帶電質點在均勻磁場中的運動

林朝宗
台北市立建國高中

帶電質點在均勻磁場中運動的軌跡，只有直線、或圓、或螺旋三種。高中物理教材中，只用比較簡單而較直觀的方法說明。以下採用向量以及微積分的方法來作解析，提供具有較好數學程度的同學作為參考。

設均勻磁場 $\vec{B} = B\hat{k}$，質點帶正電 q，質量 m，磁力之外一切力量不計，則

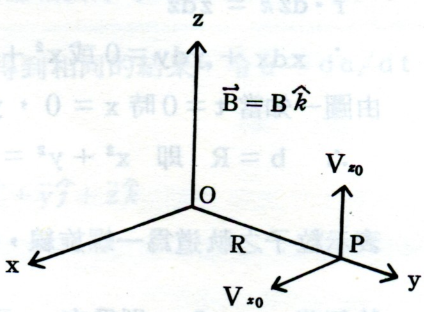
$$\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \text{ 或}$$

$$\frac{q}{m}\vec{V}\times\vec{B} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad\therefore \vec{V}dt = d\vec{r}$，由(1)得

$$\frac{q}{m}\vec{V}dt \times \vec{B} = \frac{q}{m}d\vec{r} \times \vec{B} = d\vec{V} \text{ 所以}$$

$$\frac{q}{m}\vec{r} \times \vec{B} = \vec{V} + \vec{C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



圖一

$\vec{C}$ 為待定常量。質點在均勻磁場中運動任一剎那都必須滿足(2)及(1)。設 $t = 0$ 時，質點經 P 點，$PO = R$，速度為 $V_{x_0}\hat{i} + V_{z_0}\hat{k}$ 則

$$\frac{q}{m}R\hat{j} \times B\hat{k} = V_{x_0}\hat{i} + V_{z_0}\hat{k} + \vec{C} \quad \therefore \vec{C} = \left(\frac{q}{m}RB - V_{x_0}\right)\hat{i} - V_{z_0}\hat{k}$$

再令 $\dfrac{q}{m}RB = V_{x_0}$ 或 $R = \dfrac{mV_{x_0}}{qB}$ 則 $\vec{C} = -V_{z_0}\hat{k}$ 代入(2)得

$$\frac{q}{m}\vec{r} \times \vec{B} = \vec{V} - V_{z_0}\hat{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 $\hat{k}$ 和(3)兩邊內積則因 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{C}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{C}$

$$\therefore\quad \frac{q}{m}\vec{r}\times\vec{B}\cdot\hat{k}=\frac{q}{m}\vec{r}\cdot\vec{B}\times\hat{k}=0=(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k})\cdot\hat{k}-V_{z_0}$$

$\therefore\quad V_z=V_{z_0}=$ 常數，表質點沿磁場方向之分速度不變。由(3)兩邊乘以 dt，因 $\vec{V}dt=d\vec{r}$ 故

$$\frac{q}{m}\vec{r}\times\vec{B}dt=d\vec{r}-V_{z_0}dt\hat{k} \tag{4}$$

以 $\vec{r}$ 和(4)兩邊內積得

$$\frac{q}{m}\vec{r}\cdot\vec{r}\times\vec{B}dt=\frac{q}{m}\vec{r}\times\vec{r}\cdot\vec{B}dt=0=\vec{r}\cdot d\vec{r}-\vec{r}\cdot dz\hat{k}$$

但 $\vec{r}\cdot d\vec{r}=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k})=xdx+ydy+zdz$

$\vec{r}\cdot dz\hat{k}=zdz$

$\therefore\ xdx+ydy=0$ 或 $x^2+y^2=b^2$，b 爲待定常量

由圖一知當 $t=0$ 時 $x=0$，$y=R$，$z=0$

$$\therefore\quad b=R \quad 即 \quad x^2+y^2=R^2 \tag{5}$$

表示粒子之軌道爲一螺旋線，半徑 $R=\dfrac{mV_{z_0}}{qB}$，z 方向以等速度 V_{z_0} 運動

特例若 $V_{z_0}=0$，則爲在 xy 面上之圓週運動，若 $V_{x_0}=0$，$V_{z_0}\neq0$，則沿 z 軸等速度運動。

若以 $\vec{V}$ 和(1)內積，則

$$\frac{q}{m}\vec{V}\cdot\vec{V}\times\vec{B}=\frac{q}{m}(\vec{V}\times\vec{V})\cdot\vec{B}=\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$$

