一九九一年第二十屆
美國數學奧林匹亞競賽試題及解答

陳昭地譯註
國立臺灣師範大學數學系

一、前　　言

本試題係譯者本人參加1991年第三十二屆國際數學奧林匹亞競試觀察活動期間（陳昭地等，民80年），美國 IMO 代表之一 Walter Mientka 博士給我國代表的一份資料。本份試題係美國數學協會（Mathematical Association of America）及美國數學競賽委員會共同編製，於1991年4月23日用作甄選美國參加第32屆國際奧林匹亞競試代表之試題，考試時間限制在3.5小時內完成。有鑑於本試題很有特色且美國自1974年開始參加國際數學奧林匹亞競試以來均名列前茅（單墫，1989）（除了1988年第29屆獲得第6名外，其餘參加各屆都在前5名內，並曾於第19屆（1977年）、第22屆（1981年）及第27屆（1986年）三屆獲得冠軍），其成績在民主國家的陣營應屬最優之國家，顯見其代表水準之高，且其國內重視此競試之程度；因而，其設計之奧林匹亞試題亦頗受世界各國參與此類競試國家之重視，最近幾屆之國際奧林匹亞試題經常有一道試題亦出自於美國數學奧林匹亞提供的試題；因此譯者經仔細研究，依照我國數學教林的術語，將此份試題及解題要點譯出，其中第2、3兩道題被採用作我國亞太數學奧林匹亞研習營模擬競試之試題，以充作國內數學資優教學之參考。

二、試　　題

問題1. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$爲$\angle B$之2倍，$\angle C$爲鈍角，其三邊長a、b、c都是整數値，試求這樣的三角形之最小周長（須證明您的答案）。

問題2.　設$A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$為由有限個相異實數組成的集合，

$$\sigma(A)=\sum_{i=1}^{n} a_i\text{，}\quad \Pi(A)=\prod_{i=1}^{n} a_i=a_1\times a_2\times\cdots\cdots\times a_n$$

試證：

$$\sum\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(k^2+2k)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$$

其中“Σ”是對$\{1,2,3,\cdots\cdots,k\}$除了空集合以外之所有子集合S求和。

問題3.　設n為任意給定的正整數，試證下列數列對n的模從某一項開始恆為定數，

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \cdots\cdots(\text{模 } n)$$

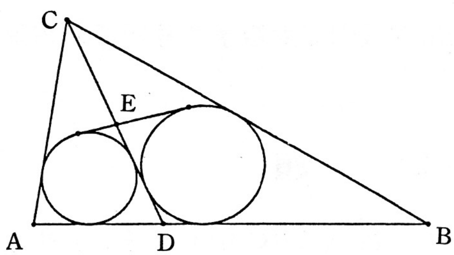
其中次方定義成 $a_1=2$，$a_2=2^2=2^{a_1}$，$\cdots\cdots$，$a_{i+1}=2^{a_i}$，$\cdots\cdots$，而數列的每一項a_i（模n）表示a_i除以n所得的餘數。

問題4.　設 $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$，（$m$、$n$都是正整數），

證明　$a^m+a^n\geqslant m^m+n^n$

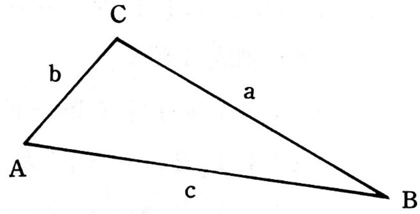
〔您可以分析$\dfrac{a^N-N^N}{a-N}$於$a\geqslant 0$及$N\geqslant 1$的整數之比值〕

問題5.　給定$\triangle ABC$，D為$\overline{AB}$邊上之任一點，E為$\triangle ACD$、$\triangle BCD$的二內切圓之外公切線與$\overline{CD}$相交於$\triangle ABC$內部的一點。試證D點在A、B二點之間變動時，E點的軌跡為一個圓弧。



