABC$上（邊上或內部）。試求n值爲多少時，此圓必與斜線部分相交。

問題2：（20分）

在空間中有一點P及一平面E，試作一直線L使其過P點且與平面E垂直。（寫出作法並證明）

問題3：（20分）

設數列（x_n）的定義爲

$x_1=80$，$x_2=90$，當$n\geq 3$時，$x_n=\dfrac{3x_{n-2}+2x_{n-1}}{5}$

試證明（x_n）爲收斂數列且求其極限值。

二、花蓮區複賽競試(二)

注意事項：

(1) 考試時間：10:50-11:50

(2) 配分：第1、2題各10分，第3至6題每題20分（滿分100分）

(3) 計算紙必須連同試卷紙交回。

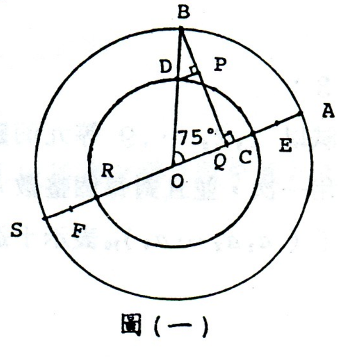
(4) 不可使用計算器。

一、填充題（請將答案填在劃線空格內）

1. 若正整數n的所有正因數的和爲$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+\cdots+3^5)(1+7+7^2)$；則$n=$______________。（10分）

2. 試求點$P(1,2,3)$與直線$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$的距離=__________。(10分)

3. 如圖(一)，兩同心圓之半徑分別爲3,5；且$\angle AOB=75°$；E，F分別爲$\overline{CA}$，$\overline{RS}$的中點；若$\overline{BQ}\perp\overline{OA}$，$\overline{DP}\perp\overline{BQ}$，則$\overline{PE}+\overline{PF}$之值=____________。(20分)



圖（一）

4. 計算 $1+C(3,2)+C(4,2)+\cdots+C(1991,2)$ 之值＝ ＿＿＿＿＿＿＿＿。（20分）

5. 已知方程式 $X^8-\frac{27}{5}X^7+\frac{177}{10}X^6-\frac{171}{5}X^5+\frac{217}{5}X^4-\frac{171}{5}X^3+\frac{177}{10}X^2-\frac{27}{5}X+1=0$ 之兩根為 $1+i$，$1+2i$；試求其它之根為 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（20分）

二、作圖題

6. 試作 $y=x-[x]$ 之圖形。（註：$[x]$ 為小於或等於 x 的最大整數）（20分）

伍、一、全國競賽決賽競試(一)

注意事項：

(1) 本試卷共三題，每題滿分15分。

(2) 考試時間：兩小時（14：00-16：00）

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題1：

試證：對於每一自然數 n，都有以（$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$）為球心，適當長為半徑之球，此球的球面及球內共含有 n 個格子點。

（空間坐標中 a,b,c 都是整數時，稱（a，b，c）為格子點）

問題2：

設 A、B、C、D、E 五個點都在球面 S 上，且知 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 F，$\overline{AE}=\overline{CE}=\overline{FE}$，試證：$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{EF}$。

問題3：

試以 1,2,…,9 等九個數字作出一個九位數（$a_1a_2\cdots a_9$）$_{10}$，每個數字恰好都用一次，並且對每個整數 k，$1\leq k\leq 9$，k 位數（$a_1a_2\cdots a_k$）$_{10}$ 都是 k 的倍數。

〔（$a_1a_2\cdots a_k$）$_{10}$ 表示十進制 k 位數〕

二、全國競賽決賽競試(二)

