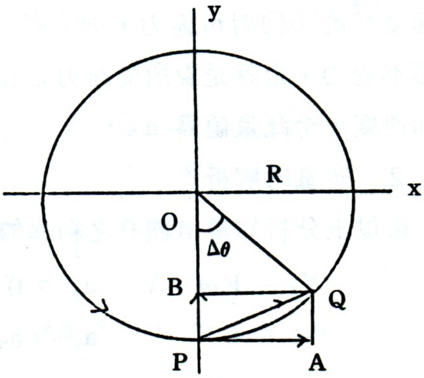
圓周運動之解析

林朝宗
台北市立建國高中

圓週運動是運動學中的一個重要課題，例如人造衛星和行星的運動，簡諧震動以及日常生活中所見到的各種轉動都與它有着密切關係。這裏要介紹幾種教科書以外的處理方法，給研究基礎物理的同學參考。



圖一

等速率圓週運動的幾個基本物理量：

設在 xy 面上有一圓， 圓心在原點，半徑爲 R 如圖一所示。一質點 m 在圓週上沿逆時針方向等速率繞轉。爲了敍述方便需定義以下各物理量：

1. 週期 T，即繞轉一週所需時間，單位爲秒。

2. 頻率 f ，即每秒繞轉的週數，單位爲赫（Hz），$\therefore f=\dfrac{1}{T}$。

3. 角速度 ω，即每秒繞轉的角量，單位爲弧度／秒（rad/s），因此若在 Δt 秒繞轉 $\Delta\theta$ 弧度，則 $\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=$ 常量，當 $\Delta t=T$ 則 $\Delta\theta=2\pi$ $\therefore \omega=2\pi/T=2\pi f$。

切線速度 $\overrightarrow{V}$

設 m 從 P 跑到 Q 歷時 Δt 而 $\angle POQ=\Delta\theta$ ，則 $\Delta\theta=\omega\Delta t$ 則 m 經 P 之瞬時速度爲

$$\overrightarrow{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}$$

但當 $\Delta t\to 0$ 時，$\overline{PQ}\to\widehat{PQ}=R\Delta\theta=R\omega\Delta t$

$$\therefore\ |\overrightarrow{V}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\omega\Delta t}{\Delta t}=R\omega=R2\pi/T=R2\pi f \quad \cdots\cdots (1)$$

$\angle OPQ=\angle OQP$，且 $2\angle OPQ+\Delta\theta=\pi$，當 $\Delta t\to 0$ 時 $\Delta\theta\to 0$，因此當 $\Delta t\to 0$ 時 $\angle OPQ=\pi/2$，即 $\vec{V}\perp\overline{PO}$，由此可知任一刹那 m 之速度恒在切線上，量值則由(1)所示。

等速率圓周運動的加速度 $\vec{a}$ —— 即向心加速度

1. 定性的解析：m 既非靜止也不做等速度直線運動，故 m 所受之淨力必不爲 0，由 $\vec{F}=m\vec{a}$ 可知必有加速度，若順著速度 $\vec{V}$ 的方向對 m 施力，則速率必變快，反之如果逆著速度 $\vec{V}$ 的方向對 m 施力，則速率必變慢，m 的速率既然保持不變，即表示在切線方向上必不受力，也就是說所受淨力必在半徑方向，故加速度 $\vec{a}$ 的方向必指向圓心，稱爲向心加速度，令此量值爲 a_N。

2. 定量的解析：

由以上分析知當 m 經 P 之刹那的速度加速度爲

$$V_x=R\omega=V \qquad a_x=0$$

$$V_y=0 \qquad a_y=a_N \quad \text{當 } \Delta t\to 0 \text{ 時}$$

$$\Delta x=\overline{PA}=V\Delta t=R\omega\Delta t \ (\because \Delta t\to 0 \text{ 故可視爲等速率})$$

$$\Delta y=\overline{PB}=\frac{1}{2}a_N\Delta t^2 \ (\because \Delta t\to 0 \text{ 故可視爲等加速度})$$

