一九九一年第三屆亞太數學
奧林匹亞試題解答評析

陳昭地
國立臺灣師範大學數學系

亞太數學奧林匹亞的試題，根據其規程是由各參與國於每年九月中旬以前（下屆開始提前在每年7月底以前），分別提供2道試題，各有不同難度並配合大學數學基本課程之準備，原設計者應提供試題資料來源、設計精神及有關解答方案、分段配分原則，再由當年資深參與國中之問題委員會，就全部提供的問題，加以研究圈選五題，初步以最高機密方式，分送各參與國代表，各參與國代表接到後，可迅速反應不適合問題之意見，過一段時間後始定妥（陳昭地，民80年a；APMO，1991）。閱卷規則、得分配分方式均需依規定處理，未詳列出的解法應配合專業知識來判斷，對配分有疑慮需作更動時，應由各國代表電傳試題委員會主席或亞太數學奧林匹亞主席的同意認可。今年是我國首次參加，遲至今年一月才成立中華民國亞太數學奧林匹亞競試委員會，代表人選才遲到第一次委員會議後始確認；因此，我國並未提供本屆試題。不過從下屆開始，我國就會如期提出，以反應我國的數學教材綱要水準，並負參與國應付的義務。以下提出本屆試題之中文解答及有關評析資料（陳昭地，民80年b；Chen, 1991）。

問題1：

在ΔABC中，G為其重心，M為BC的中點，設X在AB上，Y在AC上，使得X，G，Y三點共線且XGY與BC平行，若XC與GB相交於Q，YB與GC相交於P，試證ΔMPQ與ΔABC相似。

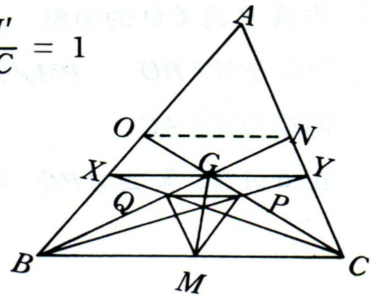
解(一)　（利用到西瓦定理之解法）

(1) 延長BG交直線AC於N，延長CG交直線AB於O，則N、O分別為兩邊AC、AB的中點。

(2) 因為G為重心，所以$NG:GB=1:2$

(3) 因為$GY /\!/ BC$，所以$\Delta NGY \sim \Delta NBC$，$CY:YN=2:1$

(4) 延長NP交直線BC於M'，則由ΔBCN經由P之西瓦定理



知 $\dfrac{BM'}{M'C}\cdot\dfrac{CY}{YN}\cdot\dfrac{NG}{GB}=\dfrac{BM'}{M'C}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{BM'}{M'C}=1$

所以 $BM'=M'C$ ，即 $M'=M$

所以 $MP \parallel AB$　　同理 $MQ \parallel AC$

(5) 僅再證： $PQ \parallel BC$ 即可：

因爲 $\Delta CAB \sim \Delta CNM$

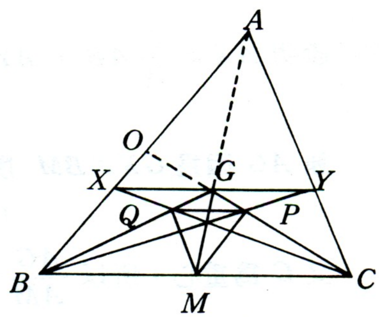
所以 P 爲 MN 的中點，　同理 Q 爲 MO 的中點。

所以在 ΔMNO 中， $PQ \parallel NQ$ 而 $NO \parallel BC$

所以 $PQ \parallel BC$ 得證。

解(二)　（未直接利用西瓦定理的證法）

證明： $PQ \parallel BC$ ， $PM \parallel AB$ ， $QM \parallel AC$ 即可



(1) 連 AG ，並延長 GC 交 AB 於 O

(2) 因爲 G 是 ΔABC 的重心， M 爲 BC 的中點

所以 A、G、M 三點共線

(3) 因爲 $GY \parallel BC$

所以 $\dfrac{GY}{MC}=\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}$

所以 $GY=\dfrac{2}{3}MC=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{3}BC$

