幾何實驗介紹

葉東進
科學園區實驗高中

幾何方面的題材在高中數學裡所含的份量及所居的地位是每下愈況。影響所及，使得學生普遍缺乏幾何的知識，同時對數學現象的感覺也愈趨薄弱。雖說幾何題材淪落至今，有它自身應用上的限制及歷史的因素，但是它所蘊函的結構及表現的形式，對一個人的理性啓蒙及對宇宙結構的和諧的認知與欣賞是具有一定作用的。對於這般嫺淑的題材的逐漸沒落，除了令人興嘆，我們也不能奢望她在歷史的浪潮中，再度扮演教學上的一個要角。我們只是希望，在課堂中，學生能夠獲知更多有關幾何方面的知識，而且增強對數學現象的直覺能力。爲了達到這個目的，原本是需要花上不少的時間與精力，尤其在升學功利導向的今天，這幾乎是一種奢求。所幸，由於電腦及其軟體的進步，使得這個目的能夠因爲教學媒體的充分運用而較易達成。這便是在本文中要介紹的——幾何實驗。

幾何實驗就是通過操作、觀察、猜測等實驗步驟而獲知幾何知識及瞭解幾何現象。

作者所設計的實驗題材，全部是以Turbo Basic語言編寫，內容有：Ceva 定理、Menelaus 定理、Pappus 定理、Pascal 定理、Desargues 定理、Simson 線、Euler 線、九點圓、錐線的作圖、錐線的相似性、軌跡問題、摺紙產生錐線及其它。由於篇幅所限，本文僅介紹其中數項。Turbo Basic 語言有一樣特色，即使用者可以在螢幕前操作的同時，觀察到現象的逐步呈現與改變，其呈現或改變的快慢，則可任意加以控制而形成一種動態的效果，因此很適合用來作實驗觀察的設計。此外，使用者也不需懂得程式語言，便可在終端機前進行操作觀察。因爲可以一再地重複觀察，使得對數學現象的瞭解因而更爲明白且深刻，也由於使用者能夠確確實實地從螢幕上看到具體的現象，建立了直覺的基礎，可因此而聯想到現象本身的可能推廣與發展，激發使用者的想像與創意。

爲能清楚地介紹這些實驗教材的內容，文中對於每一項素材都按下列的程序逐一說明：

(1) 程式構想

(2) 操作觀察

(3) 教學建議

儘管說明力求明白，但是毫無疑問的，實驗的工作主要還是得在電腦上作實際的進行，唯有如此，才能眞正體會到幾何實驗作爲一種教學模式的價値所在；否則只有淪爲紙上談兵。因此，如果讀者能夠自備Turbo Basic的Program，那麼所有實驗題材的軟體，作者將毫無條件的提供給讀者使用，爲的只是希望能夠推廣此一教學模式，嘉惠學子。

這裡，要特別感謝清華大學全任重教授，他對程式的編寫及構想，提供了許多寶貴的指導與建議。此外，也要感謝新竹科學園區實驗高中的行政協助，使得此一實驗教學能夠在作者的數學課堂中順利的進行。

一、Pascal定理

已予圓上任取六點A、B、C、D、E、F，令P＝AB∩DE，Q＝BC∩EF，R＝CD∩FA，則P，Q，R三點共線。

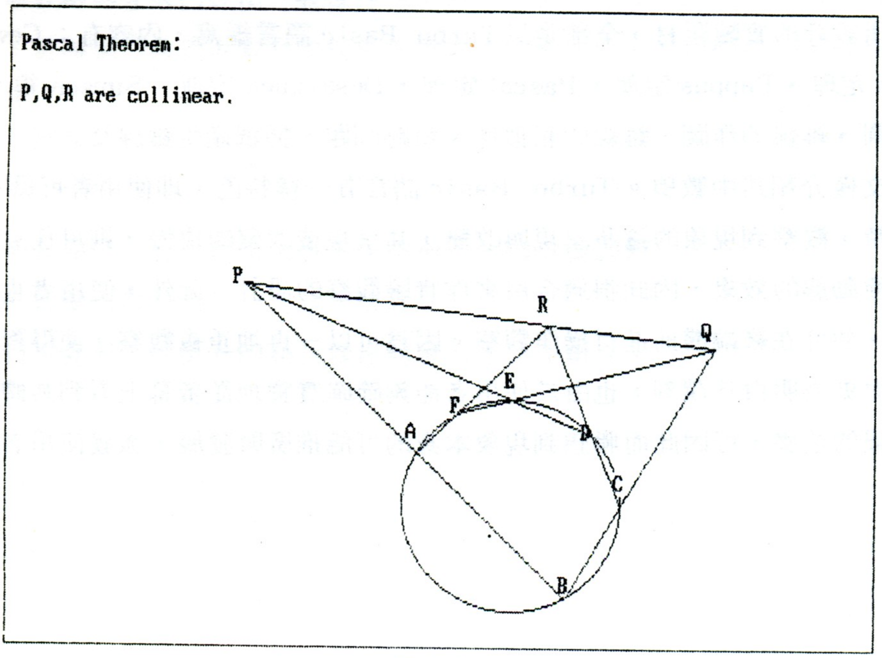


圖1-1

(1) 程式構想

① 設定一圓及其上三個定點A，B，C。

② 取三個參數r，s，t分別用來確定D，E，F的位置。

③ 設定控制鍵：$\boxed{\uparrow}$ 及 $\boxed{\downarrow}$ 用以控制D；$\boxed{\leftarrow}$ 及 $\boxed{\rightarrow}$ 用以控制E；$\boxed{\text{F1}}$ 及 $\boxed{\text{F2}}$ 用以控制F，使分別在圓上朝逆時針或順時針方向移動。

