

數學視覺化教育的文獻分析

A. J. Bishop著

譚寧君譯

國立臺北師範學院數理教育系

本篇文獻是根據早期的一些作者所撰寫的研究報告中，有關“視覺化”(visualization)的資料摘錄出來(Bishop, 1980, 1983, 1986; Clements, 1982; Gaulin, 1985; Presmeg, 1986b)。這個架構與心像(imagery)、空間能力(spatial ability)、繪圖(diagrams)、直覺(intuition)等文獻有交互關係，同時這些文獻又包含了數學教育中許多有用的概念。好幾百年來，數學教育家，無論在個人、在工作、或者視覺概念的過程中，對數學的視覺化與形狀表徵有濃厚的興趣，而視覺效益(visual aids)的完整意義是建立在下列的完整架構上。

(a) 對複雜的抽象概念，視覺表徵提供了有力的說明。

(b) 可操作性實物(manipulative)，具體物(concrete embodiments)與直覺工具(intuitional devices)是目前多元的教學資源一部份，目前微電腦也逐漸拓廣視覺的範圍，同時，由於它在數學教育上的使用，也更促進了這方面的發展與研究，在視覺方面，我們究竟學到了什麼？在未來研究方面又需要強調什麼？

最初，在數學教育的領域內，我們了解對下列有重要的區別，即視覺化的名詞意義，乃在說明產品(product)，目標物(object)，視覺是什麼(the “what” of visualization)與視覺心像(visual image)，而視覺化的動詞影像，其重點則放在過程(the process)、活動(the activity)、技巧(the skill)與怎麼視覺化(the “how” of visualizing)，顯然的，關於這二方面，均有非常重要的教育論題提及，而另一領域為特殊教育的視覺特徵—即指導過程，教材的角色地位、社會環境、以及個人如何與環境交互作用，讓我們從這三方面來檢視相關的文獻。

視覺化的結果

數學是表示一個具體化或從實體作抽象表徵的一個科目，而許多表徵(representation)是以視覺方式呈現(即在視覺經驗裏有它的意義)，這些視覺可能與原始心像相關，(例如想像一個特殊的門柄被旋轉)，或者它們是相當的抽象(例如想像在一圓

中內接一直角三角形)，它們在數學活動裏有相當意義，正如 Hadamard (1945) 所寫的視覺心像是相當有智慧的，而且好幾年來，他們引起某些研究者相當的興趣。

第一個有趣的論點是視覺化是一件純粹個人的事，每一個人有一個較廣的視覺心像，即使在數學活動中亦是如此。Presmeg (1986 b) 將她的學生中分成五種不同的視覺心像。

- (1) 完全具體的、圖像的心像（即將圖形實體存在心裡）。
- (2) 類型心像（在視覺空間的基模裏純粹描述關係），即能將各實體間的相互關係存在心裡。
- (3) 原理原則的記憶心像（即記憶數學各項公式）。
- (4) 動作心像（Kinaesthetic imagery，即能從事靜態實體心像，進一步理解到動態的心像；包括肌肉活動，如平行、對稱、旋轉，或用指頭行走）。
- (5) 動覺心像（Dynamic imagery 即能推想成視覺的動態移動，包括移動與比例關係）。

進一步說，學生並不是停在某一狀態，而是在不同的情況下會呈現不同的形態，視覺系列因利用各別因素而產生，因此在考慮數學教學時，在心裡有一個重要因素影響著，同時根據 Gaulin & Puchalska (1983)，Ben Haim，Lappan & Hodang (1985)，Krutetskii (1976)，Presmeg (1986 b) 的研究也可明顯看出，兒童在產生視覺心像上幾乎沒有困難—這些在教育實驗上有一強有力的證據。

進一步說，視覺化的本質也能將一個固定的模式改變並表現出來，即用一個更鮮明的心像呈現一個有趣的架構。例如 Persmeg (1986 a) 即發現用鮮明的心像能幫助她的學生回想，尤其是在記憶心像的狀態下，她會描述原理原則的記憶心像和類型心像，為能夠提供一個快速的方法，去喚回一個抽象的原則或過程，前者在具體心像中使過程更成熟，後者則是比較模式化的心像 (schematic image)，它能提供一般的原則，在一般有關心像的正向本質 (positive quality) 還包括它的整合型力量 (integrative power)、典範式的使用 (exemplary use)，以及抽象觀念的具體描述，偶爾還包括亮麗鮮明的外表 (illuminate aspect)，正如同 Krutetskii (1976) 在他的研究中所提及的資優視覺者：“這些人的繪圖基模是具體而抽象的結合體，支持者認為，即使捆綁他們也不能阻止視覺心像的產生思考，在這種情況下，心像是一個傳送訊息的人，或表示抽象視覺的實質內容。”

