評八十學年度大學入學考試自然組數學試題

儲啓政
新竹高中

今年大學聯考數學科自然組的試題，整體而言，尚稱允當，惟仍有少許值得商榷之處，茲逐題詳述於下，供各界參考。

第一部分：單一選擇題

【子】設複數 z 爲 $1-\sqrt{3}\,i$ 之一平方根，且其實部爲正，則

1. z 之實部爲

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1　(E)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（ 3分 ）

2. z 之虛部爲

(A)$-\frac{\sqrt{6}}{2}$　(B)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C)$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(E)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（ 3分 ）

若 z 爲實係數方程式 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 之一根，則

3. $\alpha=$

(A)$-\sqrt{6}$　(B)$-\sqrt{3}$　(C)$-\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{2}$　(E)$\sqrt{6}$　（ 2分 ）

4. $\beta=$

(A) 1　(B)$\sqrt{2}$　(C)$\sqrt{3}$　(D) 2　(E)$\sqrt{6}$　（ 2分 ）

本題之 1 、 2 實爲一題， 3 、 4 實爲一題，前者求複數 $1-\sqrt{3}\,i$ 的平方根，後者求作一個實係數二次方程式以 $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 爲一根，二者原爲相互獨立，沒有任何因果關係，然而却要求考生以前題之答案作爲後題據以作答之數據，實在不宜。

一般而言，命題者有時爲鑑別不同程度之考生，而設計題組型試題，總是遵循一個原則，即整個題組事實上只是一個題目，各小題之間必然存在著因果關係，以題組形式表現，是爲分辨考生對該問題瞭解之深度，題組型試題也常兼具逐步引導考生，以解決一個較艱深的難題之用意，但無論如何，題組之小題，必須是縱向的、串聯的、測驗

深度的，而非橫向的、並聯的、測驗廣度的，即使是縱向，命題者往往還在技術上極力避免前後連坐，即前者不會或作錯，不影響後者之作答，例如前者爲一證明題，後者爲一計算或證明題，後者須用到前者的結論，但不論前者是否會證或是否證對，都可據以解後者，不影響後者之得分。

本題之設計與前述之原則恰恰相反，在概念上兩個子題互不相關，在計分上又前後連坐，考生若前題不會或作錯，即使後題會做，後題已完全沒有得分的機會，且試題的編寫方式，甚至會使考生在閱讀上發生困難，考生在做完1，2之後，讀到「若 z 爲實係數方程式 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 之一根，則…」，是否能很清楚的瞭解此 z 即前述之彼 z，恐怕也算一個小困擾。

爲了凸顯本題命題方式之不當，不妨做一個誇大的假設：若一份試題，共有10題，每題10分，10個題目涉及高中自然組數學的10個不同領域，有函數、多項式、指數對數、三角函數、向量、微積分、矩陣、數值方法、圓錐曲線、機率，但是以第 k 題之答案，做爲第 $k+1$ 題解題之依據（$1\leqq k\leqq 9$），有如骨牌一般，第 k 張倒下，第 k+1 張才有機會倒下，倘若某張推不倒，後面只好都罰站了，這樣一份試題，其荒謬，不言可喻。

本題除上述爭議外，求複數 $1-\sqrt{3}\,i$ 的平方根，實部答對得3分，虛部答對得3分，非常不妥，一個複數的實部與虛部猶如一個分數的分子與分母，不容分割，試想如果一個機率問題的答案是$\frac{3}{7}$，而給分標準爲分子答對得題分之半，分母答對得題分之半，某考生答以$\frac{3}{2}$（比1還大）却得到一半分數，豈不可笑。幾年前大學聯考自然組數學曾有求一點之空間座標，而 x 座標，y 座標，z 座標分別計分的前例，已經犯了這種錯誤，或許因爲無人指正，而致今年重蹈覆轍。

【丑】假設任意取得之統一發票，其號碼之個位數字爲0，1，…，9中任一數字，且這些數出現之機率均相等。今自三不同場所，各取得一張統一發票，則三張發票號碼個位數字中

5. 至少有一個爲0之機率爲 （5分）

(A) 0.081 (B) 0.243 (C) 0.271 (D) 0.300 (E) 0.333

6. 至少有一個爲0，且至少有一個爲9之機率爲 （5分）

(A) 0.048 (B) 0.054 (C) 0.096 (D) 0.488 (E) 0.667

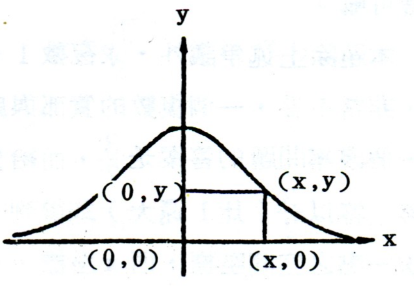
本題爲一機率問題，機率問題在高中數學中是最容易設計一個眞實情境加以測驗的，統一發票是很好的表現方式，但要求個位數爲0或爲9，人工味十足，情境盡失，與袋中取球何異，除却美感不談，本題不失爲一中規中矩的機率問題。

總括而言，選擇題部分計兩大題6小題共20分，是爲選擇而選擇。除前述配分不當，連坐不當外，各小題之選目，其錯誤者，都是胡亂湊數，毫無誘惑混淆之功能，須知選擇題有其適用之素材，有些問題，問“WHAT”或“HOW”考生無從回答，答案也非唯一明確，此時可以“WHICH”來問，尤以釐清某一觀念時常用，這類問題才宜以選擇題方式表現，此外選擇題中各選目，除正確者外，其餘選目應精心設計，使之能誘殺各種錯誤典型，才是漂亮的題目。像以上兩個題目，以塡充題表現，簡單明快，勉強弄成選擇題，實在不必。

