

月相盤的設計及其教學說明

蔣德勉

國立彰化師範大學生物系

前言

本文係就民國七十九年，刊載於臺北市立天文台發行之天文通訊第 227 期，拙作「星座月相兩用盤之設計」乙文中，有關月相盤設計的錯誤部分，予以探討，並從事修正。復經多次實地校驗，確證無誤後，再行撰寫教學說明，整合而成。全文計分：設計方法、設計成果、教學說明及曆學簡介等四部分。希有助於天文教育之推展。筆者才疏學淺，思慮魯鈍，大錯不察，逕行發表，深自愧怍。所幸尚未製售，不曾誤人。尚祈先進，不吝賜教，以匡不逮。

壹、設計方法

一、天文學的星象與月相，都是三度空間的幾何現象，再加上時間因素，即形成一種四度空間的現象。可是一般初習天文學的學生，都把它看成了二度空間的平面圖形。教學講解的最大困難，就是如何將二度空間的圖形，採用三度乃至四度空間的觀念，予以說明。在本盤的設計過程中，除了充分考慮平面的配置外，隨時運用三度空間轉換二度空間的投影幾何原理，作為本盤設計的基本方法。

二、設計繪圖經常受到工具與技術的限制，無法達到精密的地步。在本盤的設計過程中，凡是遭遇無法達成精密的難題時，即採用三角學的數值計算，以為繪圖的輔助，力求繪圖的精密確實。

三、本月相盤的設計是利用星座盤的背面，以一個朔望月的 29.5 日與一天的 24 小時，同為一個 360° 的周角，作為基礎來推算。就陰曆而言，兩個朔望月即合成 59 日，這就是大月 30 日與小月 29 日的由來。在設計上，乃將三十日置於 29.5 的半天之上，同時亦將太陽的位置，設置在這一時刻的外側，如圖 1 所示，事實上，這就是天文學中的「朔」，如此即可與十五日的「望」遙遙相對。（備註：朔望月 = 29.530589 日）