然而，其它視覺化也會呈現負向的結構，而造成一些阻礙，例如：Hoz (1981) 提出“幾何僵化” (geometric rigidity) 往往是由於兒童無法用不同方式來理解圖形，

另一更困難之處，是無法將一實體看成一個符號；例如一般所謂的雷克正方體（'Nec-ker' cube）是一種最普通的視覺表徵，事實上沒有一個正方體是那個樣子，而是當從物體上方往下看，物體則看起來是菱形而非正方形。

Presmeg（1986 b）將視覺者所遭到的困難，摘錄於她的研究報告中：

- (1) 視覺或圖形的一個具體現象可能與其它不相關的因素相連結，或者甚至於提供錯誤的資料。
- (2) 標準圖形的心像可能導致具體思考的僵化，而阻礙了去了解非標準圖形（non-standard diagram）。
- (3) 某一些不可控制的心像，可能阻礙了更豐富思考方向。
- (4) 假如心像不能與思考分析相吻合，則這個心像也變得沒什麼助益。

無論如何，所有視覺化心像在數學活動中扮演一個相當有用的角色，明顯的，我們需要更多的研究，幫助我們了解到在一個既定的數學情況下視覺化的特徵。

視覺化的過程

我們參考的圖像並非偶發的事例，在數學裏的視覺化過程，往往為一群複雜的架構，而研究這一種組成架構是非常重要的。這些架構主要的焦點均在個人學習的本質上，最近有較多的研究有興趣探討學習者的本身，這些所謂的視覺者（visualizer）——即寧可使用視覺過程並且用得很好的那些解題者——目前則是值得研究的一群。Krutetskii（1976）、Lean and Clements（1981）、Morse（1977）、Presmeg（1986 b）與 Suwarsono（1982）等都是將焦點放在這個領域的研究者，而且將早期研究與空間能力有關的因素分析（task analysis）或心理計量（psychometric）的研究移至視覺方面，也許將過去某些研究者如 Guay、McDaniel and Angelo（1978）曾經說服許多人，相信從視覺化過程來分析心理計量這件事，說得一文不值。這個過程研究首先揭露的，是要探討個人過程概念是相當困難的。Moses（1977）使用流行的圖卡、畫、表、圖片等的答案紙，來了解學童在解題過程中其使用視覺圖像的程度。Suwarsono（1982）設計了一個程序單（procedure），使學生能先解一組題目，然後並說明應用的解決方法與實際使用的方法，這種備用表格（the prepared set）與視覺過程是有所不同的；Presmeg（1986 b）也將 Suwarsono 所使用的工具修正後與所有學生面談，當資料回收後，發現題材樣本愈廣，能做有效推論的機會也愈大。

無論如何，這篇研究是定位在解題架構上，同時顯示出在解題的過程中，會使用到

不同的視覺圖像，但究竟我們從視覺化的過程中學到什麼呢？以下是各研究者談及有關視覺圖像的一些結論。

- (1) Presmeg (1986 b) 敘說道：“解題的視覺方法是一種包含視覺圖像，偶而也有用繪圖，當成一種主要的解題方法，即使是推理或代數方法也會用到它。”
- (2) Moses (1977) 認為使用視覺的程度是依其在解題過程中使用圖像的次數在決定。
- (3) Krutetskii (1976) 的幾何型像 (geometric type) 表示：“對抽象數學概念與數學證明需要用圖像表示。”
- (4) Suwarsono (1982) 認為“假如推理過程與教得正確的答案，是經由學生所繪製的視覺圖形 (diagram) 或圖像 (ikonic visual image) 而得到的。”則其視覺分數是相當高的。