由圖一可以看出 $\overline{OB}^2+\overline{BQ}^2=R^2 \quad \overline{OB}=R-\overline{PB}$

$$\therefore \ (R-\frac{1}{2}a_N\Delta t^2)^2+(V\Delta t)^2=R^2$$

$$\therefore \ -Ra_N\Delta t^2+\frac{1}{4}a_N^2\Delta t^4+V^2\Delta t^2=0 \ (\Delta t\to 0 \text{ 但 } \Delta t\neq 0)$$

$$\therefore \ -Ra_N+V^2+\frac{1}{4}a_N^2\Delta t^2=0 \quad \text{但 } \Delta t\to 0$$

$$\therefore \ a_N=V^2/R=\omega^2 R \tag{2}$$

此即等速率圓周運動之加速度——向心加速度。

變速率圓週運動的加速度

由以上分析可知當 m 之速率不爲常量時，在切線方向必有加速度，設其爲 a_T，則 m 經 P 之刹那的速度加速度爲：

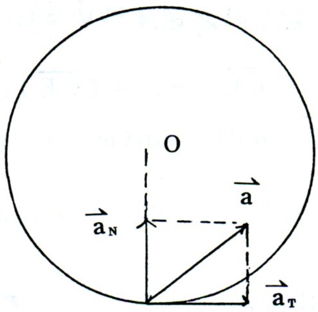
$V_x = V = R\omega$（V，ω 都不再爲常量）

$a_x = a_T$（$a_T > 0$ 表V在變快，$a_T < 0$ 表V在變慢）

$V_y = 0 \quad a_y = a_N$ 當 $\Delta t \to 0$ 時

$$\Delta x = \overline{PA} = V\Delta t + \frac{1}{2}a_T\Delta t^2$$

$$\Delta y = \overline{PB} = \frac{1}{2}a_N\Delta t^2$$



圖二

$$\therefore \quad (R - \frac{1}{2}a_N\Delta t^2)^2 + (V\Delta t + \frac{1}{2}a_T\Delta t^2)^2 = R^2$$

$$\therefore \quad -Ra_N\Delta t^2 + \frac{1}{4}a_N^2\Delta t^4 + V^2\Delta t^2 + Va_T\Delta t^3 + \frac{1}{4}a_T^2\Delta t^4 = 0$$

$$-Ra_N + V^2 + \frac{1}{4}a_N^2\Delta t^2 + Va_T\Delta t + \frac{1}{4}a_T^2\Delta t^2 = 0 \text{ 但 } \Delta t \to 0$$

$$\therefore \quad a_N = V^2/R = \omega^2 R \text{（V，}\omega\text{ 都不爲常量）} \quad (3)$$

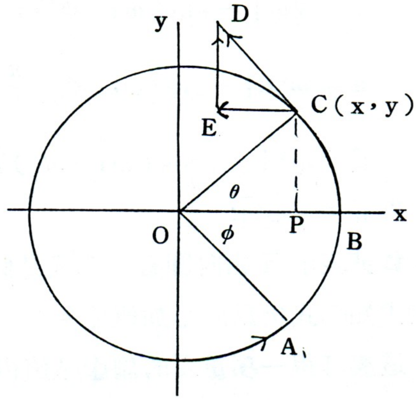
即等速率圓週運動與變速率圓週運動之向心加速度形式相同，但前者 a_N 爲常量，後者 a_N 隨時間而變。

變速率圓週運動之淨加速度爲 $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ 見圖二。

a_T 由切線方向之淨力與m之質量所決定，與V或 ω 都無關係。a_N 則由(2)或(3)所決定，與V，R，ω 有關。

等速率圓週運動之加速度的第二種求法：

設m繞經A時 $t = 0$，又經t秒抵 C(x，y) 如圖三所示，則 $\angle AOC = \omega t$，令 $\angle COP = \theta$，$\angle POA = \phi$ 則 $\theta = \omega t - \phi$，$\vec{R} = \overrightarrow{OC}$，x，y 方向之無因次單位向量以 $\hat{i}$，$\hat{j}$ 表示則



