

數學的視覺面*

A. J. Bishop**著

林宜臻譯

臺灣省國民學校教師研習會

值秋之際，承蒙盛邀，榮幸之至，須先獲各位諒解的是，在這次的演講中，內容將偏重於大方向的探討，而不涉及枝節部份。

我首先要指出的是，現今的數學課程中呈現著不平衡的狀態，此乃由於電算器與電腦易於使用，以致課程偏重於數值、代數、計算等方面。當然這並不意味著個人對於電腦與電算器的發展有所怨言，更何況個人現正客居於電算器與電腦相當發達的日本，出此之言更屬不當。但是個人擔心空間、幾何、圖形方面的課程發展，遠不及於上述計算方面的發展，因此對於只偏重於計算方面的課程發展，引以為憂。

目前確實有很多具有魅力而且能引起興趣的器具，得之甚易，足以讓小朋友畫各種的圖與表，並能平移、鏡射、旋轉，同時小朋友亦可藉此，發現旋轉中心（center of rotation）、對稱面（plane of symmetry）、伸縮中心。但依個人之見，利用圖的表現，尤其是對一些採用規約、用語、空間表現等複雜技能的系統化工作，尚未付於深思。因此個人將就如何促使計算教材和圖形教材，趨於平衡，提出個人的看法。

我們先就數學科中，學生須瞭解的各種圖——尤其是有益於思考表現、關係表現、演算表現的圖，作為思索一些問題的開始。以圖的表現作為表徵，學生必須學習非常複雜且具技巧性的視覺語彙、文法，以及一些約定與規則，這對於學生而言，是相當難以理解的，因此個人認為更有計劃性的指導，有其必要性。

視覺表現的不同型態相當多，但還沒有人對於這些表現加以分析、組織、系統化。個人雖已開始作這方面的嘗試，却尚屬初試階段。

現在請各位看圖1。

* 日本數學教育學會與國立教育研究所於昭和52年3月26日共同舉辦演講會的講題。

** 英國劍橋大學教授。

圖 1

這一事實，才是重要的，至於 A 到 B、B 到 C 之間，無論是直線或是曲線，並無影響。

解這些性質，則該圖無意義；例如看到右下圖的圓形圖時，學生應看出角度非常重要；至於文恩圖，就不一定非圓不可。

這些圖除了告訴我們視覺方面的教學內容外，也可視為益於學生使用於表現的裝備，無論何者，都必須明辨各種表現的約定，「千言不如一圖」這句話雖然常被引用，但圖形有時也不夠明晰，下圖所示即是如此。



圖 2



圖 3

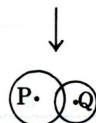


圖 2'



圖 3'

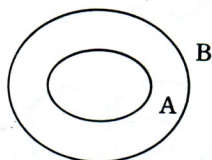


圖 4

例如由圖 2 我們無法判斷究竟是表示兩圓相交或是文恩圖，若是圖 2'，則可看出是以 P 與 Q 為圓心的圓；當我們看到圖 3 時，也許看成希臘字的 π ，但如果畫成圖 3' 時，則可以看出畫的是三度空間裡彼此相交的三條直線。

畫圖時的種種約定，對學生而言是不易瞭解的，例如圖 4 的這個 A 究竟是指那一部分，對學生而言，容易引起混亂，甚至數學家也可能搞不清楚。多數的老師在畫類似這樣的圖時，大也都沒注意這些約定的事吧！例如教師對學生說「畫任意三角形」後，隨即在黑板上畫了一個三角形，這對有些學生而言，教師所謂的任意三角形，是某一種類的三角形。誠如學生所言，我們不能畫任意的三角形，我們僅僅只能畫一個三角形，對專家而言，那是一句可理解的話，但學生並非是專家。

再舉一個例子來說，學生的桌面是水平的，教師的黑板是鉛垂的，所以教師在黑板上畫三角形的高時說「從頂點畫一條垂線垂下來」，這時這條垂線確實是從上垂直而下，而且有高，但對學生而言，由於三角形平放於桌面，所以既沒有線垂下，也沒有高。因此學生還必須將教師在鉛垂面中所使用的用語，翻成水平面的用語。對我們而言，這相當容易，但對學生而言，却是困難的事。然而學生若不能瞭解這些事，則無法瞭解數學。

此外，教師們一邊畫，一邊以口頭說明這樣畫、那樣畫的說明方式，在某種情況下是非常危險的，應該不是去說明圖而是讓人瞭解圖的意義。就圖 1 而言，我清楚圖中的約定與價值，若向各位說明，各位當能瞭解，因此理解圖的有效策略在於組合圖形過程

中的說明，但由於我們有很好的 OHP 及投影片，所以我們往往讓學生很快地看一些現成的圖，事實上，在教師逐步地作圖過程中，學生也能從此過程中學到很多概念。有關這個主題雖然還有很多要談，但限於時間，只好轉到下個話題。

接下來，將談作圖的能力。不曉得什麼緣故，教學過程中，教師很少教導學生作圖的方法，在此，我們須先區別兩種圖的畫法，其中一種是拷貝，另一種是將抽象的事象以圖表示，拷貝是將眼前物的形畫在紙上，而個人以下要談的全是抽象圖示的表現（英國將作圖的課程稱之為 technical drawing，有些國家稱之為 technical design），說明時若使用平面圖、側面圖、正面圖的用語，對有些人而言，應不陌生，但站在其他人立場的考慮下，我想以一般的方式加以說明。存在某一圖形從 X 軸方向看是正方形，從 Y 軸方向看是三角形，從 Z 軸方向看則是圓形，能否想像這是什麼呢？由這個可以說明，任意形體都能由 X、Y、Z 平面的三個投影圖來表示，這是說明三維物體的其中一種方法，其他方法也可說明三維的形體，但這些說明方法屬於製圖的教學，並非數學的教學。至於作圖時，無論是實際物理存在物的形，或是透過圖所表現的抽象物，都有賴於想像力，換言之，作圖時不在於你的筆，而在於執行命令的你，因此作圖時，首先要想像那是什麼，而後再將想像的影像拷貝出來。