簡言之，視覺化過程包含了學習者建構視覺影像與適當的使用圖像；讓我們進一步分析，在解題情況中，所謂“適切性” (appropriately) 意思是說協助獲得解答，無論如何有一個較廣的含意比一般所謂解題來得更有助，而顯然的，視覺化過程需要一些刺激物，如文字、音樂、味道等均會引起視覺影像，而且不同的刺激物會引起不同的視覺影像，例如已知一個式子 $2 \times 3 = 6$ 盡可能提供一個視覺影像，即可能產生不同的反應，如有三個籃子，每個籃子有兩個蘋果，共有多少個蘋果？但下述表徵即很不一樣，“一個骰子，2 這個數面對你，3 這個數在右邊，而 6 這個數在底端”，所以不是所有的問題都有視覺影像，而是我們找尋最適切的罷了，同時我們從前面的敘述也可看出，有時視覺影像也會造成負向的影響。

在早期的文獻中，作者曾定義“視覺過程” (visual processing, 簡寫 VP) 的能力與解釋圖形訊號 (interpreting figure information IFI) 的能力是相當不同的。VP 被定義成“為一種視覺化的能力，與抽象關係或無法圖示的訊息轉變成視覺圖像的能力，亦包含了視覺表徵與視覺心像的操作與轉換情形，故它只是一個過程能力，與出現刺激物的種類或其呈現方式無關。”

刺激物與個體間究竟有多少活動需依賴彼此的交互關係，例如，從來沒有一件特殊的工作，是只有惟一的一個方法，每個人是依其個人的喜惡，個人視覺的記憶與回溯能力而產生適當的視覺圖像。由此可見，視覺化過程與視覺圖像是純粹個人的事，每個人需要有時間發展其個人的圖像，期望由老師指導形成的視覺過程，往往沒什麼意義，所以我們應該鼓勵每個人積極參與視覺活動的機會。

從上述的分析，我們還發現到假如我們想更深入的了解視覺過程，則我們還必須從

刺激因素的種類與型態深入分析，而不是只從“怎樣解題”這一個方向著手。Presmeg (1986 a) 的研究中曾暗示道：“當一個主題被指導，顯然的視覺表徵往往被用來協助學習者易於去了解，而過程或公式的不斷練習，會引導成一種習慣而不再應用視覺的方法，換句話說，熟練 (facility) 將使得視覺者不再用視覺的方法。”這種論點 (aspect) 受 Lean and Clement (1981) 的影響，也和 Morses (1977) 的研究有關，而其中所提的問題，幾乎是所有問題對學生都太難了些；顯然的，题目的難易度是採用刺激物與否的一個重要因素，其它的也是如此。

教育情境中的視覺化

當學習者在特殊教材、不同的社會環境下去執行某一工作，教育現況則是視覺化 (visualization) 考慮的第三個參考因素。剖析視覺化的內容，我們發現學童在不同情境用了不同的視覺影像，而且用不同的影像進行，因此我們應去了解有關視覺化的教育過程研究中，我們學習到了什麼？那些研究的問題至今還存在著？

一些研究已掉進“訓練” (training) 的範疇中，而 Lean (1981) 也提到“事實證明，不同的技巧可由不同的經驗加以訓練。”那也就是說，教學生各式不同的圖形，包含 IFI 圖像能增進其視覺化能力已是顯而易見了；同時根據曾經指導的各式圖像加以練習，就能產生他們自己的圖像詞彙，這對教育工作而言是非常重要的，但在 VP (visual processing) 方面，研究者則還沒研究證明顯示訓練是非常有效的。

Clements (1982) 也說道：“雖然自從 Galton (1883) 以來，心理學家即已談及訓練可以改進心像 (image)，不過仍然很少有在理論或教學上進一步的證明。”的確，視覺化的本質關鍵在於其個人的經驗，而非指導而來的這件事，就沒什麼令人奇怪的了。

無論如何，在一般教學中，鼓勵學生發展視覺心像與促進其視覺認知是可以達到目的的。正如在 Mitchelmore (1980, 1984) 的研究中提及在教學環境中，利用視覺圖像方式的交互作用，增進此方面的能力。例如在 Mitchelmore (1984) 曾在 JAMAICA 教學中，發現他的學生空間與視覺能力相當低落，因此解釋道：“因為在 JAMAICA，大多數家庭缺乏給小朋友空間概念的玩具，他們甚至幾乎沒有玩具，在這樣的家庭環境下只有兩三個例外，其中一個是四年級的男生，他是一個機械師的兒子，他家中有一個工作室，另一個是六年級的男孩，他時常幫他當水泥匠的父親做事，這兩個孩子在那個以農業為主的環境中顯得相當突出，從早期的研究 (Bishop, 1973; Marriott, 1978)

