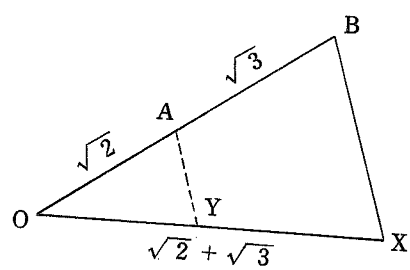
教學相長實例(平方根求單位長一以貫之的解法)

王淑霞
省立新竹女中數學教師

師：已知單位長，尺規作圖求作$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$1+\sqrt{2}$，是一般尺規作圖的基本問題，而已知$\sqrt{2}$，求作1，甚至已知$1+\sqrt{2}$， 求作1，已知$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，求作1，都是逆向思考引出的問題。科教月刊132期平方根求單位長一文的解法，也是一般人很自然用的解法，都是沿用基本問題的解法:「由已知線段長出發，反覆使用畢氏定理堆砌出整數長的線段，再求一單位」，但此法用在下例：已知 $1+\sqrt{2}$，求1時，由畢氏定理作 $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$，再減掉$1+\sqrt{2}$得1，感覺這種作法太沒有一般性，例如用在“已知$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，求作1”這題，還是得見機行事去湊，由$\sqrt{2}+\sqrt{3}\rightarrow\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\rightarrow\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$，再用$3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-(2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})=1$，(正在思索時)

學生黃：提出一個方法，但不知對否，與老師討論，先任取一個線段1，作$\overline{OA}=\sqrt{2}$，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，再把已知線段$\sqrt{2}+\sqrt{3}$移到$\overline{OX}$，連$\overline{BX}$，過A作$\overline{AY}$平行$\overline{BX}$，則$\overline{OY}$即為$\sqrt{2}$，再作1就可以了。(如圖(一))



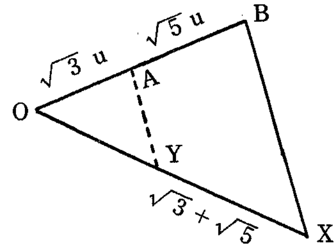
圖(一)

師：太好了，把這個解法略爲修改一下，把先取一線段 1，修改爲 u 單位，作 $\overline{OA}=\sqrt{2}\,u$，$\overline{AB}=\sqrt{3}\,u$，以免與所要求的 1 單位搞混，妳的解法給我很大的靈感，我可以把它發揚光大一下，凡是由 a，b 經 +，−，×，÷，$\sqrt{\ }$，組合而得的線段當作已知，反求作 1 單位時，均可利用黃生所提的方法一以貫之作出。

例 1. 已知 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 求作 1

解：1. 任取線段 u，作 $\overline{OA}=\sqrt{3}\,u$，$\overline{AB}=\sqrt{5}\,u$，及 $\overline{OX}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$，如圖(二)

2. 連 $\overline{BX}$，作 $\overline{AY}\,/\!/\,\overline{BX}$，得 $\overline{OY}=\sqrt{3}$，再作 1 即可。

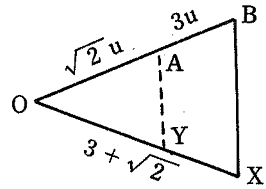


圖(二)

例 2. 已知 $3+\sqrt{2}$ 求作 1

解：1. 任取線段 u，作 $\sqrt{2}\,u=\overline{OA}$，$3u=\overline{AB}$ 及 $\overline{OX}=3+\sqrt{2}$（已知線段），如圖(三)

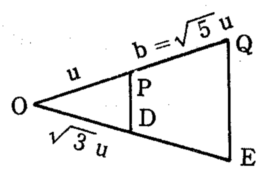
2. 連 $\overline{BX}$，作 $\overline{AY}\,/\!/\,\overline{BX}$，$Y\in\overline{OX}$，則 $\overline{XY}=3$，再作 1 即可。



圖(三)

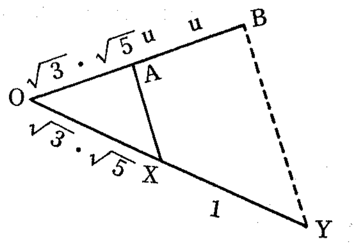
例 3. 已知 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$，求作 1

解：1. 任取線段 u，作 $\sqrt{3}\,u=a$，$\sqrt{5}\,u=b$，再作 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}u=c$，c 的作法原理爲設計使 c 爲第四比例項，由 $a\cdot b=c\cdot u$，得 $u/b=a/c$，得作法如圖(四)，得 $\overline{DE}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,u$。

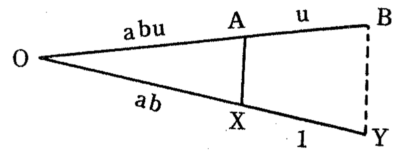


圖(四)

2.作$\overline{OA}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,u$，$\overline{AB}=u$ 及 $\overline{OX}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$，連$\overline{AX}$， 過 B 作 $\overline{BY}\,/\!/\,\overline{AX}$，則$\overline{XY}=1$，爲所求如圖(五)。



圖(五)



圖(六)

例4.已知（$\sqrt{2}+\sqrt{5}$）·（$\sqrt{7}+\sqrt{6}$）求作1

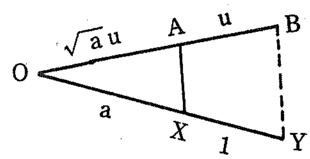
解：1.模仿例3，令a＝（$\sqrt{2}+\sqrt{5}$），b＝（$\sqrt{7}+\sqrt{6}$），任取線段u，先作au，bu及abu。

2.再作如圖(六)，則$\overline{XY}=1$，即爲所求。

例5.已知$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$，求作1

解：1.令 a＝（$\sqrt{2}+\sqrt{5}$），任取線段u，利用比例中項的求法，作u與au的比例中項$\sqrt{a}\,u$。

2.再作如圖(七)，則$\overline{XY}=1$即爲所求。



圖(七)

作了上面5個例子，相信讀者對於此一以貫之的解法必有所體會了吧!讀者可否自行試試利用上述一以貫之的解法解：已知$\sqrt{3}$求作1。