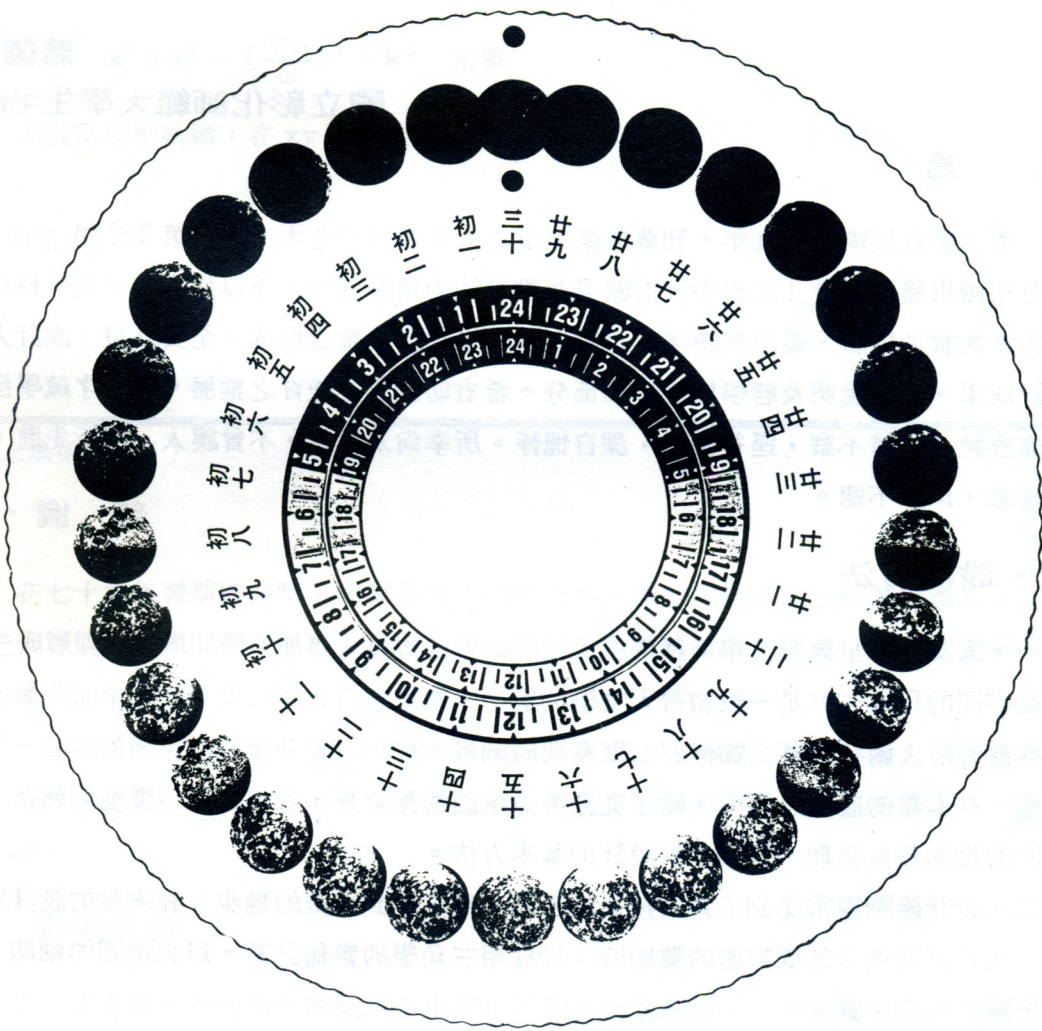


圖 1 內盤上的太陽、月相、日期及時刻的配置圖
(最內層的時刻則為附盤上的月亮升降時刻配置圖)

四、月相盤內的一組 24 小時中，白底為白天，黑底為黑夜，灰底為曙暮，用以區別白與黑夜的時刻。由夜入晝的 6 時前後為曙，由晝入夜的 18 時前後為暮。

五、太陽位置的顯現，為了平面空間的充分利用，並考慮本盤結構的堅固，乃劃分為八個曲軌，其中兩個，則利用兩側露出轉盤的空間。

六、月相的顯示採用中天露出方式，使其與陰曆日期互相一致。但因月相內盤中，陰曆日期及 24 小時的順序方向為反時針方向，而實際月亮升降方向為順時針方向，因此另行增設一個顯示月亮升降時刻的附盤，用資配合，如圖 1 的最內層所示。

七、在外殼之月亮升降時刻半圓的外側，再繪製兩組 90 等分的角度，用以標示各時刻月相距離地平的角度，此一角度，實則是月球運行軌道之垂直截面上的方位角，並不是真正的高度角。因為月球運行的軌道（即白道），隨著太陽運行的黃道而移動。一年之中，太陽黃道在中天的高度，介於 $\pm 23.5^\circ$ （即南北回歸線）之間而移動；但因月球本身具有 5.2° 的黃白交角，因此實際的變異範圍就顯示在 $\pm 23.5^\circ \pm 5.2^\circ$ 之間。正確地說，其間的週期既不是一月，也不是一年，而是 18 年又 11 天，亦即所謂莎羅週期。在一般粗放的觀測中，也沒有如此精密準確的要求。本盤的設計，在這一領域，只能作出實用導向的處理。至於國小課本中拳頭量高的操作實驗，一個拳頭相當於本盤中的 10 度。

八、為求充分說明月相的正確情況，特別利用月相盤外殼下方的兩隅，印製了地球與月球的對比圖形，並添加比例說明，用以強化大小與距離的實際關係；並且在其上方空間，又添印月球對着與背着地球的兩個表面，用以建立正確的月面概念。

貳、設計成果

一、本盤外殼的製作材料與大小尺寸：

本盤的製作材料，採用硬紙板，取其印製方便，價格低廉，且可避免廢棄後，可能造成塑膠不腐的環保問題。至於大小尺寸，是根據使用的方便作為基本的考慮，愈大愈好，但過大則操作不便，因此以一般學生雙手操作的方便為依據，並根據一般紙張的大小規格為 109.5×79.3 公分，取求其最經濟的切割開數，決定外殼的大小為 26×27 公分；即一張全開大紙，可印製 6 個，且各預留 0.4 公分的安全邊。同時亦考慮一般印刷機器，大都屬於半開大小的尺寸（即 80×55 公分），剛好一次印製 3 個，不但觀測使用方便，也可充分發揮經濟效益。

二、內盤的大小：

外殼大小既經決定為 26×27 公分，內盤大小隨即決定為直徑 25.6 公分，取其內外相近，觀測操作與包裝運送均可兩得其便。

三、月相內盤的設計：

月相內盤係就星座內盤的背面，進行設計，茲逐一說明如次：

(一) 月相內盤的外緣齒輪已由星座內盤繪製完成。

(二) 在齒輪內側預留 0.5 公分直徑的太陽紅點。

(三) 太陽紅點的內側，預留 0.4 公分的空隔寬度。

(四) 扣除上述(一)~(三)各項的長度，剩餘的內圓直徑為 23.2 公分，就此推算最大月相圖圓半徑（即圖中各內切小圓的半徑），其演算過程如次：

按朔望月的周期為：

$$29 \text{ 日 } 12 \text{ 時 } 44 \text{ 分 } 2.9 \text{ 秒} = 29.530589 \text{ 日}$$