(4) 因爲 $GY \parallel BC$　$\dfrac{GP}{PC}=\dfrac{GY}{BC}=\dfrac{1}{3}$

所以 $GP=\dfrac{1}{3}PC$　　$GC=\dfrac{4}{3}PC$　　$GP=\dfrac{1}{4}GC$

(5) 同理 $GQ=\dfrac{1}{4}GB$

(6) 因爲 $\dfrac{GP}{GC}=\dfrac{GQ}{GB}\left(=\dfrac{1}{4}\right)$　　所以 $PQ \parallel BC$

(7) $PO=GO+GP=\dfrac{1}{2}GC+\dfrac{1}{4}GC=\dfrac{3}{4}GC=PC$

所以 P 爲 CO 的中點

(8) 因爲 P 爲 CO 的中點　　M 爲 BC 的中點

所以 $PM /\!/ BO$　　$PM /\!/ AB$

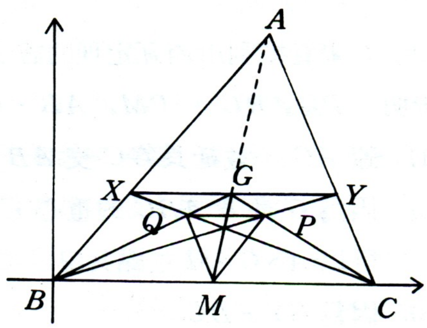
(9) 同理 $QM /\!/ AC$

(10) 在 ΔABC 與 ΔMPQ 三邊兩兩平行，故知相似。

解(三)

(1) 適當取一個直角坐標系，將欲證明之圖形包含在內，並令 A、B、C 各點坐標分別爲 $A(b, c)$，$B(0, 0)$，$C(a, 0)$

由於 M 爲 BC 中點，所以 $M(\frac{a}{2}, 0)$



G 爲重心，所以 $G(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$

(2) 證明 $AX = \frac{2}{3}AB$，$AY = \frac{2}{3}AC$

連 AG 因爲 $GX /\!/ BM$ 所以 $\frac{AX}{AB} = \frac{AG}{AM}$

又 G 爲重心，所以 $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$，$\frac{AX}{AB} = \frac{2}{3}$

證明了(2)後，根據分點公式得知 $X(\frac{b}{3}, \frac{c}{3})$，$Y(\frac{2a+b}{3}, \frac{c}{3})$

(3) 已知各點坐標 GB，CX，BY，GC 之直線方程式

得

$$GB: y - \frac{c}{3} = \frac{c}{a+b}\left(x - \frac{a+b}{3}\right)$$

$$CX: y = \frac{c}{b-3a}(x-a)$$

$$BY: y - \frac{c}{3} = \frac{c}{2a+b}\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)$$

$$GC: y = \frac{c}{-2a+b}(x-a)$$

(4) Q 爲 GB，CX 交點，P 爲 BY，CG 交點

解 $$\begin{cases} y-\dfrac{c}{3}=\dfrac{c}{a+b}\left(x-\dfrac{a+b}{3}\right) \\ y=\dfrac{c}{b-3a}(x-a) \end{cases}$$

得 $x=\dfrac{a+b}{4}$　　$y=\dfrac{c}{4}$

解 $$\begin{cases} y-\dfrac{c}{3}=\dfrac{c}{2a+b}\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right) \\ y=\dfrac{c}{-2a+b}(x-a) \end{cases}$$

得 $x=\dfrac{2a+b}{4}$　　$y=\dfrac{c}{4}$

即 $Q\left(\dfrac{a+b}{4},\dfrac{c}{4}\right)$，$P\left(\dfrac{2a+b}{4},\dfrac{c}{4}\right)$

(5) 因爲

$AB=\sqrt{b^2+c^2}$　又　$MP=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2a+b}{4}\right)^2+\dfrac{c^2}{16}}$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{16}+\frac{c^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{b^2+c^2}$$

