

一九九一年第三十二屆

國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

陳昭地

國立臺灣師範大學數學系

一、前言

一九九一年第三十二屆 IMO 參與國共向主辦國瑞典提交了 150 多道試題，選題委員會從中初步選出 30 道題，然後經由第三十二屆 IMO 選題會議中，透過審慎討論挑出 6 道題當作二天的正式考題。基本上本屆的熱門試題仍然在幾何、數論、組合理論等方面，不過這屆比較特殊是最後選出一個比較少見的分析問題，當然也就成為本屆之最難題；本文的目的就筆者參與觀察第三十二屆 IMO 競賽收集到的成績資料 [Samulesson, 1991; 陳昭地等, 民 80 年] 加以統計，並對本屆之 6 道試題 [陳昭地, 民 80 年] 提出解答及作簡要評析，以供參考。

二、第三十二屆 IMO 成績資料統計

茲依據主辦國公布之第三十二屆 IMO 56 個參與競試國家 312 位學生之競賽成績，參考第三十一屆 IMO 之統計方式 [Zhang and Guo, (1991)]，列表如下：

表 1 第三十二屆 IMO 全部參賽學生之成績統計表
人數 312，國家數 56

題次 項目	一	二	三	四	五	六	總計
平均得分	3.80	4.22	2.56	3.13	3.80	1.81	19.31
得分率	0.54	0.60	0.37	0.45	0.54	0.26	0.46
標準差	3.09	2.77	2.07	3.03	3.07	2.60	12.39
變異係數	81%	66%	81%	97%	81%	144%	64%
難度指數	0.54	0.55	0.38	0.49	0.57	0.37	
鑑別指數	0.80	0.85	0.51	0.82	0.84	0.68	

- 說明：(1) 每題滿分 7 分，得分率為平均得分除以 7 取到小數後第二位之近似值。
- (2) 難度指數為高分組（81 位）與低分組（87 位）得分率之平均值，鑑別指數則為其差值，從本表中，可知一、二、四、五之鑑別指數頗高（都在 0.80 以上），另二道題亦高。
- (3) 由表 1 知難度指數與得分率除第六題外，均頗接近；不論從這二個數據的任一值，均可知本屆 IMO 試題由易而難之次序為二、五、一、四、三、六，即第二道題最簡單而第六道題最難。
- (4) 全部參賽生各題之得分情況變異係數都很大，尤其是第六道題，顯示水準差異頗大。

表 2 金牌、銀牌、銅牌獎分組成績統計表：

表 2(a) 金牌獎（人數 20，成績 ≥ 39 ）

題次 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	7.00	6.95	6.20	6.90	7.00	6.90	40.95
得 分 率	1.00	0.99	0.89	0.99	1.00	0.99	0.98
標 準 差	0.00	0.22	1.20	0.45	0.00	0.31	1.15
變異係數	0.00	0.03	0.19	0.10	0.00	0.07	0.26

表 2(b) 銀牌獎（人數 51； $39 > \text{成績} \geq 31$ ）

題次 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	6.55	6.78	3.94	6.12	6.86	4.92	35.18
得 分 率	0.94	0.97	0.56	0.87	0.98	0.70	0.83
標 準 差	1.45	0.81	1.41	1.76	0.53	2.50	2.42
變異係數	22%	12%	36%	29%	8%	51%	8%

表 2 (c) 銅牌獎 (人數 84, $31 > \text{成績} \geq 19$)

題次 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	5.06	5.83	3.06	3.96	5.04	1.38	24.33
得 分 率	0.72	0.83	0.44	0.57	0.72	0.20	0.58
標 準 差	2.74	1.71	1.68	2.79	2.74	2.02	3.44
變異係數	54 %	29 %	55 %	70 %	54 %	146 %	14 %

- 說明：(1) 由上表 2 (a)顯示金牌獎之得分率幾乎不能有任何差錯，六題中至多僅能被扣 3 分，非常不容易，顯示其水準頗高。
- (2) 在個人獎方面蘇聯與中國大陸都得到四金二銀的佳績，技冠群雄，羅馬尼亞三金三銀次之。
- (3) 金、銀二獎主要的關鍵是在於第三、六兩道難題，差異頗大。銅牌獎在第六道題與前二獎差異更是頗為懸殊。
- (4) 金牌獎之水準學生程度頗齊，銀牌獎者在第三、六題兩題差異稍高；銅牌獎者除第二道題外，其餘之差異均大，第六題尤大。
- (5) 上屆金牌獎的得分標準為 34 分，銀牌獎為 23 分，銅牌獎為 16 分；本屆題目較簡單，得獎標準提高許多，另外值得一提的蘇聯一位女代表含今年在內已連獲三屆金牌，這二屆都得滿分 (42 分) 真是女中奇才。