因此 1 日的圓心角為：

$$360^\circ \div 29.530589 = 12.19074906^\circ$$

作圖如圖 2 所示：

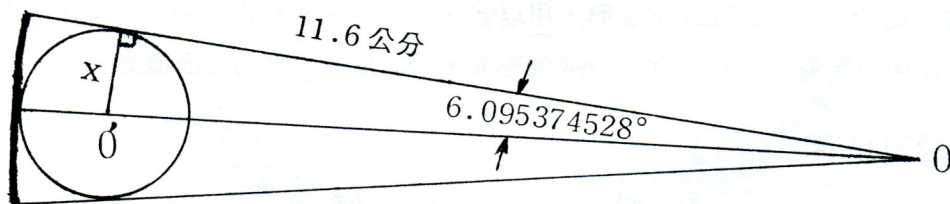


圖 2 月相圖圓半徑推算圖

因內圓半徑為 11.6 公分

設月相圖圓半徑為 x

得方程式：

$$(11.6 - x) \sin 6.095374528^\circ = x$$

$$\text{即 } (11.6 - x) 0.106183798 = x$$

$$\therefore x = 1.231732061 / 1.106183798 = 1.113496747 \text{ 公分}$$

答：月相圖圓的半徑為 1.113496747 公分。

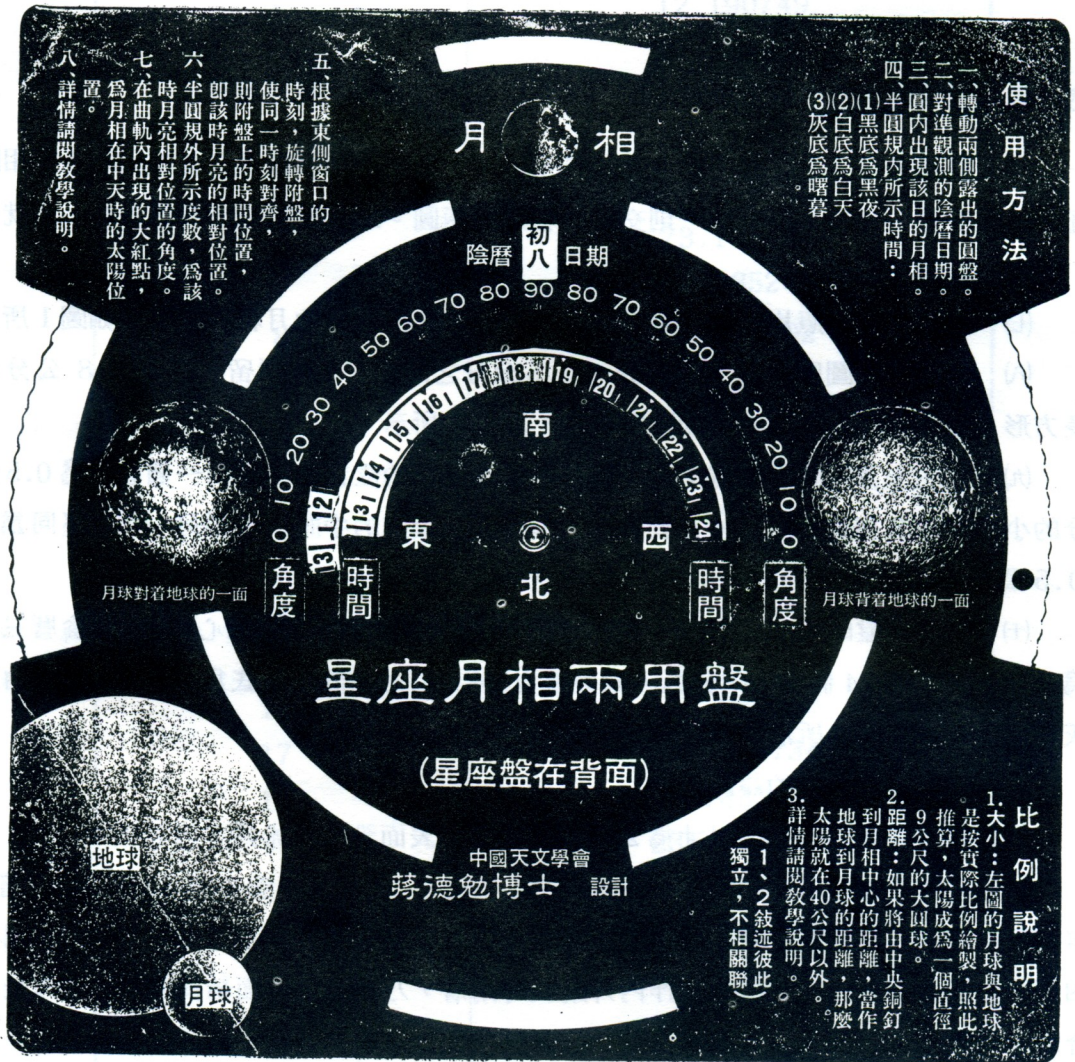


圖 3 月相盤外形圖

(五) 爲求月相內盤中，日期劃分的精確起見，特採用下列數值的計算而設計。根據上(四)的推算所得：

$$\begin{aligned}1 \text{ 日的度數} &= 360^\circ \div 29.530589 \\ &= 12.19074906^\circ\end{aligned}$$