圖三

$\overrightarrow{R}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}=R(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})$　或

$$\overrightarrow{R}=R[\cos(\omega t-\phi)\hat{i}+\sin(\omega t-\phi)\hat{j}] \tag{4}$$

其中R，ω，ϕ 皆爲常量，

設m經C時之速度爲 $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{CD}$，則 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{R}$，且 $CD=R\omega$，$\angle CDE=\theta$，

$\therefore\ \overrightarrow{V}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=(\overline{CE})(-\hat{i})+(\overline{ED})\hat{j}=\omega R(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j})$

即 $$\overrightarrow{V}=\omega R[-\sin(\omega t-\phi)\hat{i}+\cos(\omega t-\phi)\hat{j}] \tag{5}$$

但 $\cos(\theta+\pi/2)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$ 故(5)可改爲

$$\overrightarrow{V}=V[\cos(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})\hat{i}+\sin(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})\hat{j}]$$

令 $\phi-\frac{\pi}{2}=\phi'$ 則

$$\overrightarrow{V}=V[\cos(\omega t-\phi')\hat{i}+\sin(\omega t-\phi')\hat{j}] \tag{6}$$

其中V，ω，ϕ' 都是常量，由定義

$$\overrightarrow{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{R}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{dR}}{dt}\qquad \overrightarrow{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{V}}{\Delta t}=\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$$

比較(6)、(4)知其形式相同，而(4)之導函數爲(5)，故知(6)之導函數 $\overrightarrow{a}$ 必與(5)之形式相同，故得

$$\overrightarrow{a}=V\omega[-\sin(\omega t-\phi')\hat{i}+\cos(\omega t-\phi')\hat{j}]$$

$$\overrightarrow{a}=\omega^2R[-\sin(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})\hat{i}+\cos(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})\hat{j}]$$

$$\overrightarrow{a}=\omega^2[-R\cos(\omega t-\phi)\hat{i}-R\sin(\omega t-\phi)\hat{j}]$$

即 $$\overrightarrow{a}=-\omega^2\overrightarrow{R} \tag{7}$$

負號表示 $\overrightarrow{a}$ 指向圓心。(7)式是假定ω爲常量導出，故當ω不爲常量時此法無效，但由(3)式知(7)式仍爲向心加速度。

這裏可得一項重要的副產品值得一提；

(4)式可改爲

$\overrightarrow{R}=R(\cos\omega t-\phi)\hat{i}+R\cos(\omega t-\phi)\hat{j}=x\hat{i}+y\hat{j}$ 即

$$x=R\cos(\omega t-\phi)\qquad y=R\sin(\omega t-\phi) \tag{4$'$}$$

(5)式可改為

$$\vec{V} = -\omega R\sin(\omega t-\phi)\hat{i} + \omega R\cos(\omega t-\phi)\hat{j} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} \text{ 即}$$

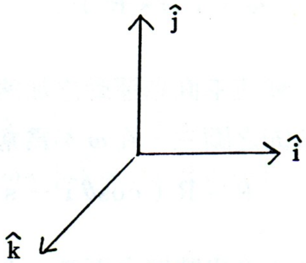
$$V_x = -\omega R\sin(\omega t-\phi) \qquad V_y = \omega R\cos(\omega t-\phi) \tag{5'}$$

