一九九一年第三十二屆 國際數學奧林匹亞競賽試題

陳昭地譯*
國立臺灣師範大學數學系

第一天（日期 7 月 17 日；地點瑞典的辛格士納城，作答時間 4 ½小時，每題 7 分）

1. 在給定 ΔABC 中，設 I 爲其內心，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的內角平分線分別交其對邊於 A'、B'、C'。試證：

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leq\frac{8}{27}$$

2. 設 n 爲大於 6 的整數，且 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ 爲小於 n 且與 n 互質的所有自然數，如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_k-a_{k-1}>0,$$

試證 n 必爲質數或者爲 2 的某個正整數次方。

3. 設 $S=\{1,2,3,\cdots\cdots,280\}$，求最小的自然數 n 使得 S 的每個有 n 個元素的子集都含有 5 個兩兩互質的數。

第二天（日期 7 月 18 日，地點、作答時間及每題題分同第一天）

4. 設 G 爲一個有 k 條邊的連通圖，試證可以將 G 的邊編成 $1,2,3,\cdots\cdots,k$ 的號碼使得在每一個屬於兩條或更多條邊的頂點，過該頂點各條邊的編號數的最大公因數爲 1。

[圖 G 乃由一個其元素稱之爲頂點的點集合與連接某些不同頂點的邊的集合所組成，而且每一對頂點 u、v 至多屬於一條邊。圖 G 稱之爲連通的，其意爲 G 的每

---

*：本試題依第 32 屆國際數學奧林匹亞英文版本及有關譯文規定譯成，有興趣的讀者可將解出的問題逕寄給譯者，其完整的解答策略評析將在以後陸續刊出。

一對不同頂點 x、y 必可找到一個頂點序列 $x = v_0, v_1, v_2, \cdots\cdots, v_m = y$ 使得每一對 v_i, v_{i+1}（$0 \leq i < m$）被 G 的一條邊連接。]

5. 設 P 爲 ΔABC 內的一點，試證 $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ 三個角中至少有一個小於或等於 $30°$。

6. 無窮實數列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ 稱爲有界，如果有一常數 C 使得 $|x_i| \leq C$ 對每個 $i \geqslant 0$ 都成立。

任給實數 $a > 1$，試找出一個有界無窮實數列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ 使得

$$|x_i - x_j| \, |i-j|^a \geq 1$$

對每對相異非負整數 i、j 都成立。