然後由此推求朔望月中各日度數，如下頁朔望月中各日的度數表所列。

(六) 根據求得月相圖圓半徑爲 1.113496747 公分，即可繪製彼此相切的各月相圖圓；其中不足 1 日的月相圖圓，則交割於相鄰的兩圓。這是陰曆三十日的月相，也就是「朔」，如圖 1 所示。

(七) 將標準月相照片，以製版印刷手法，印製在對應的月相圖圓中，如圖 1 所示。

(八) 在各月相圖圓內側 1.1 公分～2.5 公分之間的正中，預留 1.4×0.8 公分的長方形。並各填註初一至三十的陰曆日期，如圖 1 所示。

(九) 在三十月相圖圓外側中央，所預留太陽紅點的位置上，繪製一個直徑爲 0.5 公分的小圓，在其相對的內側，介於日期方框與月相圖圓的中間，繪製另一個直徑同爲 0.5 公分的小圓，且各印製爲實心的紅點，如圖 1 所示。

(十) 再在本盤的中心，另作半徑 4.8 公分及 5.8 公分等兩個同心圓。以陰曆三十爲基準，等分爲 24 個相等的圓弧，繪製晝夜 24 小時的時間，黑底爲黑夜，白底爲白天，灰底爲曙暮，如圖 1 所示。

四、月相盤外殼表面的設計：

月相盤外殼表面的大小尺寸爲 26×27 公分，表面設計分述爲下列七項：

(一) 太陽位置顯示曲軌窗，是以本盤中心爲圓心，以 12.5 公分及 12 公分爲半徑，作上下兩個同心圓弧曲軌窗；又以同前圓心，再以 9 公分及 8.5 公分爲半徑，作四隅的四個同心圓弧曲軌窗。其所以分作內外斷裂的兩層，乃是爲求盤面結構的牢固，俾能符合理論的說明，但又不失實用的價值，這就是一種介於兩難之間，匠心運用的成果。爲了避免導致錯誤概念的形，特在外殼表面下端左右兩隅，添印比例說明的圖文；又添印月球的兩個表面圖，如圖 3 所示。

(二) 月相圖圓窗則於本盤中心線上端，以距中心（圓心）10.5 公分處爲圓心，以 1.1 公分爲半徑作一個月相圖圓窗，與月相內盤上各月相圖圓，相互配合而呈一致。

(三) 陰曆日期窗，於本盤中心線上端，距中心 8.2 公分與 6.8 公分之間的中央，作對稱於中心線的 1.4×0.8 公分的長方形，並與月相內盤上的陰曆日期互相配合，如圖 3 所示。

朔望月中各日的度數表

日 期	度 數
1	12.190749
2	24.381498
3	36.572247
4	48.762996
5	60.953745
6	73.144494
7	85.335243
8	97.525992
9	109.716742
10	121.907491
11	134.098240
12	146.288989
13	158.479738
14	170.670487
15	182.861236
16	195.051985
17	207.242734
18	219.433483
19	231.624232
20	243.814981
21	256.005730
22	268.196479
23	280.387228
24	292.577977
25	304.768727
26	316.959476
27	329.150225
28	341.340974
29	353.531723
29.530589	360.000000

(四) 月亮升降時刻顯示小窗，是根據月相內盤中，升降時刻圓周的半徑而繪製，即以5.8公分及4.8公分為半徑，並以本盤中心為圓心，作同心圓弧。然後，於東側之東西基準線的上下，各截取 10° （共 20° ）而切割的弧段而成，如圖3所示。

(五) 附盤嵌裝半圓框，是以3.8公分為半徑，並以本盤中心為圓心，作一半圓，予以切割。然後，再於半圓外側，沿着東西基準線，切割1.2公分，俾供附盤嵌入裝釘，如圖3所示。