表 3 1990 IMO (第三十一屆) 成績資料統計表 [Zhang and Guo, (1991)]

表 3 (a) 人數 308，國家數 54

題次 項目	1	2	3	4	5	6
平均得分	2.88	3.54	2.10	2.96	4.20	1.50
標 準 差	2.75	2.68	1.68	2.42	2.49	1.87
變異係數	95 %	76 %	80 %	82 %	59 %	125 %
難度指數	0.41	0.51	0.30	0.42	0.60	0.22
鑑別指數	0.77	0.74	0.68	0.79	0.78	0.71

說明：表 3 (a)之難度指數相當於表 1 中之得分率。

表 3(b) (1990) 前十名國家成績資料統計表

名次	國家	問題一		問題二		問題三		問題四		問題五		問題六		總計	
		總分	平均分	總分	平均分	總分	平均分	總分	平均分	總分	平均分	總分	平均分	總分	平均分
1.中	國	42	7.00	42	7.00	35	5.83	42	7.00	40	6.67	29	4.83	230	38.33
2.蘇	聯	26	4.33	38	6.33	26	4.33	35	5.83	40	6.67	28	4.67	193	32.17
3.美	國	23	3.83	38	6.33	20	3.33	37	6.17	39	6.50	17	2.83	174	29.00
4.羅馬尼亞		37	6.17	32	5.33	26	4.33	30	5.00	35	5.83	11	1.83	171	28.50
5.法	國	30	5.00	34	5.67	22	3.67	38	6.33	24	4.00	20	3.33	168	28.00
6.匈牙利		33	5.50	34	5.67	18	3.00	19	3.17	36	6.00	22	3.67	162	27.00
7.東德		22	3.67	33	5.50	14	2.33	38	6.33	39	6.50	12	2.00	158	26.33
8.捷克		17	2.83	38	6.33	10	1.67	31	5.17	38	6.33	19	3.16	153	25.50
9.保加利亞		36	6.00	33	5.50	23	3.83	17	2.83	34	5.67	9	1.50	152	25.33
10.英	國	30	5.00	21	3.50	20	3.33	26	4.33	30	5.00	14	2.33	141	23.50
平均			4.93		5.72		3.57		5.22		5.92		3.02		28.37
總平均(全體)			2.88		3.54		2.09		2.96		4.20		1.50		12.97

說明：(1) 表 3(a)跟表 1 比較清顯示 1990 第三十一屆 IMO (中國大陸為主辦國) 試題較難。

(2) 由表 3(b)及表 4(b)(參見次頁)可知有七個國家躋聯前十名：捷克、法國及英國在 1991 年第 32 屆 IMO 中被擠出前十名，法國從第 5 名退列到第 13 名，英國從第 10 名退到第 18 名，而捷克由第 8 名退到第 11 名；然而越南由第 22 名躍升為第 8 名 [Chinese M.O.Committee, (1990)] 進步最大。

表4 1991 IMO 前十名國家成績統計表

名次	國家	問題一		問題二		問題三		問題四		問題五		問題六		平均分數
		總分	平均分數	總分	平均分數	總分	平均分數	總分	平均分數	總分	平均分數	總分	平均分數	
1.	蘇聯	40	6.67	42	7.00	34	5.67	42	7.00	41	6.83	42	7.00	40.17
2.	中國	42	7.00	42	7.00	31	5.17	42	7.00	42	7.00	32	5.33	38.50
3.	羅馬尼亞	42	7.00	42	7.00	27	4.50	40	6.67	42	7.00	32	5.33	37.50
4.	西德	28	4.67	36	6.83	33	5.50	42	7.00	42	7.00	36	6.00	37.00
5.	美國	42	7.00	42	7.00	20	3.33	38	6.33	39	6.50	31	5.17	35.33
6.	匈牙利	42	7.00	36	6.00	30	5.00	35	5.83	42	7.00	24	4.00	34.83
7.	保加利亞	42	7.00	42	7.00	22	3.67	30	5.00	41	6.83	15	2.50	32.00
8.	伊朗	36	6.00	39	6.50	21	3.50	32	5.33	39	6.50	24	4.00	31.83
9.	越南	42	7.00	42	7.00	15	2.50	31	5.17	42	7.00	19	3.17	31.83
10.	印度	36	6.83	36	6.00	22	3.67	31	5.17	42	7.00	15	2.50	31.17
平均			6.62		6.73		4.25		6.05		6.87		4.50	35.02
總平均			3.80		4.22		2.56		3.13		3.80		1.81	19.31