(2) 操作觀察

① Run入程式，螢幕首先出現圖1-1（或圖1-2）所顯示的情形，我們看到P，Q，R三點共線。

② 固定r，s，t中的任意二個參數，操作控制鍵，以便觀察其中一個參數的改變是如何對應地影響動點的位置。

③ 無論動點如何地移動，我們總是見到P，Q，R三點共線。

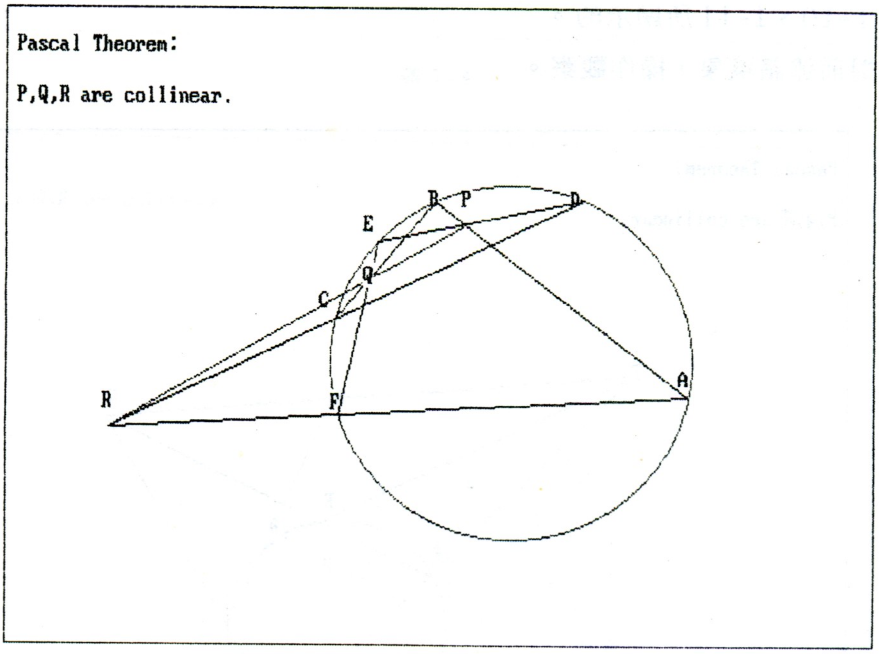


圖 1-2

(3) 教學建議

① 操作控制鍵，使其中一個動點與一定點重合，看看情況如何?如圖1-3所顯示的，此時F與A重合，而FR則是過F點的切線，我們看到P，Q，R 三點仍然共線。

② 若使F→A且D→E，我們看到割線AF→過A的切線，而割線DE→過E的切線，終至F＝A，D＝E時，如圖1-4所顯示的，P，Q，R三點仍然共線。

③ 若使F→A，D→E且B→C，則我們見到了如圖1-5所顯示的，而獲至如下的一個定理：