$BC=\sqrt{a^2}$　，　$PQ=\sqrt{\left(\dfrac{2a+b}{4}-\dfrac{a+b}{4}\right)^2+\left(\dfrac{c}{4}-\dfrac{c}{4}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{a^2}$$

$$AC=\sqrt{(b-a)^2+c^2}\ ,\ MQ=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{a+b}{4}\right)^2+\frac{c^2}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{16}+\frac{c^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(b-a)^2+c^2}$$

所以 $\dfrac{AB}{MP}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{4}{1}=4$

$$\frac{BC}{PQ}=\frac{\sqrt{a^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{a^2}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{AC}{MQ}=\frac{\sqrt{(b-a)^2+c^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{(b-a)^2+c^2}}=\frac{4}{1}=4$$

即 $\dfrac{AB}{MP}=\dfrac{BC}{PQ}=\dfrac{AC}{MQ}=4$

所以 ΔMPQ 與 ΔABC 相似（SSS）得證之

評析：

(1) 本試題是由今年總部主辦國澳洲亞太數學奧林匹亞委員會設計提供。

(2) 本題證法較多，但以利用西瓦定理之證法（解㈠）最為簡潔完美，解㈡亦佳；解㈢涉及坐標幾何，但可能產生 $b=3a$ 或 $b=2a$ 的情形，最好進一步討論其情況（事實上不困難），始較嚴謹完美，故就解本題之品質來說，解㈢不如解㈠或解㈡。

(3) 國內學生解析幾何的能力很強，故參與 53 位學生很多學生利用解㈢方式證題，因此全部 53 位學生此題之平均值高達 5.55，鑑別指數為 0.60，全 10 名代表都拿滿分（7 分），遠超所有參與國全體代表平均值 5.38 之水準。

(4) 全部參與國代表此題之平均值 5.38，鑑別指數為 0.68，在全部 5 題中，屬最簡易的題目，但鑑別指數仍屬相當理想。

(5) 我國前 10 名代表在全部參與國中，此題得滿分，最爲出色；原設計者澳洲本國（ 5.1 ）並不突出，且低於平均值。

(6) 我國參與競試學生，亦經常發現配合向量概念輔助解題，應與國內高一下、高二上之數學教材訓練有關。

(7) 國內參與競試學生中亦有利用複數幾何配合解題者。

問題 2：

設平面上有997點，將每兩點的連接線段的中點以紅點標示，試證所得紅點至少有1991個。

您能否找到一個特例使紅點恰有 1991 個？

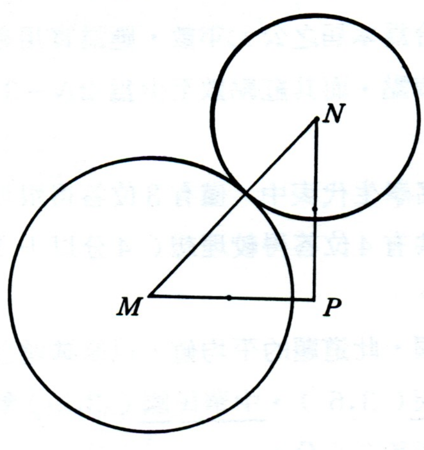
先證：至少有 1991 點的證明：

(1) 在這些點中，兩點決定線段長中，必有某兩點決定出的長爲最大，選定如此的兩點 M，N

(2) 分別以 M，N 爲圓心，$\dfrac{MN}{2}$ 長爲半徑作出兩圓 C_m，C_n

(3) 令 P 爲其餘 995 點的任一點，則由 $MP \le MN$

得 $\dfrac{1}{2}MP \le \dfrac{1}{2}MN$



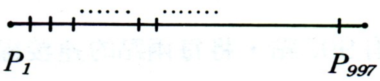
所以MP的中點必在C_m上、

同理NP的中點必在C_n上、

(4) 當P點變動時，其與M，N連接線段的中點隨之變動，故C_m、C_n兩圓內各至少有995個中點（紅點），且MN的中點（紅點）跟這 995＋995＝1990 個點都不相同，故至少有

$$995 + 995 + 1 = 1991 \text{ 個紅點}$$

說明特例1991點的情形：



當 P_1，P_2，………，P_{996}，P_{997} 依次為 P_1 P_{997} 的 996 等分點時

即

$$P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots\cdots\cdots = P_{996}P_{997}\text{，}$$