(六) 附盤為3.8公分半徑的小圓盤，並於其周邊內側，繪製寬度為0.9公分的24小時之時間刻度，如圖1的中央所示。

(七) 外殼左右兩側的中央，露出內盤旋轉的缺口，採用圓弧曲線，以配合內盤太陽紅點的顯示，整個月相盤的外形，如圖3所示。

參、月相盤的教學說明

一、月相的變化：

首先請將月相盤中的陰曆日期，對準初一，此時月相窗內，漆黑一片，幾乎看不見月亮的影子，請循序轉到初二、初三，我們可以看見月相漸漸呈現為眉月，不但愈來愈明顯，而且光亮的部分也愈來愈寬大。經過初五、初六，到了初七，我們看見月相已經成為半圓的形狀，古人想像其為弓弦的樣子，同時在高緯度的黃河流域一帶觀測，弦（半圓直徑）常位於半圓的上方，因此叫做上弦月，再繼續轉到初八、初九，月相由半圓而漸凸出，到了初十左右，就成為典型的凸月。然後再繼續凸出，到了十五，月相成為光亮飽滿的全圓，這叫做望月，俗稱滿月。從此以後，月相就漸漸收縮，又呈現凸月的形狀，到了二十二日附近，月相則呈現上半圓的形狀，弦常位於半圓的下方，因此叫做下弦月。再接下去，月相更形收縮，到了二十七日，又呈現為眉月。請注意，此時眉月的位相與初三眉月的位相，正好相反。嚴格地說，初三的眉月，因月相在下方，叫做下眉月；二十七日的眉月，因月相在上方，叫做上眉月。二十九日的月相已經很難看見，除了月相纖細暗淡的原因外，月亮的升降與太陽的升降幾乎接近同步，也是一個非常重要的原因。這將留待月亮升降的時刻一節中，再予討論講解。

二、月相變化的原因：

月相的變化已如上節所述，變化的原因何在？則是我們在剛開始學習天文的時候，所迫不及待而要提出的問題。首先，我們要建立一個立體的觀念，尤其是國小的小朋友們，因為我們所看到的月亮，幾乎都把它看做一個平面的圓形。可是實際上，月亮是一

個立體的圓球。所謂月相，就是從地球看去，月球表面上，能夠看到陽光所照亮的部分而已；這看到的光亮部分之變化，即月相變化。現在請拿出月相盤，逐步操作，以為教學的實驗與證明。請將月相盤的陰曆日期，對準三十，然後閱讀本盤下端的比例說明。本盤為了製作的要求，將地球的大小、太陽的大小及地球到太陽的距離，都不成比例地大肆縮小；相對地，月球的大小與地球到月球的距離，則又大肆放大。請記在心頭，如果將月相的大小，作為月球的比例基準，則本盤中央代表地球的銅釘，其大小就要跟本盤左下角的地球同大；在上方窗軌中，代表太陽的小紅圓，則成直徑 9 公尺的大圓球，而且位於 40 公尺半徑的圓周上。現在我們可以講解盤中三十日的月相，此時太陽、月球及地球，看起來好像是同在一條直線上。事實上並不盡然，因為我們已經將它們之間的立體關係，改變為平面關係，因為左右方向是在同一直線，但上下方向不在同一直線的話，在立體（幾何）來說，仍然不在同一直線。如果真的在同一直線，那麼此時就會出現很少見的日蝕現象。三十日的一天，月球與太陽幾乎是同時升降。換言之，我們幾乎沒有機會看見月亮。現在正是陰曆日期對準三十，請看此時的月球位於太陽與地球之間，地球上所能觀測到的月球，只是沒有陽光照射到的一面，同時又在白天，因此根本看不到月亮，這就是朔。〔註：此處所稱的三十，是指月相內盤中，繪寫印製陰曆日期的三十日而言。嚴格地站在幾何學的觀點來看，這三十日只是幾何空間中的一個點，代表陰曆時間（lunar calendar time）中之 29.530589 日，在 360° 圓周中的一個點而已。如果換成陰曆時間的小月來看，這一點是陰曆下一個月初一中午的 12.734136 時，請看下列的演算：

$$\begin{aligned}(29.530589 - 29) \times 24 &= 0.530589 \times 24 \\ &= 12.734136 \text{ (時)}\end{aligned}$$

如果換成再下續陰曆的大月來看，則已是陰曆下一個月初一凌晨的 1.468272 時，再看下列的演算：

$$\begin{aligned}\{ (29.530589 \times 2) - (29 + 30) \} \times 24 &= \{ 59.061178 - 59 \} \times 24 \\ &= 0.061178 \times 24 \\ &= 1.468271 \text{ 時}\end{aligned}$$

因此文中所稱的三十日，只是幾何空間中，一個點的名稱而已，其實際的意義，是陰曆時間初一中的一個時刻；也就是天文學中，朔的一個定點。上述只是最初兩月的演算範例，接下去的各月，可依此類推，但愈來愈複雜，且已超出本文範圍，恕不詳述。〔現在請對準初一，雖然太陽的位置已經不在地球與月球的連線上，但是仍然無法看見月亮，其原因有三：①是月相太纖細暗淡了。②是能夠觀測的時間太短暫了。③是太陽