已予圓上三角形ABC，過A之切線交BC於P，過B之切線交CA於Q，過C之切線交AB於R，則P，Q，R三點共線。

④ 從射影的觀點來看，既然圓上的Pascal 定理成立，當然在橢圓、雙曲線及拋物線上，該定理也會成立，如圖1-6、1-7、1-8所顯示的。

⑤ 而圖1-5所顯示的現象，當然在橢圓、雙曲線及拋物線上也會出現，如圖1-9、1-10、1-11所顯示的。

⑥ 對前述諸現象，操作觀察。

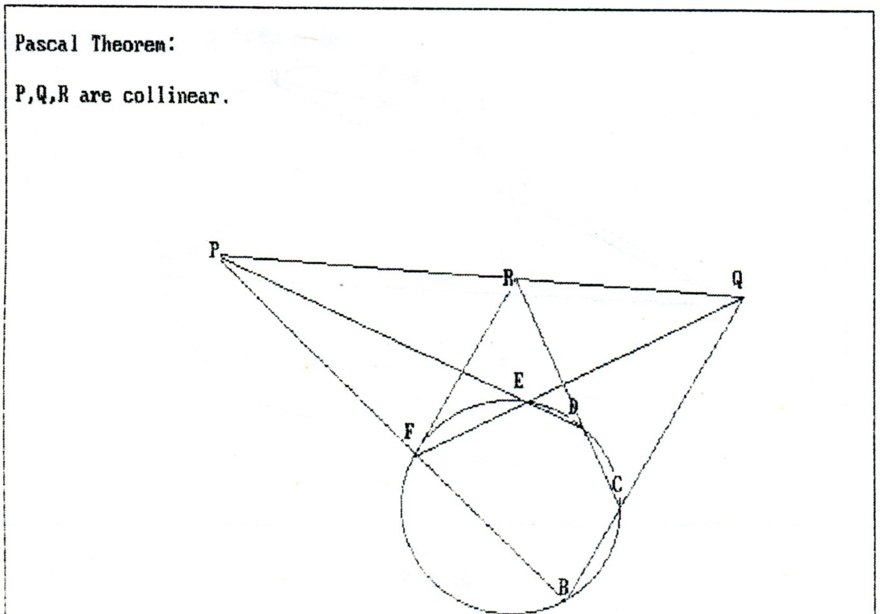


圖 1-3

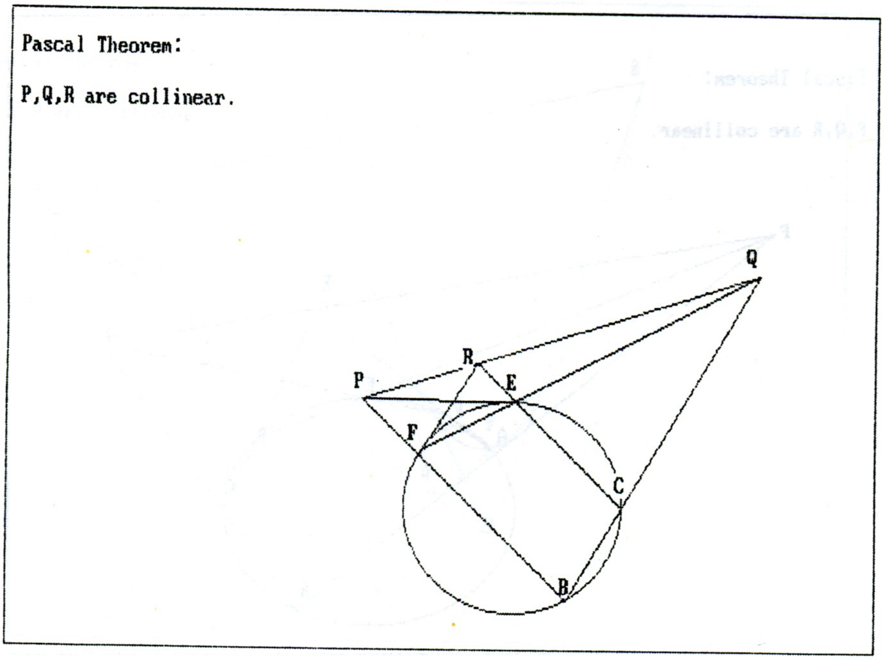

Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
Q
R
P
E
F
C
B