則 當 $i = 2, 3, \cdots\cdots, 997$

$P_{i-1}\ P_i$ 的中點（紅點）P_i' 共有 996 個，

而 P_2，P_3，………P_{996} 共995點亦為紅點，而無其他的紅點，故恰好有 1991個紅點

評析：

(1) 本試題是由加拿大亞太數學奧林匹亞委員會設計提供。

(2) 本題可以簡化到3個點、4個點、……等情形，而採用997個點產生1991個紅點，其結果1991恰為本屆之公元年數，應為實用趣味化之構想。

(3) 本題可一般化到N個點，而其紅點數至少為 $2N-3$ 個點，且有 $2N-3$ 個紅點的特例。

(4) 本試題在我國前十名學生代表中，僅有3位答得很理想（6分以上），在全部53位參與競試學生中共有4位答得較理想（4分以上）；本題得分高低對擠入銅牌以上頗具關鍵影響。

(5) 在全部12個參與國，此道題的平均值，以原試題設計國加拿大得分最高(4分)、澳洲（3.8）、韓國（3.6）、中華民國（3.5）緊跟其後，都得3.5分以上的水準，其餘8國都低於3.5分。

(6) 本題全 12 個參與國代表之平均值2.35，鑑別指數0.68，我國代表平均值 3.5，與原問題解題應只涉及幾何基本數學知識工具，顯示兩者之平均值均偏低，競試學生的直觀解題能力、靈活度有待提昇激發，惟鑑別指數堪稱良好。

問題3：

設 $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots a_n, b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots b_n$ 都是正實數，且 $\sum_{K=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$

試證 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

解(一)（柯西不等式法）

令 $$c_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k + b_k}} \qquad d_k = \sqrt{a_k + b_k} \qquad (c_k, d_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

利用柯西不等式得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} c_k d_k\right)^2$$

即 $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k}\right)\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right] \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k}\right)\left(2\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

所以

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

解(二)

(1) 先證

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k + b_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)(a_k+b_k)+b_k^2}{a_k+b_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}$$

(2)　由　$2(a_k^2+b_k^2)\geq(a_k+b_k)^2$

得　$2\,\dfrac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}\geq a_k+b_k$

所以　$2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}\geq\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq 2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

即　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$

解(三)

左式$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2+a_kb_k-a_kb_k}{a_k+b_k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}$$

故左式 $\geqq$ 右式 $\Longleftrightarrow\ \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\geq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_kb_k}{a_k+b_k}$

當a，b爲任二實數時　$(a+b)^2\geq 4ab$

故得　$(a_k+b_k)^2\geq 4a_kb_k\quad k=1,2,\cdots\cdots,n$

所以 $a_k+b_k \geq 4\dfrac{a_k b_k}{a_k+b_k}$　　（$a_k+b_k>0$）

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \geq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k \geq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}a_k \geq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k+b_k}$$

即 $\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k \geq \sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k b_k}{a_k+b_k}$

評析：

(1) 本試題是由哥倫比亞亞太數學奧林匹亞委員會設計提供。

(2) 解法㈢是由原題設計者解答方案，但我國的所有參與學生 53 位都沒有使用這個方案。

(3) 解法㈠配合國內統合教材（高二），最簡捷方便，大多數的國內參與者均使用此方案。

(4) 解法㈡基本上亦頗自然便捷，一些國內參與者使用此方案解答。

(5) 全部 12 個參與國中，此道題之平均值，以韓國最佳得滿分，我國次之（6.8）、香港（6.2）再次之，加拿大（5.2）與澳洲（5.1）緊跟在後，亦稱理想。原設計國哥倫比亞與墨西哥、菲律賓都是 1.7 並列最後，非常值得探究原因。

(6) 本題全部參與國代表之平均值 3.97，鑑別指數為 0.82，我國代表的平均值高達 6.8，鑑別指數為 0.70，前十位代表中僅有二位作答書寫瑕疵被扣 1 分，其餘 8 位都得滿分（7 分）；平均值與鑑別指數之數據均堪稱第一。