說明：由表4顯示前十名之水準頗高。

三、試題解答與評析

以下針對每個問題（陳昭地，民 80 年）提出解答並作簡要評析。

問題 1.:

在給定 $\triangle ABC$ 中，設 I 為其內心， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的內角平分線分別交其對邊於 A' 、 B' 、 C' 。試證：

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27} \quad (\text{蘇聯})$$

[解]

設 $a = BC$ ， $b = AC$ ， $c = AB$

在 $\triangle AC'C$ 中，

$$\because \overline{AI} \text{ 平分 } \angle A \quad \therefore \frac{IC'}{CI} = \frac{AC'}{b}, \text{ 同理 } \frac{IC'}{CI} = \frac{BC'}{a} \quad \therefore c = AC' + C'B = (a+b) \frac{IC'}{CI}$$

$$\therefore \frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c} \quad \text{同理 } \frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}, \frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c}$$

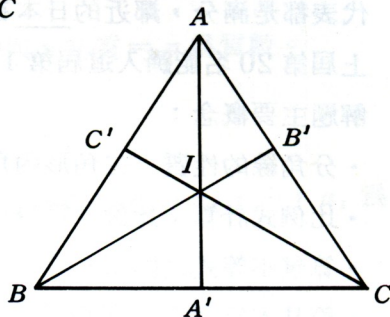
利用算幾不等式得

$$\frac{1}{3} \left(\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

$$\text{即 } \left(\frac{2}{3} \right)^3 \geq \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \quad \therefore \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27} \dots\dots\dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{另由 } \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \\ &= \frac{(p+x)(p+y)(p+z)}{8p^3} \begin{pmatrix} p = a+b+c, y = b+c-a \\ x = a+b-c, z = c+a-b \end{pmatrix} \\ &> \frac{p^3 + (x+y+z)p^2}{8p^3} = \frac{p^3 + p^3}{8p^3} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

由 (*), (**) 得證。



評析：

1. 本題出自於蘇聯 IMO，依選題委員會之預估，本題應為簡易題，其結果全體平均分數 3.80，得分率 0.54，略低於第 2 題。
2. 本題共 131 位 (42%) 得滿分，並有中國大陸、羅馬尼亞、美國、匈牙利、保加利亞、越南 六個國家得到滿分，原設計國蘇聯除了有 2 位代表各扣 1 分外，其餘代表都是滿分，鄰近的日本在本題的得分亦頗突出跟蘇聯相當，此可能為日本從上屆第 20 名能躋入這屆第 12 名的原因。

3. 解題主要概念：

- 分角線的性質：三角形內角平分線分對邊之比等於兩鄰邊之比
- 比例式計算：比例計算得出 $AI:AA'$ ， $BI:BB'$ 及 $CI:CC'$ 之比
- 算幾不等式之應用 (*)
- 簡易不等式之計算 (**)

4. 討論：

• $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ 很容易聯想到“重心”的問題

- 等號何時會成立？何時內心、重心為同一點？自然會想到是正三角形
- 在 (*) 算幾不等式之計算，亦易知等號成立之條件為 $a=b=c$ 即為正三角形
- (**) 之計算使用式子之代換，可簡化不等式之計算；國內學生可能較多使用直接比較：

$$\begin{aligned} & 4(b+c)(c+a)(a+b) - (a+b+c)^3 \\ &= 4\{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc\} \\ & \quad - \{a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) + 3c^2(a+b) + 6abc\} \\ &= a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) + 2abc > 0 \end{aligned}$$

- 本題代數計算能力較重於幾何知識

問題 2：

設 n 為大於 6 的整數，且 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 為小於 n 且與 n 互質的所有自然數，如果 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0$ ，試證 n 必為質數或者為 2 的某個正整數次方。
(羅馬尼亞)

[解]