圖 1-4

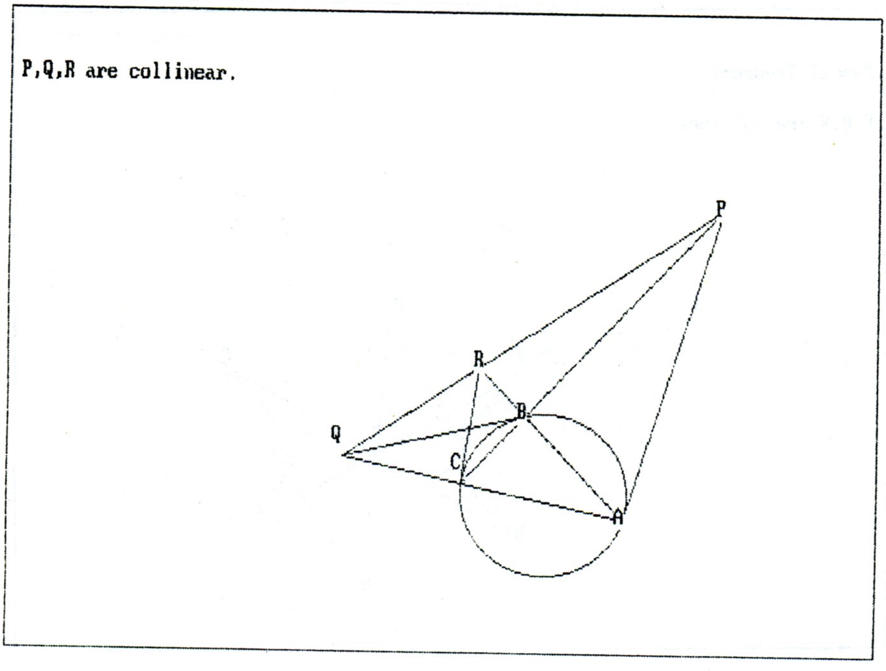

P,Q,R are collinear.
P
R
Q
B
C
A

圖 1-5

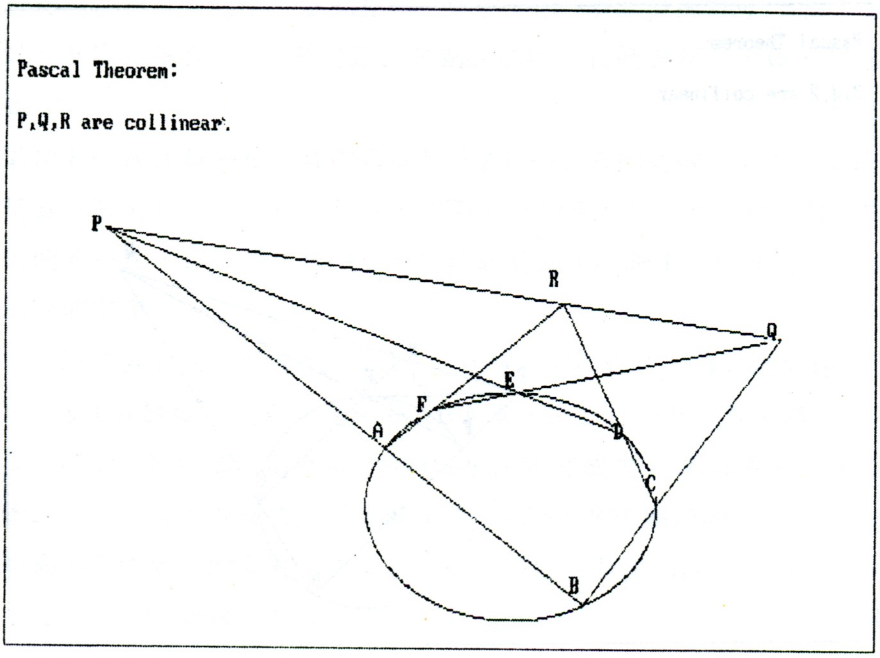

Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
P
R
Q
E
F
A
D
C
B

圖1-6

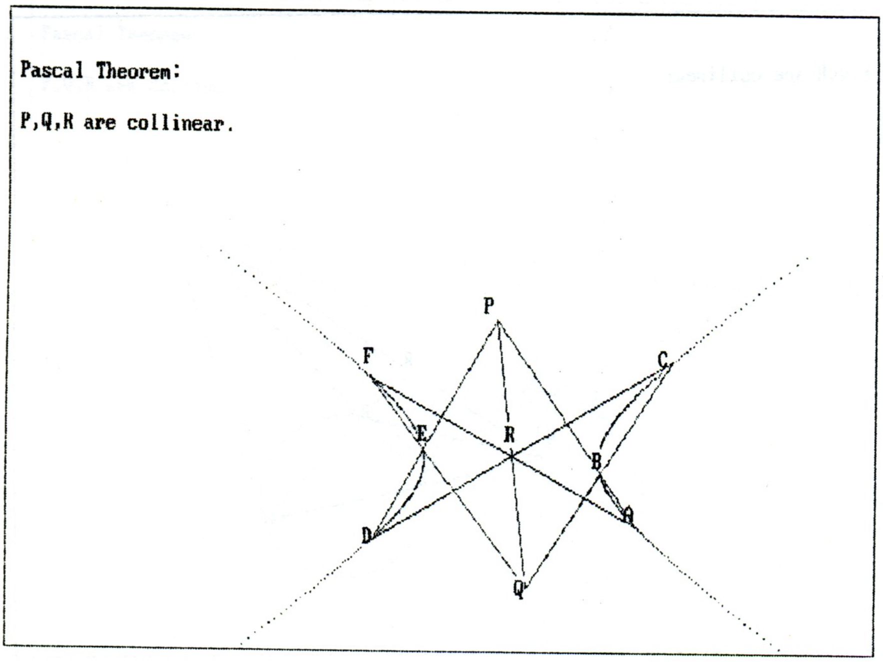

Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
P
F
C
E
R
B
A
D
Q

圖1-7

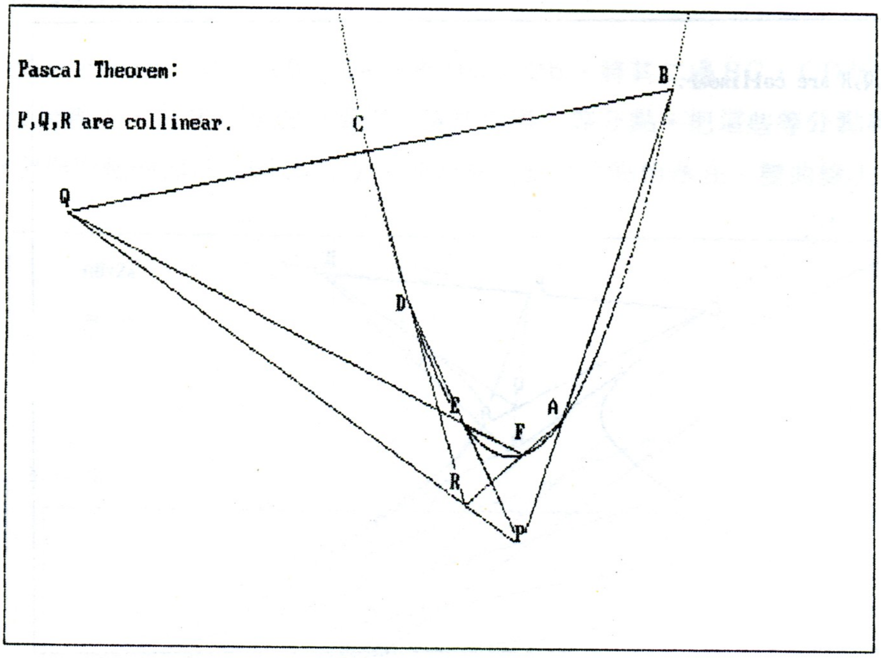

Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
B
C
Q
D
E
A
F
R
P

圖 1-8

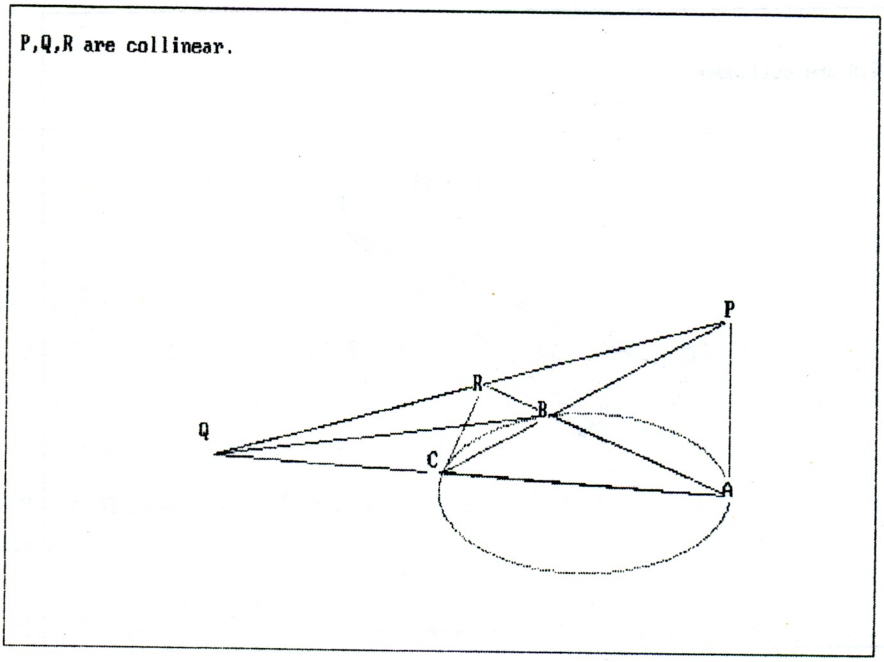

P,Q,R are collinear.
P
R
B
Q
C
A

圖 1-9

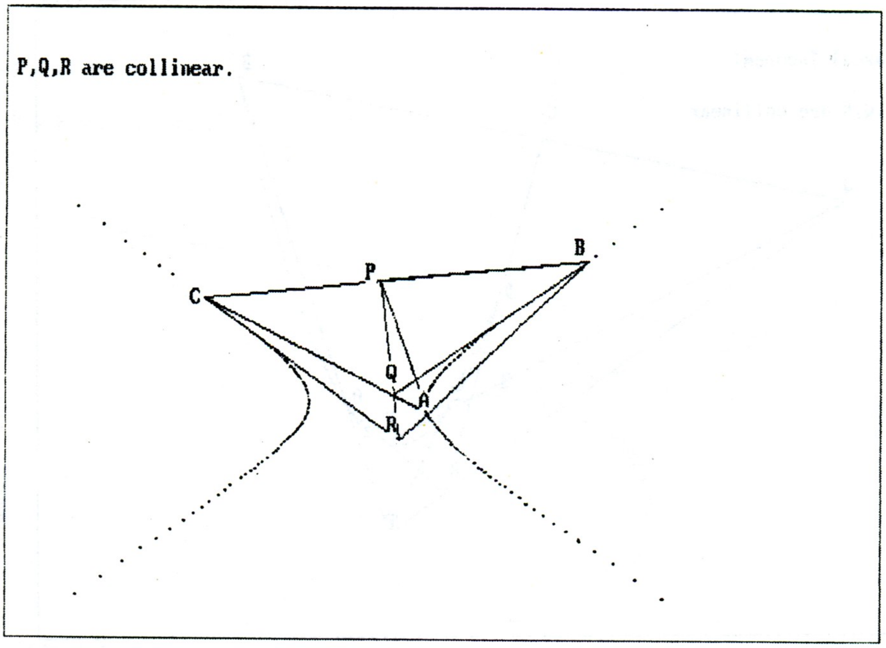


圖 1-10

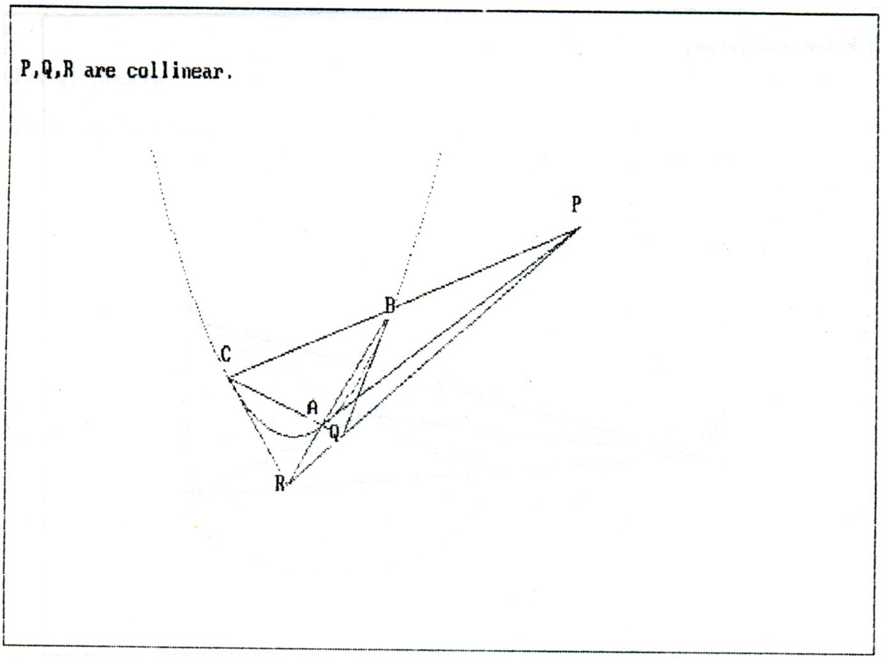


圖 1-11

二、雙曲線的作圖

給一矩形ABCD，其長AB＝2a，寬BC＝2b，將其二邊BC，CD皆作n等分，在CD的反射線上，以2a/n為一單位，逐次取得n等分點，把這些等分點與 BC上的等分點分別作對應的連結（圖2-1），則對應兩線之交點恰落在一雙曲線上。

