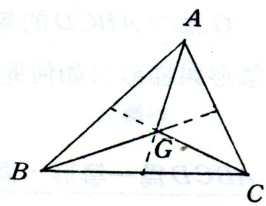
凸多邊形等分點作圖探討

台北縣立永和國中
著者：王秋富
指導教師：鄭再添

一、前　　言

三角形的三中線共交於一點，是為三角形的重心，恰可將三角形的面積三等分。如圖(一)所示，$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$。

這個結果引發我們產生一種聯想：四邊形以上又如何呢？是否可有類似於三角形重心的形內點，將其與各頂點連線後恰將N邊形N等分？果真存在時，我們不妨稱之為此N邊形的"等分點"。本文的目的即在探討一般凸多邊形的等分點的存在性，以及它的尺規作法等相關問題，敬請先進賢達不吝賜教。



圖(一)

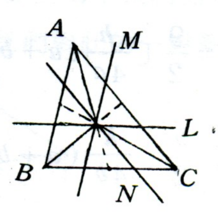
二、本　　文

在這裏所謂n邊形的等分點意指此點與各頂點連線，分割此n邊形為n個等積三角形；本文先就三角形的等分點談起。

甲、三角形等分點

任意三角形必都有一重心，這是衆所皆知的事。因此，三角形等分點的存在性已無疑義。然而，它是否唯一呢？我們的答案是肯定的。參見圖(二)所示，由於$\triangle GBC=\frac{1}{3}\triangle ABC$，過$G$作直線$L \,/\!/\, \overline{BC}$，則三角形等分點必在$L$上（否則，即不可能三等分$\triangle ABC$）；同理作$M \,/\!/\, \overline{AB}$、$N \,/\!/\, \overline{CA}$，則三角形等分點必在$L$、$M$及$N$三線的交點上。

因此可知：任意三角形恰有一等分點，即它的重心。



圖(二)

乙、四邊形等分點

㈠　四邊形的等分點是否存在？我們從特殊四邊形著手觀察，發現正方形、長方形、菱形及平行四邊形各類型的等分點即兩對角線的交點！事實上，這不難由它們的“對角線互相平分”的共通特性推論得到，參見圖㈢解說：

(1)　∵　$\overline{AG}=\overline{CG}$

∴　$\triangle ADG=\triangle CDG$（等底同高）

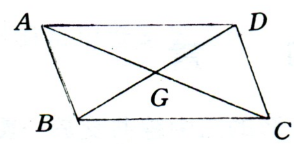
同理　$\triangle ABG=\triangle CBG$

(2)　∵　$\overline{BG}=\overline{DG}$

∴　$\triangle ABG=\triangle ADG$

同理　$\triangle CBG=\triangle CDG$

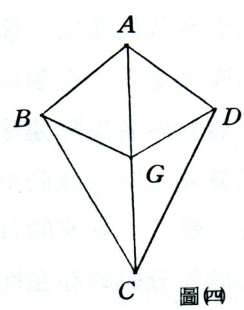
故　G為▱ $ABCD$的等分點。



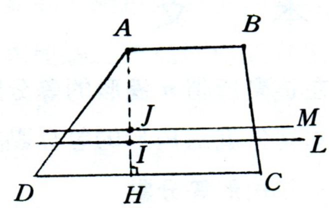
圖㈢

㈡　至於箏形與梯形又如何呢？且看下文繼續分解：

如圖㈣所示，$ABCD$為一箏形，圖形對稱於對角線$\overline{AC}$，則$\overline{AC}$中點G即為$ABCD$的等分點。這只要根據“等底同高的兩三角形面積相等”即可得知，不擬細表。圖㈤則為梯形的情形。令人意外的是：梯形的等分點無法存在！如圖所示，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$，設$\overline{AB}=a$，$\overline{CD}=b$，高$\overline{AH}=h$，則



圖㈣



圖㈤

梯形$ABCD$面積$=\dfrac{h}{2}(a+b)$

在$\overline{AH}$上取兩點I、J，使得$\overline{AI}=\dfrac{h}{4a}(a+b)$，$\overline{HJ}=\dfrac{h}{4b}(a+b)$，