設 p 為不能整除 n 的最小質數，則 $p \geq 2$ 且

$$a_1 = 1, a_2 = p, \dots, a_k = n-1 \quad a_j - a_{j-1} = p-1 = r$$

分底下情況來討論：

(1) 設 n 為奇數：

此時 $a_2 = 2, r = 1$ ，故 $1, 2, \dots, n-1$ 均與 n 互質 $\Rightarrow n$ 為質數。

(2) 設 n 為偶數：

此時 $p \geq 3$

(i) 當 $p = 3$ 時，則 $r = 2$ ，小於 n 且與 n 互質之數列 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 為 $1, 3, 5, \dots, (n-1)$

因每一比 n 小的奇數 $q, (q, n) = 1 \Rightarrow n$ 沒有任何奇質因數

$\Rightarrow n = 2^m$ 對某一 $m \in N$ 成立

(ii) 當 $p > 3$ 時， $\Rightarrow 3 \mid n$ 而因

$$a_k = a_1 + r(k-1)$$

$$\therefore n-1 = 1 + (p-1)(k-1)$$

$$\therefore (p-1) \mid (n-2) \dots\dots\dots (*)$$

$$\text{令 } q \text{ 為質數且 } q \mid (p-1), \text{ 由 } (*) \text{ 知 } q \mid (n-2) \dots\dots\dots (**)$$

$$\text{現在知 } q < p \text{ 故 } q \mid n \dots\dots\dots (***)$$

$$\text{由 } (**) \text{ 及 } (***) \Rightarrow q \mid 2 \Rightarrow q = 2$$

$$\text{即 } p-1 \text{ 之任一質因數均為 } 2 \text{ 即 } p-1 = 2^l \text{ 亦即 } p = 2^l + 1 \text{ (} l \geq 2 \text{)}$$

另因 $3 \mid (2^{2j+1} + 1)$ 對每一 $j \geq 0$ 之整數恆成立

$$\text{故 } l = 2j \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2(p-1) = 2p-1 = 2^{2j+1} + 1 \Rightarrow 3 \mid a_3$$

但由 $3 \mid a_3$ 且 $3 \mid n \Rightarrow (a_3, n) \neq 1$ 矛盾。

評析：

1. 本題出自於羅馬尼亞 IMO，原先預估為中度題，其結果全體平均分數 4.22，得分率 0.60，在這 6 題中為得分最高者，亦即本題為最容易的題目。
2. 本題總共有 130 位 (41.6%) 參賽者得滿分，並有蘇聯、中國大陸、羅馬尼亞、美國、保加利亞、越南、法國 七個國家得滿分，得滿分的國家數最多；原設計國亦得滿分。

3. 解題主要概念：

• 先掌握 $a_1 = 1, a_n = n - 1$ 之事實

• 可先考慮特例 $n > 6$ 之質數，此時

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{n-1} = n - 1$$

$$r = a_2 - a_1 = 1 \text{ 之事實}$$

• 思考 $n = 8, 16, 32, \dots$ 等 2 的正整次方特例，掌握解題要領

$n = 8$ 時

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$$

$$r = a_2 - a_1 = 2$$

$n = 16$ 時

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11, a_7 = 13, a_8 = 15$$

$$r = a_2 - a_1 = 2$$

• 由上兩特例推想出： n 為質數時 $a_2 = 2, 2 \nmid n, r = 1$

n 為 2 正整次方時 $a_2 = 3, 3 \nmid n, r = 2$

• 充分掌握 a_2 ，其中 a_2 必為不能整除 n 之最小質數再就 $p = 2$ 或 $p = 3$ 著手，利用簡易公因數之關係式逆推得到所要證得之結果；但當 $p > 3$ 時，根據特例觀察，必然朝向“不可能”之證明。

問題 3：

設 $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$ ，求最小的自然數 n 使得 S 的每個有 n 個元素的子集都含有 5 個兩兩互質的數。（中國大陸）

[解]

$$\text{設 } A_1 = \{k \in S : 2 \mid k\}, A_2 = \{k \in S : 3 \mid k\}, A_3 = \{k \in S : 5 \mid k\}$$

$$A_4 = \{k \in S : 7 \mid k\}, A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$\text{則 } |A_1| = 140, |A_2| = 93, |A_3| = 56, |A_4| = 40$$

$$|A_1 \cap A_2| = 46, |A_1 \cap A_3| = 28, |A_1 \cap A_4| = 20, |A_2 \cap A_3| = 18,$$

$$|A_2 \cap A_4| = 13, |A_3 \cap A_4| = 8, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 9, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 6$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 4, |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$$