下降後的迴光反照太強；如果再加上陰雨霧靄的原因，更是不易觀測，在今天環境污染嚴重的都市或工業地區，地平線附近灰黃的一片，能見度大降，根本就看不見。古代奉行陰曆的回教國家，新月的觀測因難得一見而成宗教儀式。現在請再旋轉，經初二而到初三，月相已顯現為眉月，太陽已偏離地月連線的右側，並在地日連線之延長線上40公尺的遠處，且是一個9公尺直徑的大圓球。此時要特別注意兩個現象：①是眉月的凸面，凸向太陽所在的方向。②月亮是一個立體的圓球，太陽位於地球與月球的右前方，我所能看見的部份，只是月球被陽光照亮的小部分而已，其餘均為月面沒有陽光照射的陰暗部分。有時候，月球表面的陰暗部分，也會出現暗淡而模糊的月相，這是因為地球的表面，有時會將強烈的陽光，反射到月球的陰暗區域，所引起的現象。請再繼續旋轉，經初四、初五、初六而到初七。此時，太陽已經到達地球與月球的正右方，我們剛好看見月球的半個側面，這叫做上弦月。再繼續旋轉，經初八、初九而到初十，月相成為凸月，這是因為太陽已經到達月球與地球兩者的右前方，從地球上觀測月球，能夠看見陽光照亮的部份，愈來愈多，同時受到投影方向的影響，漸漸凸出。必要時，可指導同學，站在不同的角度，面向亮光，實驗觀測，以求體會瞭解。再繼續旋轉，到了十五日，這月相叫做望月。此時太陽、地球及月球位於一條直線上，我們在前面已經討論過，並不盡然，如果真的在同一直線上，就會出現月蝕現象。過了十五日以後，太陽的位置，由正前方移向左前方，到了十九日，月相又縮小為凸月，光亮部份仍向着太陽，黑暗部分則向着地球，請與初十的凸月互相對照，以求融會貫通。到二十三日，月相成為半圓形的下弦月。在上弦月與下弦月前後，是利用天文望遠鏡觀測月球表面的最佳時刻，尤其在明暗交界附近，因為對比明顯且光線適中。接下去，經過二十七日前後的眉月，又回到朔月。這就是我國所謂月有盈虧的由來。

三、月亮升降的時刻：

現在我們要討論有關月亮上升與下降的時刻，這是一個非常複雜而艱難的問題。在本文中，我們不可能詳細討論，只能就本月相盤所具有的功能，予以講解發揮。首先，我們還是先就月亮升降時間的複雜性，略為敘述，條列如下：

(一) 月球繞行地球的軌道（白道），具有 $\pm 23.5^\circ \pm 5.2^\circ$ 的變化範圍；換言之，在18年又11天的週期中，至少有： $+28.7^\circ$ ， $+18.3^\circ$ ， -18.3° 及 -28.7° 等四個顯著的極限值。事實上，白道是無時無刻不在變化的。

(二) 月球繞行地球的軌道，除了上述的高低變動外，還有距離的變動。換言之，在29.5天的周期中，有接近地球的近地點，也有遠離地球的遠地點，並且同樣遵照凱卜勒定律運行，計算的繁雜，就可想而知了。

(三) 在本盤的設計中，我們採用朔望月周期為 29.530589 天，亦即每天後延 $24 \times 60 \div 29.530589 = 48.76399623$ 分鐘，這祇是一個理論平均值，各地因受緯度及上述(一)與(二)的影響，並不一致。