但 $$\frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\vec{V})=\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}+\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V}=2\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$\therefore\quad \dfrac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\vec{V})=\dfrac{d}{dt}(V^2)=0\quad \therefore V=$ 常數（注意 $\vec{V}$ 不爲常量）

故知 $\vec{V}$ 只方向在變，

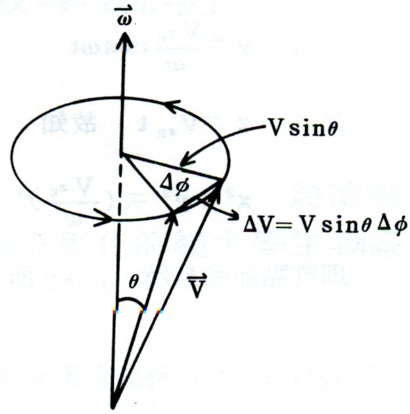
故如圖二的解析得

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{V}$$，其中 ω 為角速度　代入(1)式

得　$$\frac{q}{m}\vec{V}\times\vec{B}=\vec{\omega}\times\vec{V}=-\vec{V}\times\vec{\omega}$$

$$\therefore\quad \vec{V}\times\left(\frac{q}{m}\vec{B}+\vec{\omega}\right)=0$$

此式中任意 $\vec{V}$，$\vec{B}$，$\vec{\omega}$ 都必滿足，故 $\frac{q}{m}\vec{B}+\vec{\omega}=0$



圖二

故　$$\omega=\frac{qB}{m}\quad 但\ \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore\quad T=\frac{2\pi m}{qB}$$，與 V 大小無關，且 $\vec{\omega}$ 和 $\vec{B}$ 方向必相反（q 為正時）

若把(1)分解為直角坐標系的分向量來求解，也可得到相同的結果，令 $\dot{u}\equiv du/dt$ 則 $\ddot{u}\equiv d^2u/dt^2$　$\dddot{u}\equiv d^3u/dt^3$

$$\frac{q}{m}\vec{V}\times\vec{B}=\frac{q}{m}(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})\times\hat{k}B=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$$

$$\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$

$$\therefore\quad \ddot{x}=\frac{q}{m}B\dot{y}\qquad \ddot{y}=-\frac{q}{m}B\dot{x}\qquad \ddot{z}=0$$

$$\therefore\quad \dddot{x}=\frac{q}{m}B\ddot{y}=-\left(\frac{qB}{m}\right)^2\dot{x}\qquad 令\ \omega=\frac{qB}{m}$$

$$\dddot{x}+\omega^2\dot{x}=0\quad 或\quad \ddot{x}+\omega^2x=c$$

且　$$y=R=\frac{mV_{x_0}}{qB}$$，$x=0$，$\ddot{x}=0$　$\therefore c=0$　（見圖一）

$$\therefore\quad x=A\sin(\omega t+\phi)\qquad t=0 時\ x=0\qquad \therefore\phi=0$$

$$\dot{x}=A\omega\cos\omega t\qquad \therefore A\omega=V_{x_0}\Rightarrow A=\frac{V_{x_0}}{\omega}$$

$$\therefore\quad \ddot{y}=-\omega\dot{x}=-\omega^2A\cos\omega t=-\omega V_{x_0}\cos\omega t$$

$$\therefore\quad \dot{y}=-V_{x_0}\sin\omega t+c'$$

但 $t=0$ 時 $\dot{y}=0$ $\therefore c'=0$

$$\therefore \quad y=\frac{V_{x_0}}{\omega}\cos\omega t$$

又 $z=V_{z_0}t$ 故知

$$x^2+y^2=\left(\frac{V_{x_0}}{\omega}\right)^2=R^2=\text{常數}$$

即質點運動軌跡，在 xy 面上之投影為圓，在 z 方向則為等速度運動。

（上承第46頁）

六、謝 辭

在七十九年暑期進修時，受業於師大化研所蕭次融教授指導的示範實驗課程，如獲尋它千百度之至寶，復蒙蕭教授感人的耐心及熱心鼓舞與指導，在此，我們要表示十二萬分的崇敬與感謝。

合併嘉義市玉山國中林世忠老師所作電解反應析出金屬樹，成同一體系；在校研究過程蒙同校化學科黃政吉教師及學生張嘉雄、張志忠、廖東啓等人的協力分工，於此一併致謝。

七、參考資料

1. 教育部七十九學年度國民中小學科學教育考察紀要，科學教育月刊第141期，民國80年。

2. 大森泰弘，「教師與學生的化學實驗」，P.27～32，東京化學同人，1987，日本化學會編。

3. 國立編繹館，「高中化學實驗手册㈢」，民國80年。