問題 4：

在學校下課休息時，n 位學生繞著老師圍成一圓圈玩遊戲，老師根據下述規則沿順時針方向走過每一位學生面前分給某些學生糖果：他選定一位學生給他一塊糖，然後跳過一位再給下一位學生一塊，接著跳過兩位再給下一位學生一塊，然後跳過三位，…等等。試求所有可能的 n 值，使得每位學生至少都能拿到一塊糖（老師可能要繞許多圈）。

解 （以下解答方式由台灣師大數學系趙文敏教授提供）：

首先將學生編號：拿到第一塊糖的學生爲1號，然後順時針方向編2號、3號……等等。其次，對正整數 k，設拿到第 k 塊糖的學生是 a_k 號，

則可得

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6$$

一般而言，可得

$$a_k \equiv \frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}$$

下面幾個簡單性質有助於解本題

(1) $\dfrac{(n-1)n}{2} \equiv \dfrac{n(n+1)}{2} \pmod{n}$，這表示 $a_{n-1} = a_n$

因此，當老師給完前 n 塊糖時，a_n 號學生已得到至少兩塊，其他學生中至少有一人沒拿到糖。

(2) 對每個正整數 k

$$\frac{(2n+k)(2n+k+1)}{2} \equiv \frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}$$ 恒成立，

這表示 $a_{2n+k} = a_k$。因此，當老師給完 $2n$ 塊糖後，即使遊戲繼續進行，在前 $2n$ 塊糖中沒拿到糖的學生一定都拿不到糖了。

(3) 對每個整數 k，$1 \leqq k \leqq 2n-2$，

$$\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2} \equiv \frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}$$

恒成立，這表示 $a_{2n-k-1} = a_k$

(4) $\dfrac{(2n-1)(2n)}{2} \equiv \dfrac{2n(2n+1)}{2} \pmod{n}$，這表示 $a_{2n-1} = a_{2n}$