三、試題解答

問題 1.解答：



【解】 $\triangle ABC$ 如圖所示：

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$$

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin(\pi-3B)}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=4\cos^2 B-1$$

$\therefore\quad \frac{c}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2-1$ 即得

(*) $a^2=b(b+c)$

$\because$ 我們想求 a、b、c 都是正整數時 $a+b+c$ 之最小值，故可令 $(a,b,c)=1$

事實上 $(b,c)=1$ 〔否則 $(a,b,c)\neq 1$ 〕

而(*)中表示 a^2 爲兩互質的正整數 b，$b+c$ 之乘積。

因此，b 及 $b+c$ 都是完全平方數，故可令

$b=m^2$，$b+c=n^2$ m，n 都是正整數且 $(m,n)=1$

$\Rightarrow\quad a=mn$

$$\frac{n}{m}=\frac{a}{b}=2\cos B$$

又$\because$ $\angle C=\pi-3\angle B$ 爲鈍角，

$\therefore\quad 0<\angle B<\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos B<1 \qquad \sqrt{3}<\frac{n}{m}<2$$

$\therefore\quad m\geqslant 4$ 且 $n\geqslant 7$

$\therefore\quad a+b+c=mn+n^2\geqslant 4\cdot 7+7^2=77$

$\therefore\quad (a,b,c)=(28,16,33)$ 即爲所求之周長最短的三角形。

問題2.解答：

【解(一)】 設 P_k 表示｛1，2，……k｝之所有非空子集合之集合族，把 P_k 中的集合分割成3類：

C_1：｛｛k｝｝（單一元素）

C_2：｛1，2，……，（$k-1$）｝之所有非空子集合之集合族

C_3：｛1，2，……，k｝中含 k 且至少含｛1，2，……，（$k-1$）｝一個元素之所有子集合之集合族

注意：C_2 恰好爲 P_{n-1}，C_3 則爲｛k｝與每一個 P_{k-1} 之元素之聯集，

於是在 $A_k=\sum_{S\in p_k}\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}$ 中可把分割成與 A_{n-1} 有關之和：

$$A_k=\sum_{S\in C_1}\frac{\sigma(s)}{\pi(s)}+\sum_{S\in C_2}\frac{\sigma(s)}{\pi(s)}+\sum_{S\in C_3}\frac{\sigma(s)}{\pi(s)}$$

$$=\frac{\sigma(\{k\})}{\pi(\{k\})}+A_{k-1}+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{k+\sigma(T)}{k\cdot\pi(T)}$$

$$=1+A_{k-1}+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{1}{\pi(T)}+\frac{1}{k}A_{k-1}$$

$$=\left(1+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{1}{\pi(T)}\right)+\frac{k+1}{k}A_{k-1}$$

本問題公式對 $k=1$ 顯然成立；利用下列關係則由歸納法可證得：

$$A_k-\frac{k+1}{k}A_{k-1}$$

$$=\left[k^2+2k-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)\right]$$

$$-\frac{k+1}{k}\left[(k-1)^2+2(k-1)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)k\right]$$

亦即

$$1+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{1}{\pi(T)}$$

$$=\left[k^2+2k-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)(k+1)-\frac{k+1}{k}\right]$$

$$-\frac{k+1}{k}\left[k^2-1-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)k\right]$$

$$=k^2+2k-\frac{k+1}{k}k^2=k$$

即證： $$1+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{1}{\pi(T)}=k$$

上式易從數學歸納法證得，亦可從下列等式推得：

$$1+\sum_{T\in P_{k-1}}\frac{1}{\pi(T)}=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{k}{k-1}=k$$

【解㈡】 利用微分法：

設 $$f(x)=\prod_{n=1}^{k}\left(1+\frac{x^n}{n}\right)$$

$$=1+\sum_{S\in P_k}\frac{x^{\sigma(S)}}{\pi(S)}$$

其中 P_k 表 $\{1,2,\cdots,k\}$ 之所有非空子集合之集合族。

則 $$f'(x)=\sum_{S\in P_k}\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}x^{\sigma(S)-1}$$

