1992年亞太數學奧林匹亞試題

中華民國數學奧林匹亞委員會提供

1992年3月9日

注意事項：

(1) 時間分配：4小時

(2) 配分：每題7分，總計35分

(3) 不可使用計算器

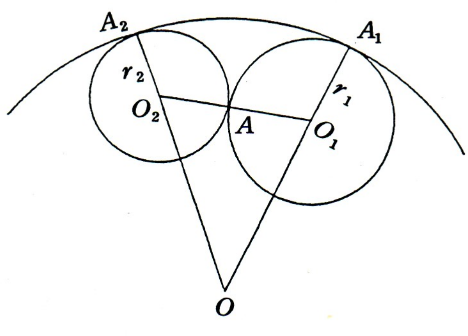
問題1：

任給一個三角形，設其三邊長為 a，b，c 而其周長的一半為 s，亦即：

$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，我們以 $s-a$，$s-b$，$s-c$ 為三邊長得出第2個三角形，依此方式得第3個三角形，第4個三角形，…，直到所出現的三數不能作為三角形的三邊長為止，試問何種三角形才能使依上述方式不斷作出三角形而不會停止？

問題2：

設圓 C 的圓心為 O 而半徑為 r，兩圓 C_1 與 C_2 的圓心分別為 O_1 與 O_2 而半徑分別為 r_1 與 r_2。若圓 C_1，C_2 分別與圓 C 內切於 A_1，A_2，而圓 C_1 與 C_2 互相外切於 A，試證三直線 OA，O_1A_2 與 O_2A_1 共點。



問題3：

設 n 是一個大於3的整數，我們從集合 $\{2,3,\cdots,n\}$ 中選出3個相異的數，將這3個數，用加或乘連結成算式，並可用括號區分加法與乘法的運算次序，但在每一個算式中選出的3個數恰好各出現一次，考慮用這種方式所得到的所有算式。

(a) 如果所選出的3個數都大於$\frac{n}{2}$，試證這樣的3個數所得到的所有算式的值都是不相等。

(b) 設p爲質數且$p \leq \sqrt{n}$。若選出的3個數中最小的是p，而由這3數所得到的所有算式的值並不完全相異。試證這樣的3個數之選法總數恰等於$p-1$的正因數之個數。

問題4：

求滿足下列性質的所有正整數形成的數對（h，s）：

在平面上先畫出h條不同的水平直線之後，再畫出具有(i)，(ii)，(iii)條件的s條不同直線：

（i）這s條直線都不是水平的，

（ii）任二條直線都不平行，

（iii）這$h+s$條直線中任意3條都不共點；

而且這$h+s$條直線將平面分成1992個區域。

問題5：

在各項都是不爲零的整數且任意連續7項之和均爲正數，而任意連續11項之和均爲負數的所有數列中，試找出一個項數最多的數列。