於是，前 $2n$ 糖的獲得者有下述狀況：

$a_1 = a_{2n-2}$

$a_2 = a_{2n-3}$

$\vdots$ $\qquad a_{2n-1} = a_{2n}$

$a_{n-2} = a_{n+1}$

$a_{n-1} = a_n$

由上述結果可知：每個學生都能拿到糖的充要條件是

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{2n-1}$ 兩兩相異

對任意二正整數 k 、 l 而言，

$$a_k = a_l \iff \frac{k(k+l)}{2} \equiv \frac{l(l+1)}{2} \pmod{n}$$

$$\iff (k-l)(k+l+1) \equiv 0 \pmod{2n}$$

$$\iff (2n) \mid (k-l)(k+l+1)$$

(*) 設 $n=2^m$ 即 n 是 2 的乘冪

若 $a_k = a_l$ ，$1 \leq k < l \leq 2n$ ，則因爲 $k-l$ 與 $k+l+1$ 是一奇一偶

而奇數必與 $2n(=2^{m+1})$ 互質，所以，由 $(2n) \mid (k-l)(k+l+1)$

可知 $k-l$ 與 $k+l+1$ 兩者之一是 $2n$ 的倍數。

因爲 $1 \leq l-k < 2n$，可知 $k-l$ 不是 $2n$ 的倍數。

於是 $k+l+1$ 是 $2n$ 的倍數。

再由 $k+l+1 \leq 4n$ 可知 $k+l+1 = 2n$ 或 $k+l+1 = 4n$

因爲集合 $\{1, 2, \cdots\cdots, n-2, n-1, 2n-1\}$ 中

任意二相異元素 k 與 l

都不滿足 $k+l+1 = 2n$ 或 $k+l+1 = 4n$

所以，可見 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{2n-1}$ 兩兩相異。

於是每位學生部能拿到糖。

(*) 設 $n=2^m p$，其中 m 是非負整數，p 是大於 1 的奇數

令 r 表示滿足 $2^r < p < 2^{r+1}$ 的正整數

令 $\quad k = 2^{m+r} + \frac{p-1}{2} \qquad l = 2^{m+r} - \frac{p+1}{2}$

則得 $k-l=p$， $k+l+1=2^{m+r+1}$， $2n\mid(k-l)(k+l+1)$

① 若 $l\in N$，則因爲 $1\leq k$，$l<2n-1$，而且 $k+l=2^{m+r+1}-1\neq 2n-1$

所以知

$k, l, 2n-k-1, 2n-l-1$ 是 $\{1, 2, \cdots\cdots, 2n-2\}$ 中四個相異元素

因爲

$$a_k=a_l=a_{2n-k-1}=a_{2n-l-1}$$

所以

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{2n-1}$ 並非兩兩相異

於是，不是每位學生都能拿到糖。

② 若 $l=0$，則 $m=0$， $n=p=2^{r+1}-1$ 是一個奇數

於是

$$a_{n-1}=a_{2n-1}$$

$a_1, a_2, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{2n-1}$

並非兩兩相異，不是每位學生都能拿到糖。

評析：

(1) 本試題是由香港亞太數學奧林匹亞委員會設計提供。

(2) 本試題屬由特例找出正確答案的數學模型，再用數論的方法，分析證明其結果，難度頗高。

(3) 我國前十名學生代表中有4位得4分的成績都找出 n 是2的次方之正整數可以至少都能分到一塊糖的正確證明，而都無法證出 n 不是的次方時的不可能情況。

(4) 本題全部參與國代表的平均值1.89，鑑別指數0.39，我國的十位代表平均值2.6，平均值略低，鑑別指數尚稱合適。

(5) 原設計者香港並沒有得到理想成績（1.6）比全體平均值尚低，只高於馬來西亞（0.3）、泰國（0.5）、菲律賓、哥倫比亞（0.6）、及墨西哥（1.2）5個國家，而遠低於其餘6個國家。

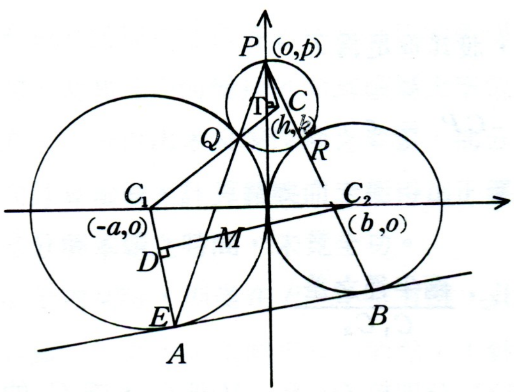
問題5：

設C_1與C_2爲兩個相切的圓，而P點在此兩圓的根軸上，試以尺規作圖作出通過P點且與C_1，C_2都相切的所有圓C。

（所謂C_1與C_2的根軸，乃是C_1與C_2的公切線，此直線與C_1，C_2的連心線垂直）。

解(一)　（幾何變換法；參見陳鉦逸，民80年）

解(二)　（解析幾何分析法，本解由台灣師大數學系邱日盛教授提供）



設兩相切圓爲圓C_1（C_1爲圓心，半徑爲a）及圓C_2（C_2爲圓心，半徑爲b）相切於M，P爲過其切點M的公切線（兩圓根軸）上的一點，圓C（C爲圓心，c爲半徑）爲所求的圓（通過P且與兩圓C_1，C_2相切），爲了一般性起見，先假定兩圓C_1，C_2相外切，且$a \neq b$（設$a > b > 0$），$P \neq M$

取兩圓連心線的直線C_1C_2爲X軸，切點M爲原點的直角坐標系

則已知各點坐標爲$C_1(-a, 0)$，$C_2(b, 0)$，$P(O, p)$　$p \neq 0$，

且兩圓方程式分別爲

圓C_1：$(x+a)^2+y^2=a^2$　得　$x^2+y^2+2ax=0$

圓C_2：$(x-b)^2+y^2=b^2$　得　$x^2+y^2+2bx=0$

設所求圓C的圓心爲$C(h, k)$，則圓C的方程式爲

圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$

圓C過P，所以 $h^2+(p-k)^2=c^2$ (1)