利用計數原理：

$$\begin{aligned}|A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\&= (140+93+56+40) - (46+28+20+18+13+8) + (9+6+4+2) - 1 \\&= 216\end{aligned}$$

A 中的任意 5 個元素，至少有 2 個元素同時屬於某一個 A_i , $1 \leq i \leq 4$

因此這 5 個元素無法達到兩兩互質（鴿籠原理！）

因而本問題之解 n 必然超過 216，即 $n > 216 \Rightarrow n \geq 217$

現證：

$n = 217$ 即為問題所求

設 $B_1 = A - \{2, 3, 5, 7\}$

$$B_2 = \{11^2, 11 \times 13, 11 \times 17, 11 \times 19, 11 \times 23, 13^2, 13 \times 17, 13 \times 19\}$$

$$P = S - \{B_1 \cup B_2\} \text{ 此時易知 } |P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$$

令 $T \subset S$ 且 $|T| = 217$ ，下面證明 T 必然含 5 個兩兩互質的元素即可。

顯然僅需考慮 $|T \cap P| \leq 4$

此時 $|T \cap (S - P)| \geq 217 - 4 = 213$ ，而 S 中所有合成數之個數為 $|S - P| = 220$ ，

因 $220 > 213$ ，所以在這 220 個合成數中至多有 7 個不在 T 內。

故只要再設法找出 8 組各含 5 個兩兩互質元素的集合即可：

$$M_1 = \{2 \times 23, 3 \times 19, 5 \times 17, 7 \times 13, 11 \times 11\}, M_2 = \{2 \times 29, 3 \times 23, 5 \times 19, 7 \times 17, 11 \times 13\}$$

$$M_3 = \{2 \times 31, 3 \times 29, 5 \times 23, 7 \times 19, 11 \times 17\}, M_4 = \{2 \times 37, 3 \times 31, 5 \times 29, 7 \times 23, 11 \times 19\}$$

$$M_5 = \{2 \times 41, 3 \times 37, 5 \times 31, 7 \times 29, 11 \times 23\}, M_6 = \{2 \times 43, 3 \times 41, 5 \times 37, 7 \times 31, 13 \times 17\}$$

$$M_7 = \{2 \times 47, 3 \times 43, 5 \times 41, 7 \times 37, 11 \times 19\},$$

$$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}$$

注意 $M_i \subset S - P$, $i = 1, 2, \dots, 8$ ，由鴿籠原理知有一個 i_0 , $1 \leq i_0 \leq 8$

使得 $M_{i_0} \subset T$ 此時 M_{i_0} 之任二元素都兩兩互質

綜合上述得證滿足問題之最小自然數 $n = 217$

評析：

1. 本題出自於中國大陸 IMO，為本屆第一天三道試題中之最難題，全部六題中僅較易於第二天的第 6 題。

2. 全部參賽者僅有 23 位 (7%) 得滿分，並且沒有一個國家得滿分，為滿分最少之一道題，原設計者得分 31 分，僅次於蘇聯 (34 分)、西德 (33 分)，排名第 3 位。

3. 解題主要概念：

- 本題顯然是屬於鴿籠原理的問題，主要的思考方向要掌握“5”這個“鴿子”，設法造出籠子數，從其中窺中 n 值之可能線索。
- 因為 $[\sqrt{280}] = 16$ ，盡量思考 16 以內的質數 2, 3, 5, 7, 11, 13 這 6 個數，280 以內的合成數有多少個 (220 個)，質數有多少個 (60 個)，可能都是解本題可以用到的資料。
- 先造出 4 個籠子 A_1, A_2, A_3, A_4 而 $|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216$
 A_j ($1 \leq j \leq 4$) 內的任二元素都不互質而 A 中任五個元素至少有其中 2 個同時在同一個 A_j 內；因此就特定集合 A 而言，其內之任意 5 個元素必有不互質的兩數存在，因此得到本題之答案至少為 217。
- S 扣除 B_1, B_2 後之 P 即為所有之 280 以下所有的質數集合且 $|P| = 60$ 。
- 當 $T \subset S$ ， $|T| = 217$ ，考慮 $|T \cap P| \leq 4$ (否則自然取出 5 個相異質數，當然符合兩兩互質的條件)
- 再計算 T 中合成數的個數至少有 213 個，所以，220 個合成數中至多有 7 個不在 T 。
- 把“7”再當作鴿子，造出各有 5 個合成數但兩兩互質的元素形成的集合之 8 個籠子“ $M_1, M_2, \dots, M_8$ ”。這 8 個籠子至少一個是沒有“鴿子”即其中一個在 T 中。