第二部分：非選擇題

一、塡充題：

1. 如右圖，在曲線 $y=e^{-x^2}$ 上取一點 (x,y)，其中 $x>0$。考慮以 (x,y)，$(0,y)$，$(0,0)$ 及 $(x,0)$ 四點爲頂點之矩形，則當 $x=$ __(A)__ 時，此矩形之面積爲最大，其值爲 __(B)__ 。



本題是一個以微分求最大值的題目，

令 $f(x)=xe^{-x^2}$

得 $f'(x)=e^{-x^2}(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x)$

$f'(x)=0$ 在 $x>0$ 時，只有一解，即 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

若考生甲計算至此，不加細究，即以 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ 爲最大值，則10分到手矣，而考生乙考慮到不能僅由一階導數爲0，即判定此處有極大值，而進一步欲求二階導數，然而因計算繁複，導致錯誤或放棄，又考生丙，算出 $f''(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}<0$，知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 時 f 有相對極大值，但考慮到“相對極大”不同於“最大”，而發

生困擾，考生丁由 $f'(x)=e^{-x^2}(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x)$ 得 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時 $f'(x)>0$，$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=0$，$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時 $f'(x)<0$，故 $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$ 爲 $x>0$ 時 $f(x)$ 的最大值，也是得10分，比較甲、乙、丙、丁四生，層次由低而高，但甲、丁一樣得10分，乙、丙却可能痛失10分，天理何在。故本題不應以塡充題表現，而以計算題爲宜。

塡充2,3,4,5及二無特殊處，不予置評。

三、已知橢圓 $4x^2-4x+y^2-3=0$ 之一弦，其中點座標爲 $(1,1)$。試求包含此弦之直線的方程式。

此題爲舊教材中，考濫之題型，坊間之參考書、測驗卷幾乎每本都有，但新教材中並不特別討論圓錐曲線之直徑，本題固然可設弦之斜率爲m，以點斜式 $y-1=m(x-1)$ 與 $4x^2-4x+y^2-3=0$ 聯立求解弦之端點座標，以m表示，再由中點爲 $(1,1)$ 定m之值，但以m表端點座標，極爲繁雜，若設弦端點爲 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 再由 $y=m(x-1)+1$ 代入 $4x^2-4x+y^2-3=0$ 得x的二次方程式，x_1、x_2 即爲此方程式之二根，由根與係數之關係及 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ 即可得 $m=-2$，如此解法，若非遇過，臨場恐不易想到，也算是個絕招，尤有甚者，坊間參考書皆有：「任意二次曲線 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上，斜率爲m之弦，其中點必在直線 $\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 上」之大絕招，以此絕招，立即可得點 $(1,1)$ 在線 $(8x-4)+m(2y)=0$ 上，即 $m=-2$，此題雖爲計算題，依規定要寫出計算過程，但考生以此法解，閱卷諸公能不照給10分嗎？然而以此方法解的考生，一千人中，能瞭解工具本身之由來者，恐不得一人，縱有少數超能力之考生，大學聯考亦不應使他們因學習上的超車，而在解題上佔到明顯的便宜，這類大絕招或是可運用上層工具的考題對高中數學教育是相當負面的引導，將導致學習秩序的混亂，切盼以後的命題者能多斟酌些，審慎選題，不，不應從現成中選，而應妥爲設計，莫逼使學生抄小路，開快車，弄亂了正常教育的步調。

四、設 $I=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$。

試將方陣 $(I+\frac{1}{5}J)^8$ 化爲 $aI+bJ$ 的形式（a，b爲實數），並求出a，b 之值。

本題之解，無可避免要用到二項式定理，然而高中所學之二項式定理 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}b^k$，其中a，b是實數，也就是實數體上的二項式定理，但此處爲5階方陣這個非交換環上的二項式定理，若A、B是同階方陣且 $AB=BA$ 則 $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n A^{n-k}B^k$ 是對的，但若除去 $AB=BA$ 之條件，則 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 都成問題，遑論一般二項式定理了。本題中之二項，因有一項是I，故二項可交換，但考生中，不考慮這些問題者，是否反比思慮較周密者佔些便宜，尤其引以爲憂的是，此題將誤導學生，認爲同階方陣都可使用二項式定理，甚至認爲實數結構上的任何性質皆可隨意移植到其他數學結構上，這種副作用，恐怕是命題先生始料不及的。

總論：本份試題除各題之瑕疵，分述如上外，整體而論，配分亦稍有不妥，表面上看，本卷計有選擇6題，塡充10格，計算3題，然而仔細推究，實則僅有10題，每題10分，其中除選擇題中之〔子〕，〔丑〕及塡充第3題，可以勉強分割外，其餘題目如塡充1，2，4，5題，每題雖分成兩格，但兩格實爲一體，對者10分，錯者0分，幾乎沒有5分的機會。以10個考題，考高中三年共8册之數學，難免不夠周延且配分集中，考生考前有否燒香，便相形重要，若能將10格塡充，獨立起來，每格5分，或將一題中之兩格，設計成具有高低層次之別，強者得10分，中者得5分，弱者得0分，則試題之鑑別力（效度）將大幅提高，也可使“運氣”在考試中，不顯得那麼重要，亦即具有更高的信度。

感想：大學聯考的使命在於爲大學取才，不必然要揹負引導高中教學正常化之重責大任，然而大學聯考對高中教學的影響却不容忽視，也不能否認。醫生處方治病，難免有副作用，但如何降低不良的副作用，却是一個有良知的醫生不能漠視的問題，這是醫術，更是醫德。