利用器具操作，或許有助於心像（image）的形成，但重要的是如何操作自己的心像、如何控制、如何讀取，可是處理時往往並非如此，其理由在於我們看得到物，因此沒使用想像力，若處於無法看到實物的情況，想像力就扮演非常重要的角色，所以有「如果迷路的話，請向盲人問路」的格言。個人相信，人能被訓練成更能活用自我想像力的個體，方法是要先讓自己能清晰地看到自己的心像，舉一個用在 9、10、11 歲學生的例子，雖然沒有用比這更低的年齡，我想結果是相同吧！

請在閉眼後，想像一三角形，並命名頂點分別為 A、B、C，再就以下的問題自問自答。

其中一邊是水平的嗎？

其中一邊是垂直的嗎？

哪一點是在最高的地方呢？

哪一點是在最低的地方呢？

哪一點是在最左邊的地方呢？

哪一點是在最右邊的地方呢？

$\angle ABC$ 是銳角嗎？

哪一個角是最大的角呢？

哪一個角是最小的角呢？

哪一邊是最短的邊呢？

哪一邊是最長的邊呢？

請張開眼睛，其中有人想像的是等邊三角形吧！有人……。我們可以多舉像這樣的例子給學生。剛剛所給的例子，在這個英國朋友給的錄影帶中都有，然而這些題目並非用於測驗，而是希望藉此開發想像力，以下是幾個有關想像力的問題，在解題的思考過程中，請不要畫圖。

1. 四面體有幾個邊？

2. 若 PQ 是立方體的其中一個邊，則不含 P、Q 的面，共有幾個？

3. 在正六邊形 ABCDEF 中，線段 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{BF}$ ，是否會交於一點？

4. 鐘面數字盤的 3 朝上，當指針的位置是四點半時的方向時，真正的時刻是幾點呢？

5. 三條平行線若與另三條平行線以 45° 的角度相交，則會產生多少個小平行四邊形呢？

如果各位覺得有困難，將圖畫在紙上無妨。然而在腦子中操作如上所示的圖像，是一件重要的事。

到目前為止，我們教學時常只偏重於視覺數學的較低層面，亦即只偏重知識、技能、理解等方面，一旦考慮到圖的應用，則我們的教學工作更形複雜，因為即使呈現某些合於特別型態問題的圖給學生，幾乎無所助益，例如在 12 歲學生的班級中，給學生 12 道如下型態的題目：「彼得比馬克高、馬克比比爾高的話，比爾是否比彼得高呢？」只有少數的人利用圖解這道題目，而大多數的人却不用，因此在測驗的一個星期後，讓學生看一般常用的圖（如圖 5），並告訴學生假如他們想用圖的話用之無妨，提示後舉行測驗，結果幾乎所有的學生都利用圖解答，但是全體的答對率却與上回沒有兩樣。這說明了雖然學生懂得怎樣作圖，但還不會應用，這種現象在其他的測驗中，也是如此。

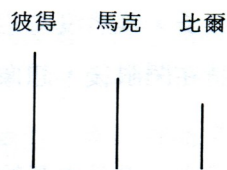


圖 5

「彼得有兒子提摩西及女兒阿理頌，提摩西是察爾斯的父親，阿理頌是莎莉的母親，莎莉的母親是否是察爾斯的姑媽？」

這類的問題，若用圖來解的話，則必須使用不同的圖，但許多學生却用圖 5 的方式

來解，因而無法解題，所以教師在舉例時，只用單一類型的圖是不夠的。此外，在指導圖的應用時，不應只是由符號翻譯成圖，還要讓學生瞭解為何非用圖不可，這提示我們，教師應該更清晰地呈現數學家所使用的解題策略。

有關圖的應用，引起學生注意的方法之一，是透過以下所要談的戰略測驗。由於畫圖只是解決問題過程中的其中一個步驟，而且測驗的目的不在於要求他們實際去解決問題，因此強調的重點在於解題方法而非答案。戰略測驗題目如下：

「A機場在B機場西方120公里處，C機場在B機場北方50公里處，AB機場擁有控制塔的設備，一旦飛機的位置在50公里以內就能發現，如果飛機在連結AC兩機場的直線上飛行，而且飛行的路徑剛好在B機場控制塔的射程內，此時飛機必須在距離C機場的多遠處飛行？」在這測驗題目中，也作了如下的指示：「為了解決這個問題，請回答應如何處理所給的訊息，不拘任何形式，但(1)不可計算，(2)不可用公式，(3)不可利用方程式解題，(4)不必涉及細節，亦即在這題目中必須回答的不是答案，而是解題的方針或計畫，畫任何圖形均可，抑或指出大略的處理方式亦可。」

這個題目以其解題方針的正確性與否，當作評分的標準，如此將能使焦點集中在應用圖的能力上。

由於時間的關係，因此不能在這一方面作更進一步的探討，頗為遺憾。本來預定還要談其他戰略圖使用方法的例子、有助於畫圖想像的技術以及有創意使用圖的例子，然而……。現只能任憑各位的想像罷了。總之，今天希望各位瞭解的是我們面臨的工作——視覺數學的有效指導方法——的重要性與複雜性。謝謝各位。