4. 討論：

- 本題解題過程先造一次鴿籠窺出最小值，再另造一次鴿籠，一不小心就容易產生疏忽而被扣分，因此本題得滿分最少。
- 本題原先北韓六位代表都得滿分且與參考解答完全一致，因此被評分裁判員檢舉作弊嫌疑，最後被判取消資格。

問題 4：

設 G 為一個有 k 條邊的連通圖，試證可以將 G 的邊編成 1, 2, 3, …, k 的號碼使得在每一個屬於兩條或更多條邊的頂點，過該頂點各條邊的編號數的最大公因數為 1。

(美國)

[圖 G 乃由一個其元素稱之為頂點的點集合與連接某些不同頂點的邊的集合所組成，而且每一對頂點 u, v 至多屬於一條邊。圖 G 稱之為連通的，其意為 G 的每一對不同頂點 x, y 必可找到一個頂點序列 $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = y$ 使得每一對 v_i, v_{i+1} ($0 \leq i < m$) 被 G 的一條邊連接。]

[解]

取定圖 G 的某一頂點 v_0 ，並由此點出發經由此圖的邊，依次編號 1, 2, ... 直到不能再進行為止。

若尚有某些邊尚未能依上段過程編號，則這樣邊的某一邊之一頂點勢必已被前段手續中經過，否則圖 G 就會變成不連通了！取這樣的頂點，依第一段的手續對尚未被編號的邊加以接著編號。

如此手續必然在有限次停止，而完成邊之

1, 2, ..., k 之編號。

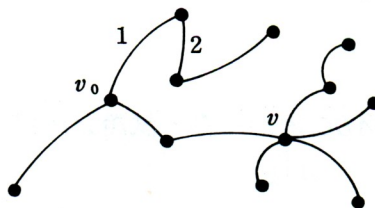
現證如此的編號法滿足題意要求：

設 v 為 G 的頂點，以 v 為頂點的邊有 l 條 ($l \geq 2$)

當 $v = v_0$ 時，則其中一條被編號成 1，自然這 l 條邊編號之 G.C.D. 為 1

當 $v \neq v_0$ 時，設第一次到達 v 的沿邊之編號為 r ，在當時尚有 $(l-1) \geq 1$ 條以 v 為頂點的邊，根據上述編號法，必然接著可將其中一條編成 $r+1$ ，由 $(r, r+1)=1$ 故亦可知這 l 條的編號數之 G.C.D. 亦為 1

於是證明完成。



評析：

1. 本題出自於美國 IMO，基本上應為第三天之簡易題，但可能圖形學的題材普遍都未列為中學數學教材內，因此本題難度反比第五題為高。
2. 本題共有 95 位 (30%) 參賽者得滿分，並有中國大陸、羅馬尼亞、德國、匈牙利、越南、印度六個國家得滿分，原設計國美國有 3 位學生共被扣掉 4 分，而得 38 分，並不算突出。

3. 解題主要概念：

- 本題最重要的問題在徹底瞭解題意，可作草圖幫助問題的了解。
- 含 1 的一組正整數，或含 $r, r+1$ ($r \in N$) 之一組正整數，它們的最大公因數都是 1，這是思考編號方法之主要概念。
- 掌握一定頂點開始編號，連接在一起的邊，一個接著一個連續編號，直到端點（僅有一邊通過的頂點）。
- 遇到走頭無路的端點時，再回首看看沒有被編號的邊，根據連通性，其中必然有一沒被編號的邊之頂點，已出現在第一次編號過程中之一頂點。
- 掌握這一頂點，接著編號， $\dots$ ；如此程序必然在有限次就編好而完成編號手續。

問題 5：

設 P 為 $\triangle ABC$ 內的一點，試證 $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ 三個角中至少有一個小於或等於 30° 。（法國）

[解]

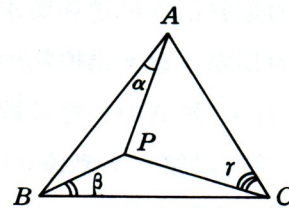
設 $\alpha = \angle PAB, \beta = \angle PBC, \gamma = \angle PCA$