欲計算 $f'(1)$ （即爲本問題之公式）：

先取對數： $$\log f(x)=\sum_{n=1}^{k}\log\left(1+\frac{x^n}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{x^{n-1}}{1+\frac{x^n}{n}}$$

$$\therefore \quad \sum_{S\in P_k} \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = f'(1) = f(1)\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{k}\frac{n+1}{n}\right)\quad\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= (k+1)\sum_{n=0}^{k}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

其餘作法如解法(一)。

註：本題在中華民國亞太數學奧林匹亞研習營模擬競試中，71位學生中有13位作得比較好，其餘58位都非常不理想，有53位得0分，僅有10位得到6分或7分（滿分），總平均值1.31分，平均得分率爲0.19。

問題3.解答：

【解】 利用數學歸納法證明：

(1) $n=1$ 顯然成立。

(2) 設對每一個比 n 小的正整數都成立，欲證對 n 亦成立。將 n 寫成 $2^k q$，其中 q 爲奇數。

注意：由中國剩餘定理可知：一數列對 $mod\ 2^k$ 爲常數，且對 $mod\ q$ 亦爲常數時，則對 n 之模亦爲常數。

由於 $a_i \equiv 0 \ (mod\ 2^k)$（$i$ 足夠大時）

僅須證明 $a_i\ (mod\ q)$ 當 i 足夠大時亦爲常數即可。

若 $q=1$ 顯然成立；故當 $q>1$ 之奇數時，有一個正整數 $r<q$ 使得

$2^r \equiv 1\ (mod\ q)$

〔事實上，由 *Euler* 定理知，$\phi(q)$ 表 $\leq q$ 之所有與 q 互質之正整數個數時

$2^{\phi(q)} \equiv 1\ (mod\ q)$。〕

$\because\ r<q\leq n$， $a_i\ (\bmod r)$ 在 i 足夠大時爲常數

又$\because\ 2^r\equiv 1\ (\bmod q)$

$\therefore\ a_i\equiv a_j\ (\bmod r)\Rightarrow a_i=a_j+rt$ （可令 $i>j$ ）

$$2^{a_i}=2^{a_j}(2^r)^t\equiv 2^{a_j}\ (\bmod q)$$

$\therefore\ 2^{a_i}\ (\bmod q)$ 在 i 足夠大時爲常數，另由

$< a_{i+1} > = < 2^{a_i} >$ 故本題得證。

註：(1) 當 q 爲奇數且 $q>1$ 時，可不必利用 *Euler* 定理，依下列方式找出正整數 $r<q$ 使得

$$2^r\equiv 1\ (\bmod q):$$

$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{q-1}$，這 q 個數 $(\bmod q)$ 得 $1,\ 2,\ \cdots,(q-1)$ 中之一值，由鴿籠原理，知有 $0\leq i<j\leq q-1$ 使得

$$2^i\equiv 2^j\ (\bmod q)$$

此時 $2^j-2^i=2^i(2^{j-i}-1)\equiv 0\ (\bmod q)$

$\Rightarrow\ 2^{j-i}\equiv 1\ (\bmod q)$ 〔$\because\ (2^i,q)=1$〕

取 $r=j-i$ 即得 $2^r\equiv 1\ (\bmod q)$

(2) 本題在中華民國亞太數學奧林匹亞研習模擬競試中僅有4位學生答得比較好，71位學生中有53位得0分，沒有得滿分者，總平均值僅得0.55，得分率爲0.08；顯示培養國內數學資優生參與國際數學競試亟需在數論方面加強訓練。