可看出結構化與可操作的教材或教具，能鼓勵視覺的創造性，這也就是視覺化的過程。

最近，從很多學校複雜的各類活動中，我們已經證明了電腦能提供較強的刺激作用，影響學生的視覺化過程與能力，正如 Noss (1987) 提及“研究已經證明，經由龜形繪圖的電腦軟體（即 Logo software）能增進學生幾何概念。”同時，Gallou-Dumiel (1987)，Olive and Lankenau (1987) & Osta (1987) 也都證明無論用什麼不同的方法與電腦進行交互作用，甚至提供動態的視覺活動，都能鼓勵與增加學生的視覺能力。

有相同的研究結果還包括了 Dreyfus & Eisenberg (1987)，Zehavi, Gonen, & Taizi (1987)，Noonon (1987)，也都證明使用電腦能幫助視覺影像的發展，甚至也可增進代數概念的了解。Hoyles (1987) 曾針對以電腦為輔助教學的工具，做出下面的結論——“電腦不是一個老師，它只是一個可操作的繪圖表徵工具，它也有足夠的力量提供訊息回饋。”因此，電腦可以說在視覺發展方面是一個非常有利的工具。

無論如何，經由老師們的提醒，還要注意到其它社會因素所扮演的角色，如教材、環境等。還有如 Kent and Hedger (1980) 的研究中顯示，父母與老師和藹的指導，也會對學生視覺影像的發展有相當的助益。

Presmeg (1986 a) 的研究在這方面則沒有正式的提出，因其焦點是放在老師和學生。她使用相同的架構去評估教師的視覺能力，結果她將教師分成三種型態並且分析之：

- (1) 無論怎麼提供視覺表徵，都不採視覺圖像的老師（稱非視覺組）。
- (2) 偶而使用視覺影像但對視覺的評價不高的老師（稱低視覺組）。
- (3) 使用且鼓勵學生使用視覺圖像的老師（稱高視覺組）。

我們特別有興趣的是，這三種不同類型的老師怎麼與視覺型的學生接觸溝通，以下即是研究發現：

- (1) 非視覺組的老師在引導視覺者時，常使學生相信數學是由一串規則和公式所組成，故需利用記憶。
- (2) 低視覺組的老師往往採高壓政策，使學生在抽象與一般化的能力增強，但在類型圖像方面則採較簡單辦法，鼓勵學生進行思考。
- (3) 高視覺組的老師往往是用樂觀的態度去使用視覺方法，但他却不一定能幫助視覺者解決所有的困難，或最有效利用視覺過程。

這兩篇研究使我們相信，一、二十年前最簡單的研究 ATI 已不再值得追求了，由

於視覺化是個人的問題，所以老師的角色變得是相當微妙的。當然需要更多的研究，來探討教師的視覺能力與教師發展視覺化的過程，同時即可檢驗學生個別學習過程的結果。

結 論

正如我們所已經了解的，在視覺研究的領域中，已有相當大的進步，同時也有許多研究可在教室內進行指導視覺的活動，我們也相當同意這兩件事，Gaulin (1985) 曾寫道：“目前主要爭論的主題，是在數學教育中，要多提供三度空間的形體與關係的實體表徵系統，這兩者目前大多數均仍在研究與發展中。”已有證據顯示，在數學教室中各個領域，都應強調視覺表徵的價值，同時，個人的視覺化過程中相當受著數學教育家的影響。

參考資料

- Ben-Haim, D., Lappan, G., & Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analysing and effecting students' performance. Educational Studies in Mathematics, 16, 389-409.
- Bishop, A.J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. Research in Education, 9, 43-49.
- Bishop, A.J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. Educational Studies in Mathematics, 11, 257-269.
- Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics concepts and processes (pp. 176-203). New York: Academic Press.
- Bishop, A. J. (1986). What are some obstacles to learning geometry? Studies in Mathematics Education (UNESCO), 5, 141-159.
- Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics. For the Learning of Mathematics, 2(2&3), 2-9, 33-38.
- Dreyfus, R., & Eisenberg, T. (1987). On the deep structure of functions. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of the eleventh international conference of PME, 1, 190-196. Montreal, Canada: University of