但由定義 $V_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$，$V_y = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt}$

$$\therefore \frac{d[R\cos(\omega t-\phi)]}{dt} = -\omega R\sin(\omega t-\phi) \tag{7}$$

$$\frac{d[R\sin(\omega t-\phi)]}{dt} = \omega R\cos(\omega t-\phi) \tag{8}$$

(7)、(8)式為餘弦正弦函數的導數公式，其他四個三角函數之導數皆可依類似方法求出，或由(7)(8)式再利用微分基本公式求得。



圖四

等速率圓週運動之加速度的第三種求法

令 z 方向之無因次單位向量為 $\hat{k}$，採用右手坐標係，即如圖四所示，則

$-\hat{i} = \hat{k}\times\hat{j}$，$\hat{j} = \vec{k}\times\hat{i}$ (5)式即可改為

$$\vec{V} = \omega R\sin(\omega t-\phi)\hat{k}\times\hat{j} + \omega R(\cos\omega t-\phi)\hat{k}\times\hat{i}$$

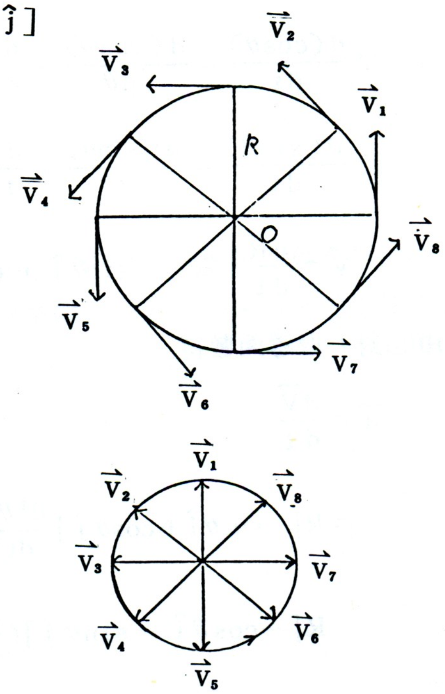
$$\vec{V} = \hat{k}\omega\times[R\cos(\omega t-\phi)\hat{i} + R\sin(\omega t-\phi)\hat{j}]$$

$$\vec{V} = \hat{k}\omega\times\vec{R} = \vec{\omega}\times\vec{R} \tag{9}$$

其中 $\vec{\omega} = \hat{k}\omega$

(9)式的意思是說：

當m在半徑R之圓週上以某角速度 ω 逆時針繞轉時，m相對於圓心之位置向量 $\vec{R}$ 即以 ω 之角速度同步旋轉，在此情形下，角速度可用向量 $\vec{\omega}$ 表示，$\vec{\omega}$ 之量值為 ω，方向為：當m在紙面上逆時針方向繞轉時，$\vec{\omega}$ 垂直紙面向外，若順時針繞轉，則 $\vec{\omega}$ 垂直紙面向內。故 $\vec{R}$ 之時變率亦即m之瞬時速度 $\vec{V}$ 等於 $\vec{\omega}$ 與 $\vec{R}$ 之外積。也可以說，當一個向量之值保持不變但其方向以 $\vec{\omega}$



圖五

之角速度在變時，此向量之時變率爲角速度與該向量之外積。

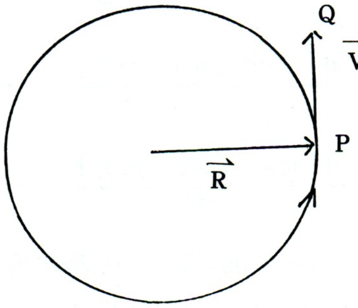
當m在圓週上繞轉時若瞬時速度$\vec{V}$之量值保持不變，則$\vec{V}$與$\vec{R}$以相同之角速度$\vec{\omega}$同步繞轉，故$\vec{V}$之時變率即$\vec{a}$，爲$\vec{\omega}$與$\vec{V}$之外積：

$$\therefore \vec{a}=\vec{\omega}\times\vec{V}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) \tag{10}$$

在圖六中，m逆時針繞轉，故$\vec{\omega}$垂直紙面向外，m經P之瞬時速度爲$\overrightarrow{PQ}$，故$\vec{\omega}\times\overrightarrow{PQ}$在$-\vec{R}$方向，即$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$指向圓心，量值仍爲$\omega^2 R$，