以上都是一些提綱挈領的重點。現在言歸正傳，請拿出月相盤，在月相盤的中央，有一個圓形的附盤，其圓周上繪有代表黑夜時間的黑底白字數字與代表白天時間的白底黑字數字，中間灰底黑字則代表曙暮時間。當陰曆日期對準三十日時，在東方一側的小窗口內，出現曙光時間的 6 時，此時請將附盤旋轉調整，使附盤的曙光 6 時與小窗口內的 6 時對準。注意：小窗口內的數字方向是與附盤上的數字方向相反。此時附盤表示，三十日的朔月，在早晨 6 時左右，由東邊地平線上升，循着附盤圓周上的 7、8、9、10 及 11 而到 12 時，然後再循下午的 13、14、15、16 及 17 而到傍晚 18 時下降。而附盤圓周上的時刻，也就是該時刻的月亮位置；其外側的角度，則表示該時月亮距東方或西方地平線的度數。在本盤的操作中，也可以發現，太陽與月球在三十日，幾乎是「同步」旋轉的。朔月幾乎沒有辦法看得見，初一的情形也相差不了多少。茲再以初二為例說明如下：將陰曆日期對準初二，然後旋轉附盤，並調整如圖 4 所示，如有不合，必然操作有誤。請操作以為對照，首先將陰曆日期對準初二，再看月相盤左方的東側小窗，窗內顯示月亮上升的時刻是 7:20，請即旋轉附盤，使附盤上的 7:20，對準小窗內的 7:20，即得圖 4 的情形。在初二這天的月亮上升時刻已經是早晨 7:20，此時太陽已經上升；到了下午暮光以後的 19:20，太陽才下降。事實上，整個白天，由於陽光太強，無法看見月亮，真正能夠看見月亮的時間，只有在暮光將盡，接近真正黑夜的大約 20 分鐘內；接着眉月就下降到地平線以下，什麼也看不見了。初三的月出與月沒，雖然也同樣後延 48.7 分鐘，但增加的時間，都是可以看見月亮的真正黑夜時間，這使初三眉月的可見時間，幾乎比初二增加三倍以上。初四以後，月亮可見時間的增加，就規律地每日遞增 48.7 分鐘。至於月底附近的眉月，因為上升於清晨的曙光時刻，而且接着又遭到強烈陽光的淹沒，不是早起的人們，更是不容易看見。

肆、曆學的簡介

本簡介分為陰曆及陽曆等兩部分討論。

一、陰曆：

這是利用月亮盈虧的週期，也就是朔望月，作為一年內之總天數的劃分，因為一個朔望月的週期是 29.530589 天，兩個朔望月合起來共有 59.061178 天，為了簡便起見，