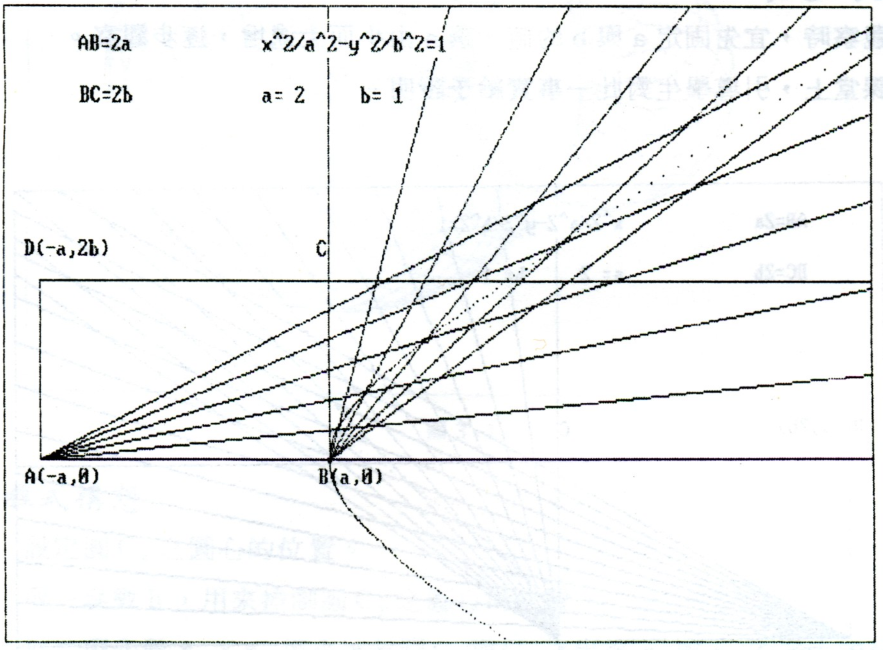


圖 2-1

(1) 程式構想

① 設定兩個參數a與b，以確定矩形ABCD的位置，並取A＝（－a，0），B＝（a，0），C＝（a，2b）。

② 設定參數n，以確定等分點的個數。

③ 繪出對應直線及其交點，直線與直線之間出現的時間長短，加以控制，以便觀察。

④ 繪出雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的部分圖形，以驗證上述交點確實落在此一雙曲線上。

(2) **操作觀察**

① Run入程式，螢幕首先出現圖2-1所顯示的情形，此時所取n值爲4。

② 改變n之值爲12，則出現如圖2-2所顯示的。

③ 在程式中，改變參數a或b的值，可以看到不同形狀的雙曲線的作圖。

(3) **教學建議**

① 觀察時，宜先固定a與b的值，讓n由小而大遞增，逐步觀察。

② 課堂上，引導學生對此一事實給予證明。

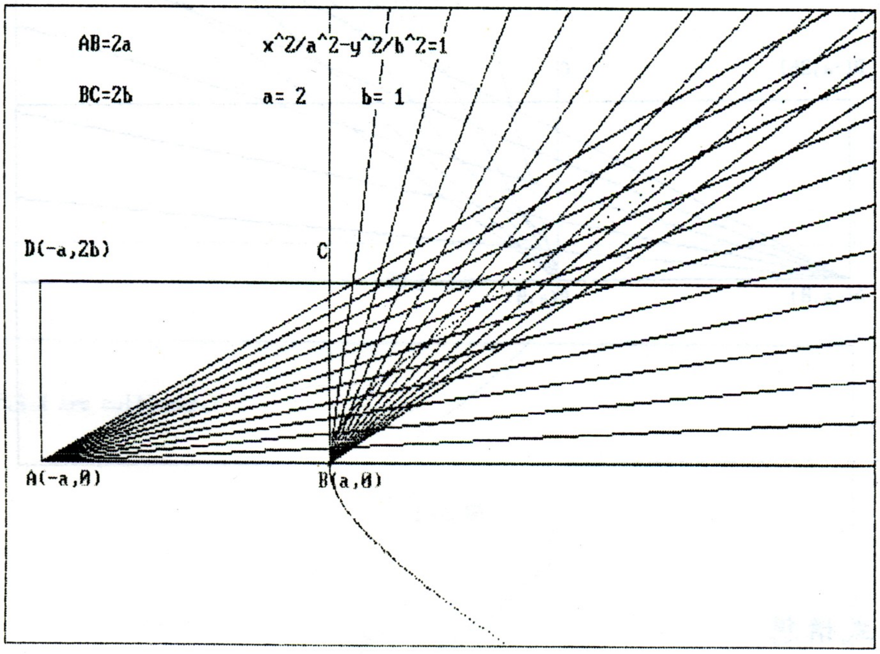


圖2-2

三、軌跡問題(3)

一動圓P與兩定圓C_1與C_2中的一個內切，與另一個外切，則動圓之圓心P的軌跡爲何？

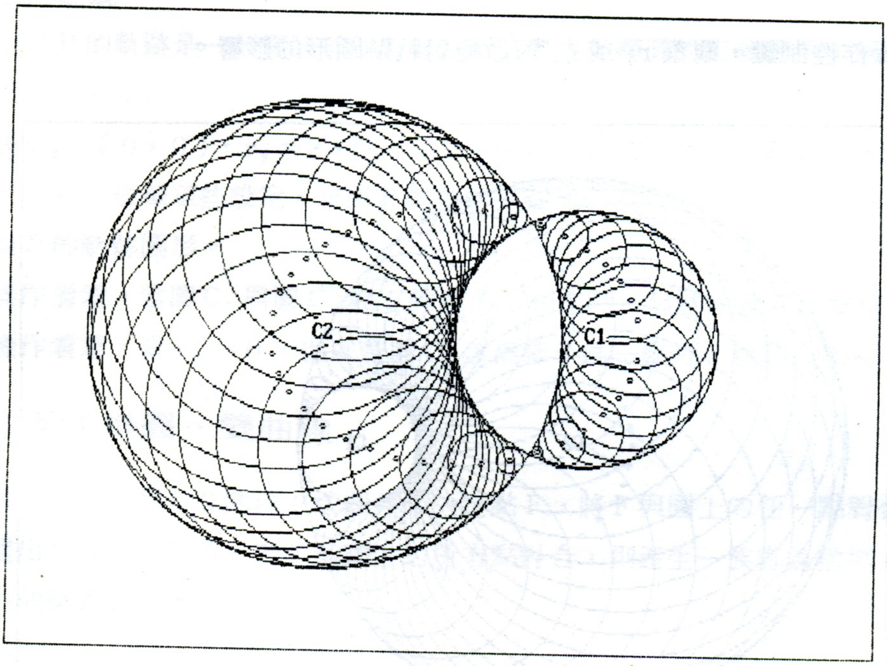


圖 3-1

(1) 程式構想

① 設定圓 C_2 之圓心的位置。

② 取一參數 h，用來控制圓 C_1 之圓心的位置。

③ 取二個參數 r_1，r_2 用來控制圓 C_1 與 C_2 之半徑 r_1 與 r_2 的增大或減小。

④ 設定控制鍵：$\boxed{\leftarrow}$ 及 $\boxed{\rightarrow}$，用以控制 h 的增大或減小，使圓 C_1 之圓心朝水平方向右移或左移；$\boxed{\uparrow}$ 及 $\boxed{\downarrow}$，用以控制圓 C_1 的半徑 r_1 的增大或減小；$\boxed{\text{F1}}$ 及 $\boxed{\text{F2}}$，用以控制圓 C_2 的半徑 r_2 的增大或減小。