- Montreal.
- Gallou-Dumiel, E.(1987). Theorem de Thales et micro-ordinateur. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran(Eds.), Proceedings of the eleventh international conference of PME, 2, 10-16 . Montreal, Canada: University of Montreal.
- Galton, F.(1883). Inquiries into the human faculty and its development. London: Macmillan.
- Gaulin, C.(1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. In L. Streefland (Ed.), Proceedings of ninth international conference of PME, 2, 53-71 . Montreal, Canada:University of Montreal.
- Gaulin, C.,& Puchalska, E.(1983). Representations of paper of 3-dimensional shapes. In J.C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), Proceedings of the fifth annual meeting of PME-NA, 1 , 322-325 . Montreal, Canada: University of Montreal.
- Gaulin, C., & Puchalska, E. (1983). Representations on paper of 3-dimensional shapes. In J.C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), Proceedings of the fifth annual meeting of PME-NA, 1 , 322-325 . Montreal, Canada: university of Montreal.
- Guay, R.B., McDaniel, E.D., & Angelo, S. (1978). Analytic factors confounding spatial ability measurement. In R. B. Guay & E. D. McDaniel (Eds.), Correlates of performance on spatial aptitude tests (pp. 116-128). Lafayette, IN: Purdue University (USArmy Research Institute for the Behavioral and Social Sciences). Final Report (Grant No: DAHC-19-77-G0019).
- Hadamard, J.(1945). The psychology of invention in the mathematical field. London: Dover.
- Hoyles, C. (1987). Geometry and the computer environment. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, and C. Kieran (Eds.), Proceedings of the eleventh international conference of PME, 2 , 60-66 . Montreal, Canada: University of Montreal.
- Hoz, R. (1981). The effects of rigidity on school geometry

- learning. Educational Studies in Mathematics, 12, 171-190.
- Kent, D. & Hedger, K. (1980). Growing tall. educational Studies in Mathematics, 11, 137-179.
- Krutetskii, V.A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school-children. Chicago: University of Chicago Press.
- Lean, G.A. (1981). Spatial training studies and mathematics education. Unpublished manuscript, University of Cambridge, Department of Education, Cambridge, England.
- Lean, G.A., & Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics, 12, 267-299.
- Marriott, P. (1978). Fractions, now you see them, now you don't. In D. Williams (Ed.), Learning and applying mathematics. Melbourne, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Mitchelmore, M.C. (1980). Three dimensional geometry drawing in three cultures. Educational Studies in Mathematics, 11, 205-216.
- Moses, B.E. (1977). The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University, Bloomington, IN.
- Nelson, G.T. (1987). Using microcomputer-assisted problem-solving to explore the concept of literal symbols: A follow-up study. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of Eleventh International Conference of PME, 1, 221-227. Montreal, Canada: University of Montreal.
- Noonon, P. (1987). Acquisltion d'un langage graphic de codage par la modelization en temps reel des donees d'experiences. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of Eleventh Intemational Conference of PME, 1, 228-234). Montreal, Canada: University of Montreal.
- Noss, R. (1987). Children's learning of geometrical concepts

- through LOGO. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 343-362.
- Olive, J. & Lankenau, C.A. (1987). The effects of Logo-based learning experiences on student's non-verbal cognitive abilities. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of eleventh international conference of PME, 2, 24-30. Montreal, Canada: University of Montreal.
- Osta, I. (1987). L'outil informatique et l'enseignement de la géométrique dans l'espace. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of eleventh international conference of PME, 2, 31-38. Montreal, Canada: University of Montreal.
- Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in Mathematics, 17, 297-311.
- Presmeg, N.C. (1986a). Visualization in high-school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6, 42-46.
- Richardson, A. (1977). Mental imagery. London: Routledge and Kegan Paul.
- Suwarsono, S. (1982). Visual imagery in the mathematical thinking of seventh-grade students. Unpublished doctoral dissertation, Monash University, Melbourne.
- Zehavi, N., Gonen, R., Omer, S., & Taizi, N. (1987). The effects of microcomputer software on intuitive understanding of graphs of quantitative relationships. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), Proceedings of eleventh international conference of PME, 1, 225-261. Montreal, Canada: University of Montreal.