則　$\triangle ABI=\dfrac{9}{2}\left[\dfrac{h}{4a}(a+b)\right]=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{h}{2}(a+b)\right]=\dfrac{1}{4}ABCD$

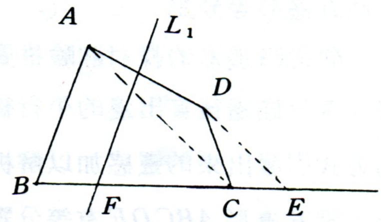
$\triangle CDJ=\dfrac{b}{2}\left[\dfrac{h}{4b}(a+b)\right]=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{h}{2}(a+b)\right]=\dfrac{1}{4}ABCD$

過I、J作$\overline{AB}$的平行線L、M，則L上任一點P，

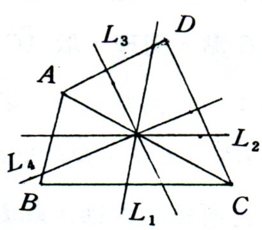
$\triangle PAB=\frac{1}{4}ABCD$；同理，$M$上的一點$Q$，$\triangle QCD=\frac{1}{4}ABCD$。但$L /\!/ \overline{AB} /\!/ M$，除非$L$與$M$重合，否則即無交點。而$M$與$L$重合的條件即$\overline{AB}=\overline{CD}$（$\overline{AI}=\overline{HJ}\Rightarrow a=b$），則梯形將成爲一平行四邊形。因此可知：任意梯形皆無等分點存在！

㈢　非特殊類型的一般四邊形是否有等分點存在呢？受到梯形的探討經驗影響，我們對結果不敢樂觀。一般性的作法可如圖㈥所示，先利用平行線將四邊形$ABCD$化爲等積的三角形$\triangle ABE$，在$\overline{BE}$上取F點使

$\overline{BF}=\frac{1}{4}\overline{BE}$，再過$F$作直線$L_1 /\!/ \overline{AB}$，則$L_1$上任一點$P$，$\triangle PAB=\triangle FAB=\frac{1}{4}\triangle ABE=\frac{1}{4}ABCD$。同法對其他邊作圖，可再畫出$L_2 /\!/ \overline{BC}$、$L_3 /\!/ \overline{CD}$、$L_4 /\!/ \overline{DA}$。果若$L_1$、$L_2$、$L_3$、$L_4$四直線恰共交於一點，則四邊形$ABCD$ 的等分點存在；否則，即無等分點。事實上，當其中三直線共交於一點時，則第四條直線必過此交點！因此，以這種方式處理四邊形時，須畫出三條平行於邊的直線進行判定。

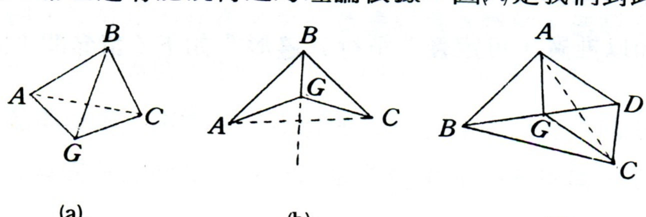


圖㈥



圖㈦

㈣　經由多次實際作圖的經驗發現，一般四邊形的等分點存在時，則等分點G總在其中一條對角線的中點處！參見圖㈦所示，G爲$\overline{AC}$ 中點，這當中顯然隱藏著某種玄機。若再連接另一對角線$\overline{BD}$，則似乎恰被$\overline{AC}$所平分。事實上，若等分點G在$\overline{AC}$上時，則有$\triangle ABC=\triangle DAC$，$\overline{AC}$必定平分$\overline{BD}$！反過來說，若$G$爲$ABCD$的等分點，則$G$必會在某一對角線上嗎？我們需要的不僅是看得到的事實觀察，希望還有能說得通的理論根據。圖㈧是我們對此的一點解析：若