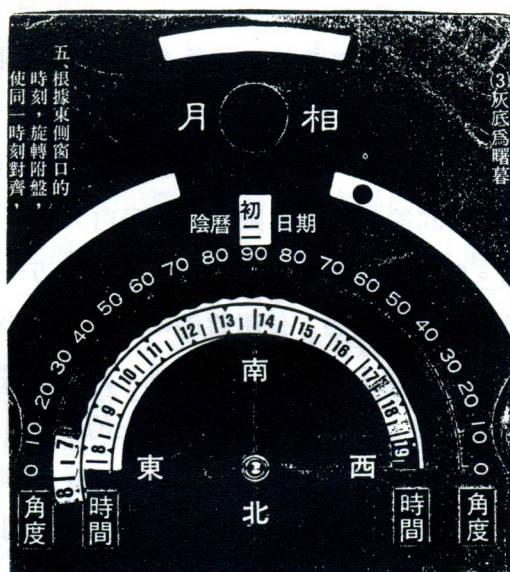


圖4 初二月亮升降時刻的正確圖示

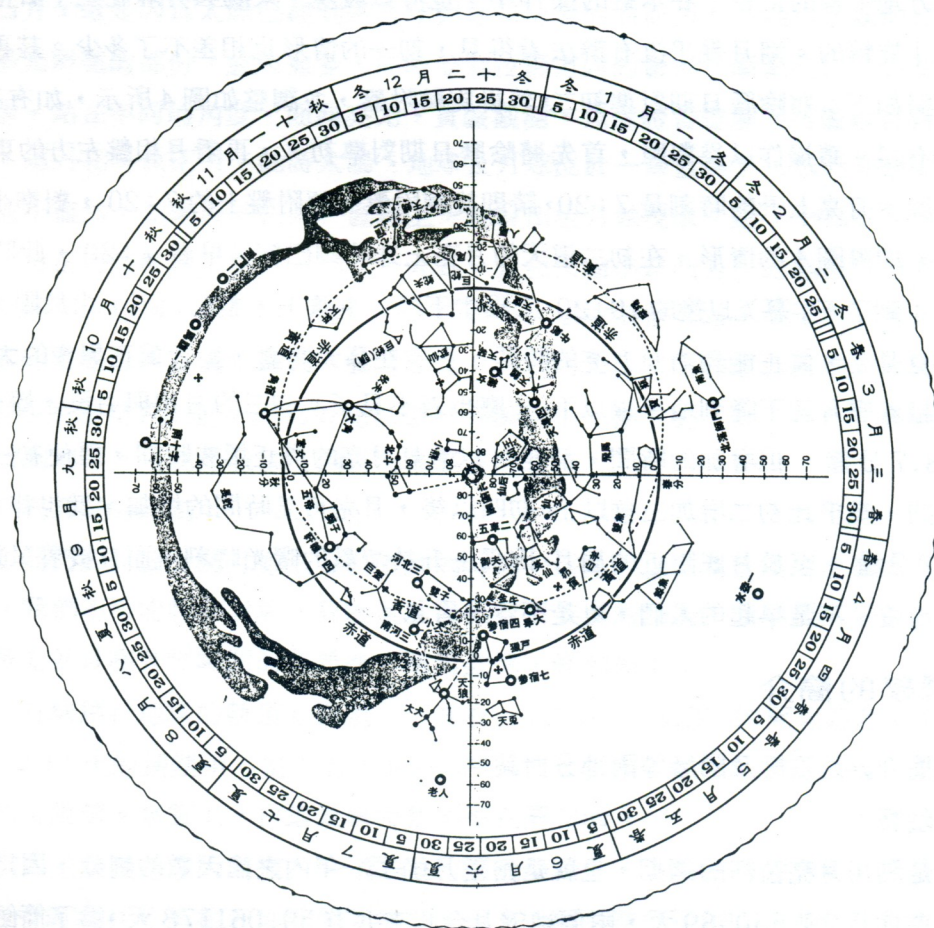


圖5 星座盤的內盤圖

採用朔望月而建立的陰曆，就有大月 30 天與小月 29 天的規定。但是一個朔望月只有 29.530589 天，12 個朔望月合起來，也只有 354.367068 天。可是一年（回歸年）有 365.242199 天，兩者相差 10.875131 天。累積了三年就會多出 32.625393 天。換言之，三年下來，陰曆就會少了一個月，這就是陰曆三年要增添一閏月的由來。請看圖 1 內盤上的月相圖，完整的月相小圓有幾個？剛好 29 個，即 29 整天。在其初一與二十九日的中間，有一個不完整的小圓，這就是不完整的 0.530589 天。

二、陽曆：

現在請看圖 5 星座盤的內盤圖，圖中圓周上，每月中的大單位（格）代表 5 天，小

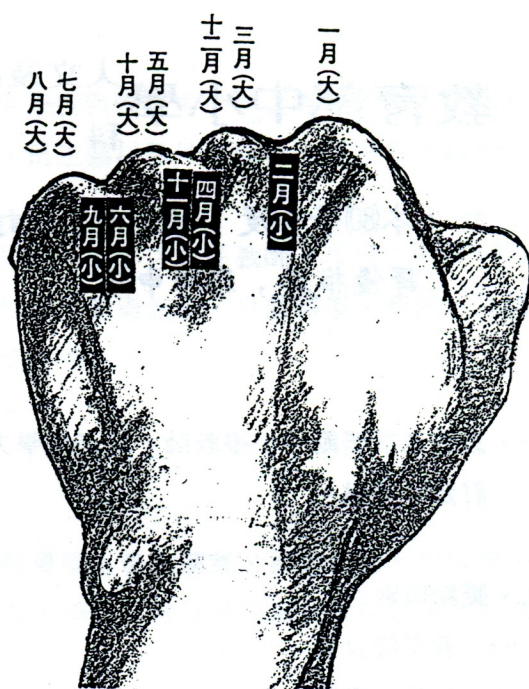


圖 6 格曆大小月圖

單位（格）代表 1 天。整個計算下來，一年（回歸年）共有 365 天，在 12 月 31 日的後面，還有一個只有 $1/4$ 天的小小格。這告訴我們，真正的一年是 $365 \frac{1}{4}$ 天。經過四年的累積，這個零頭數，就會合成 1 天。換言之，每隔 4 年，就會多出 1 天，這 1 天叫做閏日，含有閏日的一年叫做閏年。這就是陽曆每隔四年，出現一個閏年的由來。今日全球通用的曆法是叫做格勒哥里曆，簡稱格曆，是一個典型的陽曆。這是西曆 1582 年，天主教教宗格勒哥里十三修訂舊有的儒略曆後，所頒行的曆法。格曆規定一年為 12 個月，月有大小之分，其大月與小月的分屬是：一月大，二月小，三月大，四月小，五月大，六月小，七月大，八月大，九月小，十月大，十一月小，十二月大，一般均利用拳頭上的凸凹，順序點數，如圖 6 所示；大月 31 日，小月 30 日，但二月的小月只有 28 日，閏日一律添加在二月。當然，這些規定都有他們歷史與文化的背景，本說明就略而不談了。事實上，一年具有 $365 \frac{1}{4}$ 天的說法，只是一種約略的說法，比較精確的數據：

$$1 \text{ 年（回歸年）} = 365.242199 \text{ 天}$$

根據上式的數據，每 4 年增添一天的說法，也不十分準確，因為 $4 \times 0.242199 = 0.968796$ 還差 0.031204，因此格曆對於閏年，又立下了許多更精細的規定。詳情請參閱筆者編寫之「我國舊曆及其他各曆之簡介」的編序教材。