問題4.解答：

【解】 設N爲正整數且 $a\neq N$，則

$$\frac{a^N-N^N}{a-N}=a^{N-1}+a^{N-2}N+\cdots+aN^{N-2}+N^{N-1}$$

當 $0\leq a<N$ 時，上式右邊每一項都不大於 N^{N-1}，故知

$$\frac{a^N-N^N}{a-N}\leq N^N \quad (*)$$

同理，當 $a>N$ 時，則得

$$\frac{a^N-N^N}{a-N}\geqslant N^N \quad (**)$$

因此由 (*) 及 (**)，可得

$$(***) \quad a^N-N^N\geqslant(a-N)N^N$$

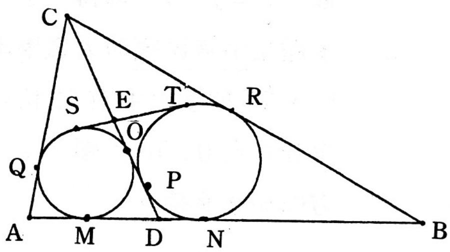
上式即使 $a=N$ 亦成立。即 (***) 對 $a\geqslant 0$ 恆成立。
利用 (***) 可導得吾人欲證之不等式：

$$\begin{aligned}(a^m+a^n)-(m^m+n^n)&=(a^m-m^m)+(a^n-n^n)\\&\geqslant(a-m)m^m+(a-n)n^n\\&=a(m^m+n^n)-(m^{m+1}+n^{n+1})\\&=0\end{aligned}$$

得證 $a^m+a^n\geqslant m^m+n^n$

問題5.解答：

【解】 利用直尺與圓規實際作圖（取不同的 D 點）可窺出 E 點在以點 C 爲圓心之圓弧上。



下面我們可證得當 D 在 A、B 間變動時 $\overline{CE}$ 之長恆爲定值

$$\overline{CE}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB}-\overline{AB})$$

如圖 M, N, P, O, S, T 都是切點，則由

$$\overline{CE}=\overline{CO}-\overline{EO}=\overline{CQ}-\overline{SE}$$

又 $\overline{CE}=\overline{CP}-\overline{EP}=\overline{CR}-\overline{ET}$

上二式相加得：

$$
\begin{aligned}
2\,\overline{CE} &= \overline{CQ}+\overline{CR}-(\ \overline{SE}+\overline{ET}\ )\\
&=(\ \overline{CA}-\overline{QA}\ )+(\ \overline{CB}-\overline{RB}\ )-\overline{ST}\\
&=(\ \overline{CA}-\overline{AM}\ )+(\ \overline{CB}-\overline{NB}\ )-\overline{MN}\\
&=(\ \overline{CA}+\overline{CB}\ )-(\ \overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NB}\ )\\
&=\overline{CA}+\overline{CB}-\overline{AB}
\end{aligned}
$$

即 $\overline{CE}=\dfrac{1}{2}(\ \overline{CA}+\overline{CB}-\overline{AB}\ )$，故得證

參考資料

1. 陳昭地等（民80年），第三十二屆國際數學奧林匹亞年會，科學教育月刊，142期（80年9月），8-12。
2. 單墫（1989），數學競賽史話，廣西出版社1989年10月出版。

（上承第3頁）

5. Helmstadter, G. C. (1970). Research concepts in human Behavior : education psychology, sociology, New Jersy : Prentice-Hall.
6. Hempel, C. G. (1966). Philosophy of Natural Science, New Jersy : Prentic Hall.
7. Kuhn, T. S. (1970). The Structure of Scientific Revolutions, Chicago : University of Chicago, Press.
8. McCain, G. & Segal, E. M. (1973). The Game of Science, Montery, CA : Books / cole publishing Co.
9. Snow, C. P. (1964). The two cultures : And a second look, London : Cambridge university press.
10. Van Dalen D. F. (1979). Urderstanding Educational Research. 4th Ed. New York : McGraw-Hill Book Co.
11. Zieman, J. (1980). What is science ? In Klemte E. D. et. al. Introductory Readings in the philosophy of Science, Promethens Books, U. S. A.