⑤ 設計動圓 P，使在螢幕上每出現一個動圓的同時亦呈現圓心 P 的位置，圓與圓間出現之間隔時間的長短，可加以控制，以方便觀察，直到呈現 P 的整個軌跡圖形。

(2) 操作觀察

① Run 入程式，螢幕首先出現圖 3-1 所顯示的情形，此時的圓 C_1 與圓 C_2 相交，而 P 的軌跡則為一橢圓。

② 操作控制鍵 $\boxed{\leftarrow}$ 或 $\boxed{\rightarrow}$，使圓 C_1 靠近或遠離圓 C_2，如圖 3-2 及圖 3-3 所顯示的，橢圓的形狀隨之改變。

③　操作控制鍵，觀察 r_1 或 r_2 的改變對軌跡圖形的影響。

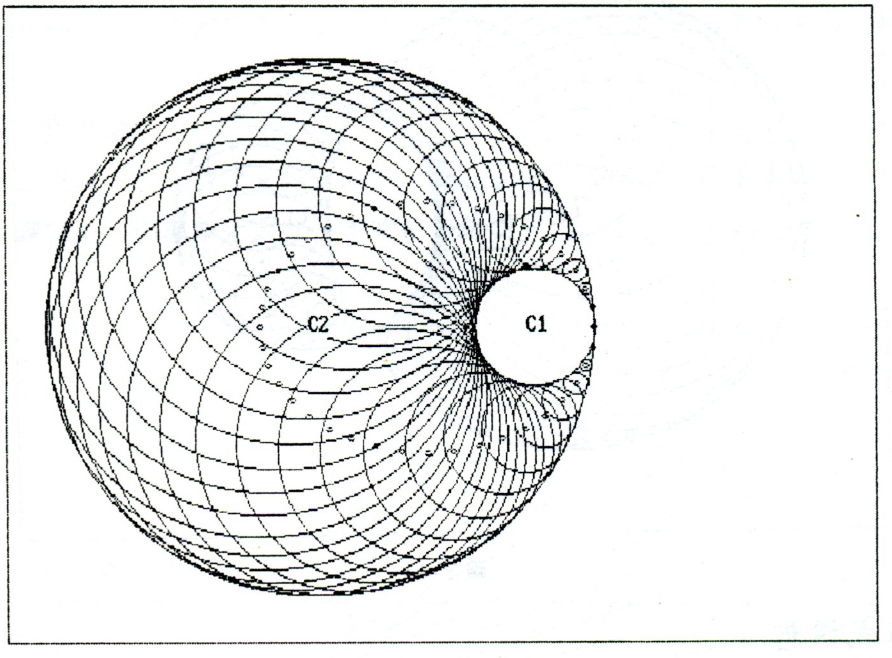


圖 3-2

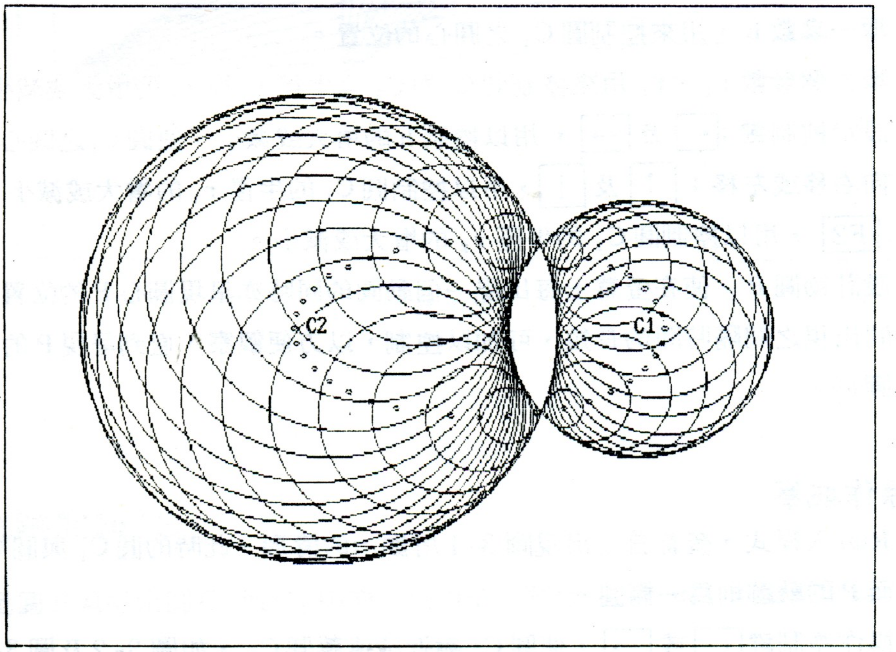


圖 3-3

(3) 教學建議

① 對於P的軌跡是一個橢圓這一事實，引導學生從橢圓的定義著手，給出一個證明。

② 設$C_2=(0,0)$，$r_2=2$，$C_1=(h,0)$，$r_1=r$，其中h與r皆爲參數，且$r>0$。根據這些設定，求出P的軌跡方程式，並就方程式中的h與r值，討論P的軌跡圖形。