在非等角速度之情形下此法無效，但由(3)式可知(10)式仍爲向心加速度。

即 $a_N=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$



圖六

變速率圓週運動之加速度的另一種求法：

依(五)之圖三，在ω不爲常量時，(4)式已不適用，但可改爲：

$$\vec{R}=R(\cos\theta\,\hat{i}-\sin\theta\,\hat{j}) \tag{11}$$

其中θ爲時間之函數，令 $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$

$$\because \frac{d(\cos\theta)}{dt}=\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-\omega\sin\theta$$

及 $\dfrac{d(\sin\theta)}{dt}=\dfrac{d(\sin\theta)}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\omega\cos\theta$ 故把(11)式對 t 微分得

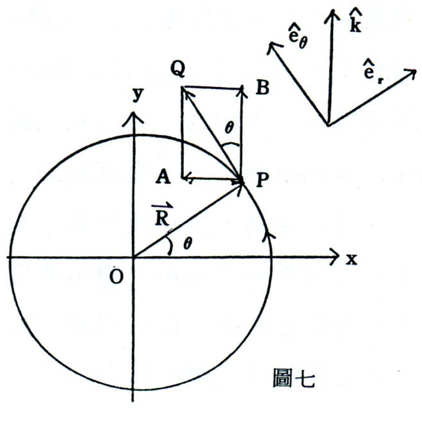
$$\vec{V}=\frac{d\vec{R}}{dt}=R(-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j})\frac{d\theta}{dt}=R\omega(-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}) \tag{12}$$

由(12)對 t 取導函數得

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$=R[-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}]\frac{d^2\theta}{dt^2}+$$

$$R[-\cos\theta\,\hat{i}-\sin\theta\,\hat{j}](\frac{d\theta}{dt})^2$$



圖七

在圖七中，$\vec{R}=\overrightarrow{OP}$ 令 $\hat{e}_r=\frac{\vec{R}}{R}=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}$

$$\hat{e}_\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}}{PQ}=\frac{\overline{PA}(-\hat{i})+\overline{PB}\,\hat{j}}{\overline{PQ}}=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}$$

由圖可以看出 $\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$ 分別為向徑及切線方向之無因次單位向量，但是

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega\text{，}\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}\qquad\therefore\ \vec{a}=R\frac{d\omega}{dt}\hat{e}_\theta+R\omega^2(-\hat{e}_r)$$

其中 $R\frac{d\omega}{dt}\hat{e}_\theta=\vec{a}_T$，即切線加速度，是由角速度的量值隨時間而變所引起的，當 ω 為常量時，$\frac{d\omega}{dt}=0$ 即 $\vec{a}_T=0$，$R\omega^2(-\hat{e}_r)=\vec{a}_N$，即向心加速度，負號表示 $\vec{a}_N$ 方向指圓心，是由於m的運動方向改變所引起的。

由圖七可知 $\hat{k}=\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta$，且 $\hat{k}\times\hat{e}_r=\hat{e}_\theta$ $\therefore\ \hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{e}_r)=-\hat{e}_r$

$$\therefore\ \vec{a}_N=R\omega^2(-\hat{e}_r)=R\omega^2[\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{e}_r)]=\hat{k}\omega\times[\hat{k}\omega\times(R\hat{e}_r)]$$

$$\therefore\ \vec{a}_N=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})\tag{13}$$

(13)與(10)形式相同，但(10)中 $\vec{\omega}$ 之量值不變即等角速率，(13)中 $\vec{\omega}$ 的量值隨時間而變，故變速率圓週運動之加速度可寫為

$$\vec{a}=R\frac{d\omega}{dt}\hat{e}_\theta+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})=\vec{a}_T+\vec{a}_N$$

總結：

由以上分析可以看出同一物理問題常有各種不同的解法，運用之妙存乎一心，讀者儘可按照一己的想法去嘗試其他各種解法，研習基礎物理過程中，這種工作極為重要，也是趣味無窮！