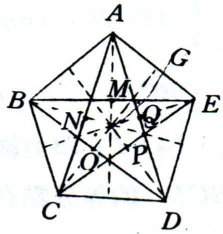
圖㈧

$\triangle GCB = \triangle GAB$，且$G$不為$\overline{AC}$中點，則可能有(a)、(b)兩種情形呈現。但不管那一種，$\overleftrightarrow{BG}$勢必將$\overline{AC}$平分；而對(c)中的四邊形來說，上述兩種情形同時存在且共同平分對角線$\overline{AC}$。因此可知：$\overleftrightarrow{BG}$與$\overleftrightarrow{DG}$在同一直線上且平分$\overline{AC}$！

(五) 綜合上述探討心得，我們對四邊形的等分點已經有個全盤瞭解，試作結論如下：『四邊形的等分點存在若且唯若四邊形的一對角線被另一對角線平分，等分點即在另對角線的中點上。平行四邊形（含正方形、長方形、菱形）與箏形是為其特殊情形。』

丙、凸五邊形等分點

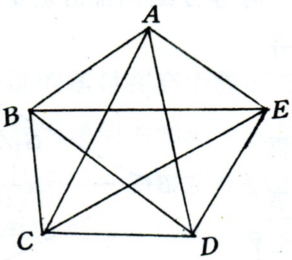
(一) 欲從四邊形的探討經驗推廣至五邊形，若採用上述(三)部分所用方式處理，至少須根據五等分底邊後畫出邊的平行線四次才能判定，顯得煩雜而不便。因此，我們改用由圖(八)方式引發出來的靈感加以解析，如圖(九)所示：設五邊形$ABCDE$有等分點G，則$\triangle ABG = \triangle EAG$，$\overleftrightarrow{AG}$必平分$\overline{BE}$；反過來說，先取$\overline{BE}$中點$M$，若$G$點存在，則$\overleftrightarrow{AM}$必過$G$點。同理，取$\overline{AC}$中點$N$，則$\overleftrightarrow{BN}$亦過$G$點；……由此可知，若等分點$G$存在，則$\overleftrightarrow{AM}$、$\overleftrightarrow{BN}$、$\overleftrightarrow{CO}$、$\overleftrightarrow{DP}$及$\overleftrightarrow{EQ}$必皆共點，此點即$G$之所在；否則，此五邊形即無等分點。事實上，在作出三條這樣的線後，若產生不共點時，已可確定等分點不存在，自然不必再繼續；若畫出四條後皆呈共點現象，則最後一條亦將共點，當然不用再畫。和上述不同的是，從作等積三角形求底邊五等分點，再作邊的平行線方式簡化成取對角線中點作頂點的連線即可判定，顯然方便多了！



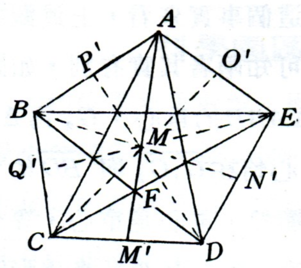
圖(九)

(二) 什麼樣的五邊形會有等分點呢？由於五邊形的分類不似四邊形那般完善，無法像(乙)中方式逐一討論。但顯然的，正五邊形的等分點存在，即其外接圓的圓心位置。若將平行四邊形的觀念加以推廣，可定義“平行五邊形”如下（請參閱〔3〕）：

設$ABCDE$爲凸五邊形，若任一邊與此邊不相鄰之二邊的頂點所決定對角線互相平行，則稱此五邊形爲平行五邊形。圖(十)所示即一例。其中$\overline{BE}/\!/\overline{CD}$、$\overline{CA}/\!/\overline{DE}$、$\overline{DA}/\!/\overline{CB}$、$\overline{EC}/\!/\overline{AB}$、$\overline{DB}/\!/\overline{EA}$ 。據此我們不難驗證：任意平行五邊形都必有等分點存在！如圖(十一)所示



圖(十)



圖(十一)