$x = AP, y = BP, z = CP$

並設 α, β, γ 都大於 30° ，欲導出矛盾結果：

在 $\alpha, \beta, \gamma > 30^\circ$ 條件下

$\Rightarrow \angle A, \angle B, \angle C < 120^\circ$



$$T = \triangle ABC = \frac{1}{2} cx \sin \alpha + \frac{1}{2} ay \sin \beta + \frac{1}{2} bz \sin \gamma$$

$$> \frac{1}{4} (cx + ay + bz)$$

再證： $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} T$ 如下：

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} T &= a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos C - 2\sqrt{3} ab \sin C \\ &= 2[a^2 + b^2 - 2ab \sin(30^\circ + C)] \\ &\geq 2[a^2 + b^2 - 2ab] \geq 0 \end{aligned}$$

故得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} (cx + ay + bz) \dots\dots\dots (*)$

再利用餘弦定理：

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= b^2 + z^2 - 2bz \cos \gamma > b^2 + z^2 - \sqrt{3}bz \\ y^2 &= c^2 + x^2 - 2cx \cos \alpha > c^2 + x^2 - \sqrt{3}cx \\ z^2 &= a^2 + y^2 - 2ay \cos \beta > a^2 + y^2 - \sqrt{3}ay \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (**)$$

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma < \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{由 } (**) \quad a^2 + b^2 + c^2 < \sqrt{3}(cx + ay + bz) \dots\dots\dots (***)$$

(*) 與 (***) 互相矛盾

因此 α, β, γ 至少有一個 $\leq 30^\circ$

評析：

1. 本題出自於法國 IMO，其難度跟第一題相當，屬中度題，跟原先選題委員會之預估一致。
2. 本題共有 134 位 (42%) 參賽者得滿分 (7 分)，比第一題多 3 位；並有大陸、羅馬尼亞、德、匈牙利、越南、印度 共 6 個國家得到滿分 (42 分)；原設計法國 之平均分數 5.33，得分率 0.76，有二位學生各只得 2 分，其餘四位均得滿分，得分狀況次於第一、二題，這可能是法國 從上屆第五名退到第十三名的原因之一。
3. 解題主要概念：
 - 把“至少有…”問題轉換成不可能“都…”的問題。
 - 用歸謬法證明：設每一個“都…”得到矛盾。
 - 使用這些角及原三角形的三邊， P 點跟三頂點之距離表示出原三角形面積。
 - 再證 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T$ 之不等式 (本不等式之證法有多種)，而得 (*) 式。
 - 利用餘弦定律，在每個角 α, β, γ 都小於 30° 時得到 (***) 式。
 - 由 (*) (***) 得到互相矛盾。
4. 討論：
 - 第三屆 IMO 的競試題第 2 題：已知 a, b, c 為三角形之三條邊長， S 為其面積，求證： $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$
 - 作過此道考古題者，能進一步聯想到歸謬於 $a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}T$ 顯然是一條捷徑。

• 由上之討論，多作些過去 IMO 的考古題，應有助於準備新的 IMO 競試。

問題 6：

無窮實數列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ 稱為有界，如果有一常數 C 使得 $|x_i| \leq C$ 對每個 $i \geq 0$ 都成立。

任給實數 $a > 1$ ，試找出一個有界無窮實數列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ 使得

$$|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1$$

對每對相異非負整數 i, j 都成立。(荷蘭)

[解]

將 i 表示成 2 進位數制：

$$i = b_0 + b_1 \times 2 + b_2 \times 2^2 + \dots + b_k \times 2^k \quad b_0, b_1, \dots, b_k = 0 \text{ 或 } 1$$

$$\text{定義 } h_i = b_0 + b_1 \times 2^{-a} + b_2 \times 2^{-2a} + \dots + b_k \times 2^{-ka}$$

$$\text{則 } 0 \leq h_i \leq 1 + 2^{-a} + 2^{-2a} + \dots + 2^{-ka} \leq \frac{1}{1 - 2^{-a}}$$

$$\text{設 } i, j \geq 0 \text{ 且 } i, j \text{ 都是整數 } i \neq j = c_0 + c_1 \times 2^1 + \dots + c_k \times 2^k$$

$$c_0, c_1, \dots, c_k = 0 \text{ 或 } 1$$

令 t 為集合 $\{p \mid p \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \text{ 且 } b_p \neq c_p\}$ 的最小正整數，