圓C切圓C_1：$(a+h)^2+k^2=(a+c)^2$ (2)或$(a+h)^2+k^2=(c-a)^2$ (2)′

圓C切圓C_2：$(b-h)^2+k^2=(b+c)^2$ (3)或$(b-h)^2+k^2=(c-b)^2$ (3)′

(2)－(3)得 $2(a+b)h=2(a-b)c$ 或 $2(a+b)h=-2(a-b)c$

故 $\dfrac{h}{c}=\dfrac{a-b}{a+b}$ (4) 或 $\dfrac{h}{c}=\dfrac{-(a-b)}{a+b}$ (4)′

過C作y軸的垂線，設其垂足爲T，

則 $CT=|h|$ $CP=c$

故由(4)(或(4)′)知

$$\frac{CT}{CP}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{兩半徑之差}}{C_1C_2}$$

設圓C切圓C_1、圓C_2分別於Q、R，又圓C_1、圓C_2的外公切線爲AB

過C_2作AB的平行線交C_1A於D，

則$C_1C_2=a+b$，$C_1D=a-b$，$\angle C_1DC_2=\angle CTP=90°$

所以$\Delta CTP\sim\Delta C_1DC_2$， $\angle CPT=\angle C_1C_2D$，

又PT垂直C_1C_2，所以PC垂直C_2D，則PC垂直AB

設PQ再交圓C_1於E，則$\angle PQC=\angle EQC_1$，$\Delta PQC\sim\Delta EQC_1$(皆等腰三角形)

所以$\angle C_1EQ=\angle QPC$

$C_1E\parallel PC$，$C_1E\perp AB$ 故 $E=A$(因爲C_1A垂直AB)

即Q爲PA與圓C_1的交點

同理

R爲PB與圓C_2的交點

評析：

(1) 本試題是由墨西哥亞太數學奧林匹亞委員會設計提供。

(2) 本題全部參與國代表之平均值僅0.33，鑑別指數0.04，我國十位代表平均值0.3分，鑑別指數0.02，兩者都非常不理想，得0分的高達 92 人占 81 %以上，且由各國得分統計最多可能只有2位得滿分（可能是紐西蘭與加拿大各1位代表），難度太高，簡直無法測出中學資優生的數學能力。

(3) 本試題原設計國墨西哥亦僅有1位學生得1分，無法反應其本國及其餘亞太地區的數學課程綱要內容。

(4) 本題屬變換幾何作圖題，並不是單純的歐氏尺規作圖，即使在三十年前強調歐氏幾何的教材亦屬不易，何況現階段各國中學階段的數學教材都普遍減少歐氏幾何教材，更偏離主題，尤其是幾何變換的知識應屬大學數學系學生的課程內容。

(5) 利用坐標幾何的方式，分析出本尺規作圖之要領，部分參與同學亦嘗試本方法，但以引入坐標方式計算過繁，計算錯誤而未能得出正確途徑，或以競試時間分配因素策略未能有充分解本題之時間，未竟全功。

(6) 如果兩圓 C_1，C_2 是內切時，則僅在 $P=M$ 時有解，此種圓有無限多個。

(7) 當兩圓是相交或外離，只要 P 是兩圓根軸上的點，上敍的解析及作法討論仍然成立（相交於兩點 X，Y 的兩圓，其根軸爲 XY，而相外離兩圓的根軸爲其兩外公切線取中點的連線）。

參考資料

1. 陳昭地（民80年a），亞太數學奧林匹亞競試簡介，科學教育（第137期），民國80年2月出版，第28-35頁。
2. 陳昭地（民80年b），中華民國參加一九九一年亞太地區數學奧林匹亞競賽計畫報告，民國八十年六月出版，第20-36頁及第65-73頁。
3. 陳鉒逸（民80年），有關圓的鏡射，科學教育（第140期），民國80年5月出版，第10-16頁。
4. APMO (1991)，Procedures and Regulations for APMO.
5. Chen, Jau-D., The R.O.C. Math-talented students in the 1991 APMO, to appear.