(1) $\because \overline{BD}/\!/\overline{AE}$，$\overline{CE}/\!/\overline{AB}$，$\therefore ABFE$爲▱，故$\overline{AF}$與$\overline{BE}$互相平分。

(2) $\because \overline{BD}/\!/\overline{AE}$，$\overline{BE}/\!/\overline{CD}$，$\therefore \angle FDC=\angle AEB$，同理$\angle FCD=\angle ABE$。
故$\Delta FCD\sim\Delta ABE$。

(3) 同理，$\Delta AME\sim\Delta FM'D$，$\Delta ABM\sim\Delta FCM'$，故$M'$ 亦爲$\overline{CD}$中點。

(4) 由上可知$\overline{AM'}$ 平分五邊形$ABCDE$。
同理，$\overline{BN'}$、$\overline{CD'}$、$\overline{CP'}$及$\overline{EQ'}$亦平分$ABCDE$。

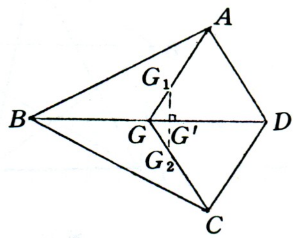
平行五邊形所提供的等分理由顯然太強了，一如平行四邊形的對角線中點般，只要作兩條頂點與對邊中點連線立即可找到位置！更一般化的情形應是如何景象？由於尚未看過有人對五邊形作其他的分類，我們目前只能使用(一)部分所提方式加以判定（等分點的存在性），其他仍待進一步的探討。

丁、凸N邊形等分點

對於一般凸多邊形的等分點而言，(丙)中的作法可以直接加以推廣：若凸多邊形的每一頂點與其相鄰兩頂點所決定的對角線的中點連線皆共交於一點，則此點即爲此多邊形的等分點；否則，等分點不存在。平行多邊形爲其特例，偶數（2n）邊時，$\overline{A_1A_{n+1}}$ 及 $\overline{A_nA_{2n}}$ 的交點即所求；奇數（2n+1）邊時，A_1 與 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 中點連線及A_2 與 $\overline{A_{n+2}A_{n+3}}$ 中點連線的交點即所求。事實上，在參考資料[3]中已有“橢圓中心到平行N邊形交點之線段將橢圖分割成N個面積相等之區域”的更進一步推廣，有興趣的讀者請自行參閱。

戊、等分點與重心

在整個探討過程中，等分點與重心似乎如影隨形般密不可分。三角形的重心即它的等分點，平行四邊形的等分點也正是重心所在；甚至到了平行多邊形裡，參考資料[3]仍然告訴我們不免懷疑——等分點與重心是一體的兩面嗎？由多邊形一定有重心但不見得有等分點這個事實來看，上述觀點顯然不確。然而，有等分點則都恰是重心嗎？回顧箏形的情形可知兩者其實有別，如圖(12)所示：G爲等分點，G_1爲ΔABD的重心，G_2爲ΔCBD的重心，則$ABCD$的重心恰在$\overline{G_1G_2}$與$\overline{BD}$的交點G'上（$\overleftrightarrow{BD}$爲對稱軸）。顯然，重心是重心，等分點是等分點，兩者確有不同。唯有當它是平行多邊形時，兩者才合而爲一！



圖(12)

三、結　　論

開始著手探討時，我們直觀地以爲任意多邊形都存在有等分點，一心想的是如何將作法從三角形往上推廣。想不到在四邊形裡就碰到無解的情形，一度讓我們感到相當灰心，幾乎要把問題放棄了。憑著一股挑戰的堅持意念，終能撥雲見日，走出一片天空。N邊形的等分點部分雖已提出一般性作法，仍有許多值得深入探究的地方。這種絕地逢生的經驗，更增強了我們對數學領域探索奧秘的興趣。以上提出些許心得報告，但盼大家多多指教。

四、參考資料

[1.] 國中數學第二册，數學選修上、下册——國立編譯館。
[2.] 簡明數學百科全書——九章出版社。
[3.] 平行五邊形——第廿四屆科展優勝專輯（高中組）。