$$\begin{aligned} \text{則 } |h_i - h_j| &= |(b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)2^{-a} + (b_2 - c_2)2^{-2a} + \dots + (b_k - c_k)2^{-ka}| \\ &\geq |(b_t - c_t)2^{-ta}| - |(b_{t+1} - c_{t+1})2^{-(t+1)a}| - \dots - |(b_k - c_k)2^{-ka}| \\ &\geq 2^{-ta} - \frac{2^{-(t+1)a}}{1 - 2^{-a}} = 2^{-ta} \left(1 - \frac{2^{-a}}{1 - 2^{-a}}\right) = (2^t)^{-a} \left(\frac{2^a - 2}{2^a - 1}\right) \\ &\geq \left(\frac{2^a - 2}{2^a - 1}\right) |i - j|^{-a} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{令 } s \text{ 為集合 } \{p \mid p \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \text{ 且 } b_p \neq c_p\} \text{ 中的最大正整數，} \\ \text{則 } |i - j| \geq |(b_s - c_s)2^s| - \sum_{k=t}^{s-1} 2^k = 2^t \end{array} \right)$$

$$\therefore |h_i - h_j| \cdot |i - j|^a \geq \frac{2^a - 2}{2^a - 1}$$

最後令 $x_i = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \cdot h_i$ 則 $|x_i| \leq \frac{2^a}{2^a - 2}$ 且 $|x_i - x_j| \geq |i - j|^a \geq 1$

對所有 $i, j \geq 0$ 之整數， $i \neq j$ 時恆成立。

評析：

1. 本題出自於荷蘭 IMO，為上屆前十名以外的國家試題惟一被選上者，對全體參賽學生而言，本題難度最高，平均得分僅 1.81，得分率為 0.14。
2. 原設計國的六位學生，除了二位分別得到 4 分和 2 分外，其餘 4 位代表都得 0 分，顯然設計國並未因此得利於其本國參賽學生（荷蘭排名第十七名）。
3. 本題難度雖然最高，然而前十名的國家在本題得分之平均值仍高達 4.50 分，得分率為 0.66，遠超過全體平均分數，而且比第三題之平均分數 4.25 分亦高，全體參賽者有 50 位得到滿分，其中蘇聯的 6 位代表都得到滿分，最為突出，在本題蘇聯就足足超過大陸 10 分，使得蘇聯能得到本屆競試之榜首。

（註：北韓的代表隊在本題原先公布各題分數時亦得滿分，當時我們都頗為驚奇，簡直不可思議，但後來在第 3 題全隊解題都與賽會完全一樣亦得滿分時，引起大會懷疑，經裁判團以 44：3 被判作弊，取消參賽資格）

4. 解題主要概念：

- 用 2 進位數制（或其他進位數制）表示非負整數相對造出 h_i 。
- 利用等比級數控制出 h_i 之範圍。
- 驗證 $|h_i - h_j| \geq (\frac{2^a - 2}{2^a - 1}) |i - j|^a$ 而得 $x_i = (\frac{2^a - 1}{2^a - 2}) h_i$ 為所求。

5. 討論：

- 本題屬分析題，以往 IMO 比較少出的類型，造一個滿足特定條件之數列，建造方法比較特別。
- 在試題選題會議，筆者原先直覺認為本題應沒有幾位學生能解出來，但卻仍有 50 位得滿分，尤其前十名國家在本題得分之高，令人驚奇，這可能跟集訓很有關係。
- 本題的證法，當 $a = 1$ 時並不適用，一個自然的問題是 $a = 1$ 時，本題是否成立？值得探究。

參考資料

1. 陳昭地等(民80年),第三十二屆國際數學奧林匹亞年會, 科學教育月刊, 142期(80年9月), 8—12。
2. 陳昭地(民80年),一九九一年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題, 科學教育月刊, 143期(80年10月), 18—19。
3. Åke H. Samulesson (1991), IMO-INFO, Sigtuna(Sweden).
4. Chiness Mathematical Olympic Committee (1990), 31st International Mathematical Olympiad, Beijing China.
5. Zhang Junda and Guo Chunyan (1991), The Analysis and Evaluation of the 31st IMO, Mathematics Competitions, 4(1), 70-83.

更正：本刊第146期中，「人工智慧在教育上之應用」一文之作者羅綸新，誤刊為羅綸斯，謹此更正並向作者暨讀者致歉。

編輯室啓