注意事項：

(1) 本試卷共三題，每題滿分 15 分。

(2) 考試時間：兩小時（16：20-18：20）。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題 4：設 α，β 爲實數，且知 α，β 分別滿足下列條件：

$$(\alpha-10)^5+2\alpha=35$$

$$(\beta+1)^5+2\beta=-17$$

試求出 $\alpha+\beta$ 之值。

問題 5：試求出滿足下列條件的最大 n 值：

在平面上作 n 個圓，使每一個圓的圓心都在其他（$n-1$）個圓的圓外，並且這 n 個圓的內部都有共同點。

問題 6：設 k 爲正整數，且知下列（$k+1$）個元素的集合

$T=\{1992, 1992+1, 1992+2, \cdots, 1992+k\}$

能被分割成兩個子集 A，B 並且 A 中所有元素之和等於 B 中所有元素之和；試求出所有滿足這些條件的 k 值。

三、全國競賽決賽獨立研究問題

問題 1：設 P 爲 $\triangle ABC$ 內之一點，D、E、F 分別爲 P 到 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 各邊所作垂線之垂足，求所有使 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{PD}}+\dfrac{\overline{CA}}{\overline{PE}}+\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$ 爲最小之 P 點。

問題 2：在空間中有一點 P 及一平面 E，試作一直線 L 使其過 P 點且與平面 E 垂直。（寫出作法並證明）。

問題3：設黑板已經寫上了n個數，忠明每次擦掉其中的兩個數，並寫上一個數，其規則為：若擦掉的兩數為a，b，則寫上的一個數為$\frac{a+b}{4}$。

如果一開始寫上的n個數都是1，試證：

(1) 忠明作了（$n-1$）次後，最後寫上的數必然不小於$\frac{1}{n}$。

(2) 當n為何值及如何操作忠明可以得到最後的一數為$\frac{1}{n}$？

問題4：試證任意k個實數$a_1, a_2, \cdots, a_k$，若滿足$a_1+a_2+\cdots+a_k=k^2$以及$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2=k^3$，則這$k$個實數都等於$k$。

問題5：假設$a_n=[\sqrt{8n^2+8n+4}]$，$n=1,2,\cdots$，其中$[x]$表示不大於x之最大整數。

(a) 若存在正整數k，使得$a_k=\sqrt{8k^2+8k+4}$，試證$a_{k+1}-a_k=2$。

(b) 試問存在多少個正整數m，使得$a_m=\sqrt{8m^2+8m+4}$？
又存在多少個正整數k，使得$a_k-a_{k-1}>2$？

問題6：請判定除了1以外是否還有正整數n，使得$m=1+1/2+1/3+\cdots+1/n$為整數，若有，請舉出n值；若沒有，請證明之。

問題7：設S為一集合，$|S|$表示集合S元素的個數，$m(S)$表示S所有子集合的總數（包含空集合及S本身），已知A, B, C為三個集合，且知
$m(A)+m(B)+m(C)=m(A\cup B\cup C)$，$|A|=|B|=1992$，
求$|A\cap B\cap C|$的最小值。

問題8：(1) 設 a_1,a_2,a_3,a_4；b_1,b_2,b_3,b_4 都是實數，a_1,a_2,a_3,a_4 兩兩相異，

且知
$$\begin{cases}(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_1+b_4)=1992\\(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_2+b_4)=1992\\(a_3+b_1)(a_3+b_2)(a_3+b_3)(a_3+b_4)=1992\\(a_4+b_1)(a_4+b_2)(a_4+b_3)(a_4+b_4)=1992\end{cases}$$

試證：
$$\begin{cases}(b_1+a_1)(b_1+a_2)(b_1+a_3)(b_1+a_4)=-1992\\(b_2+a_1)(b_2+a_2)(b_2+a_3)(b_2+a_4)=-1992\\(b_3+a_1)(b_3+a_2)(b_3+a_3)(b_3+a_4)=-1992\\(b_4+a_1)(b_4+a_2)(b_4+a_3)(b_4+a_4)=-1992\end{cases}$$

(2) 將(1)推廣到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$；$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 等 $2n$ 個實數；其滿足的條件及結論各應如何？

問題9：在數列

$$\left[\frac{1^2}{1991}\right],\left[\frac{2^2}{1991}\right],\left[\frac{3^2}{1991}\right],\quad\cdots\cdots\quad,\left[\frac{1991^2}{1991}\right]$$

中，有多少個不同的數？（其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數）

問題10：求和等於 1991 的正整數之積的最大值。

問題11：已知 $x_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），$n\geq 2$；且 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$

求證：$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n\geq(n-1)^n$

問題12：已知嚴格遞增的無界正數數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，求證：

(1) 存在一個正整數 k_0，使得對於一切 $k\geq k_0$ 下列不等式成立：

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$$

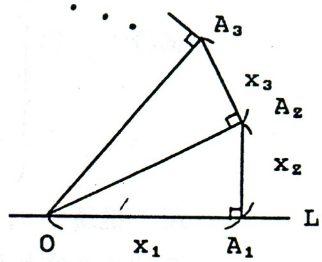
(2) 存在一個正整數 n_0，使得對於一切 $n\geq n_0$ 下列不等式成立：

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n-1992$$

四、全國競賽決賽口試

問題1：設 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ 都是正數，在給定的平面上依下列方式作有向角，如圖所示：

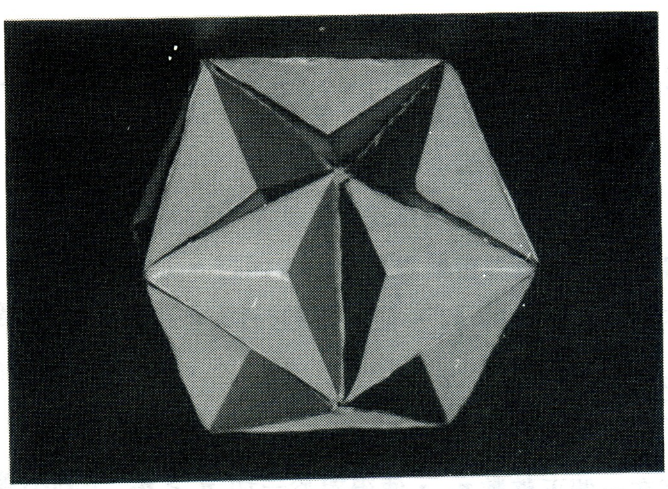
在直線 L 上先取 $\overline{OA_1} = x_1$，次作 $\overline{A_1A_2} \perp \overline{OA_1}$ 且 $\overline{A_1A_2} = x_2$，…，如此繼續作到 $\overline{A_8A_9} \perp \overline{OA_8}$ 且 $\overline{A_8A_9} = x_9$，於是 $\overrightarrow{OA_1}$ 依反時針方向依次得到 $\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \cdots, \overrightarrow{OA_9}$，共掃射出有向角



$A_1OA_9 = \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \cdots + \angle A_8OA_9$

如果 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 為 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7 這九個數的任一種排列，試求何時依上述方式掃射出的有向角為最大？何時為最小？為什麼？

問題2：這個立體模型是從二十面體演化做成的，同顏色的三角形都共面，試求兩相鄰三角形所決定平面的凸二面角。



複賽競試參考答案

壹、台北市

競試一：1. 792 個　　2. 略　　3. 略

競試二：1. 8　　2. 1/2　　3. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi a^3}{6}$

4. 17　　5. $1/k$　　6. 9

7. $\dfrac{7\sqrt{21}}{20}$　　8. 7

貳、板橋區

競試一：1. 略　　2. 略　　3. 略

競試二：1. 6：2：7　　2. 5/21　　3. 127

4. (2/5, 1/5)　　5. 57　　6. 2.45（或 a ）

叁、新竹區

競試一：1. 略　　2. 略　　3. 略

競試二：1. $\dfrac{51}{101}$　　2. 0（或：沒有）　　3. 3

4. $-n/9+10(10^n-1)/81$　　5. $20\sqrt{3}-30$

6. 72 種　　7. $\dfrac{5}{12}$

8. $p\left[\,(x_1+2x_2+3x_3)/6,\ (y_1+2y_2+3y_3)/6\,\right]$

肆、花蓮區

競試一：1. $n\geq 14$時　　2. 略　　3. $\dfrac{345}{4}$

競試二：1. 95256　　2. $\sqrt{\dfrac{349}{29}}$　　3. 10

4. $C(1992,3)$　　5. $1-i,\ 1-2i,\ \dfrac{1}{1\pm i},\ \dfrac{1}{1\pm 2i}$

6. 略