③ 操作看看，當圓C_1與圓C_2相互外離而不相交時，軌跡將會是什麼樣子？

④ 操作看看，當$r_1\to 0$，也就是圓C_1逐漸縮小爲一點時，軌跡又如何？

四、摺紙產生橢圓、雙曲線

平面紙上，一定圓O及圓內（或圓外）一定點F，將F與圓上的任一點對合，此時平面紙被摺出一條直線摺痕，若F與圓上的所有點對合，則產生一族直線摺痕，此一族摺痕圍出一個橢圓（或雙曲線）。

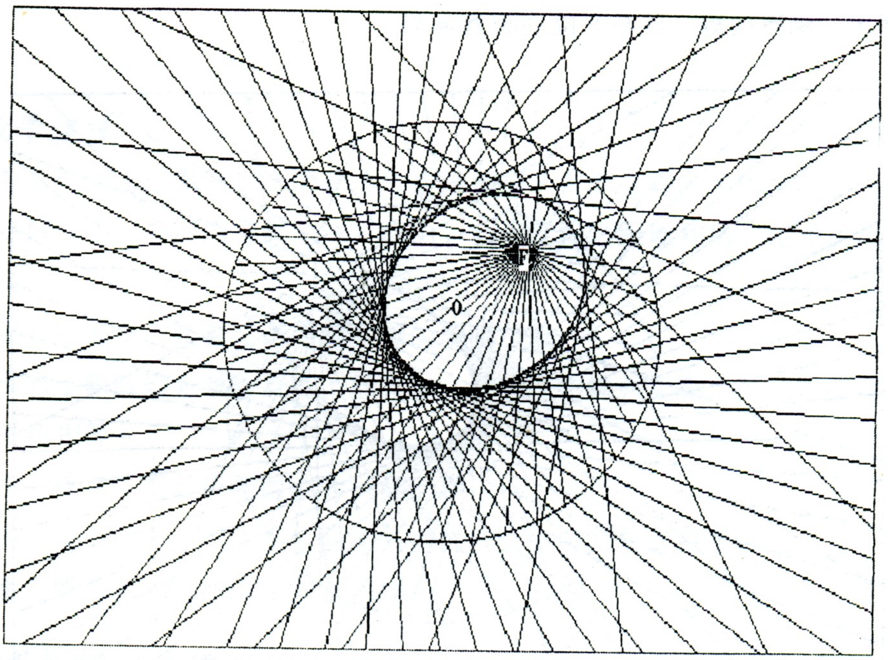


圖 4-1

(1) 程式構想

① 設定圓O。

② 取二個參數 x，y，用來確定點F的座標位置。

③ 設定控制鍵：$\boxed{\leftarrow}$ 及 $\boxed{\rightarrow}$ 用以控制參數 x，使點F朝水平方向左右移動；$\boxed{\uparrow}$ 及 $\boxed{\downarrow}$ 用以控制參數 y，使點F沿鉛直方向上下移動。

④ 設定 n 之值，用以確定描繪直線摺痕的個數。

⑤ 螢幕上顯示摺痕與摺痕間出現之間隔時間的長短，可加以控制，以方便觀察，直到所有 n 條摺痕全部呈現爲止。

(2) 操作觀察

① 開始觀察時，所取 n 之值較小爲宜，如圖 4-1 所顯示的。

② 操作控制鍵，使點F遠離O點，觀察橢圓形狀的改變，如圖 4-2 所顯示的，橢圓較呈扁平。

③ 移動F點，使位在圓上或圓外，觀察摺痕所圍的圖形。如圖 4-3所顯示的摺痕圍出一條雙曲線，此時F位在圓外。

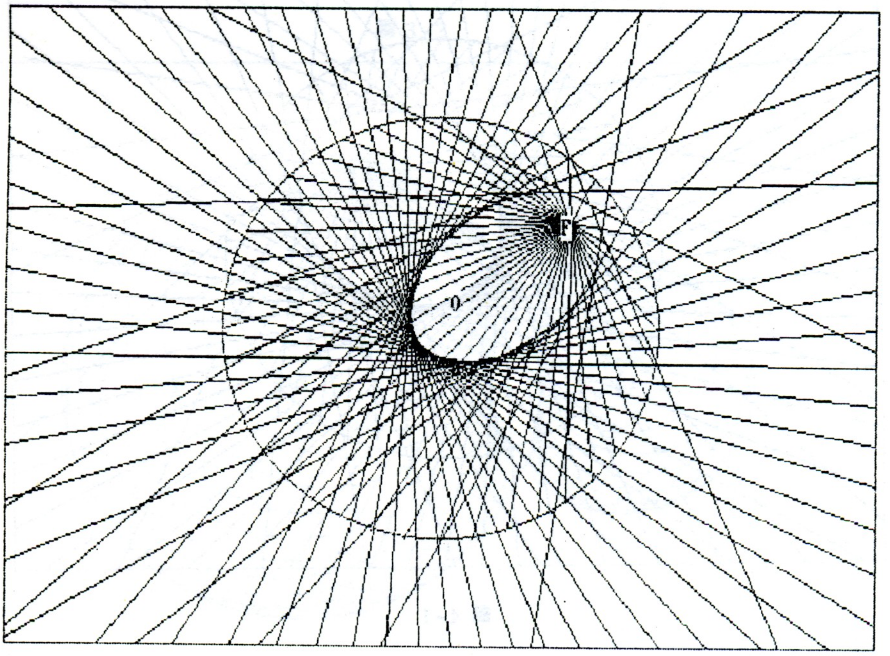


圖 4-2

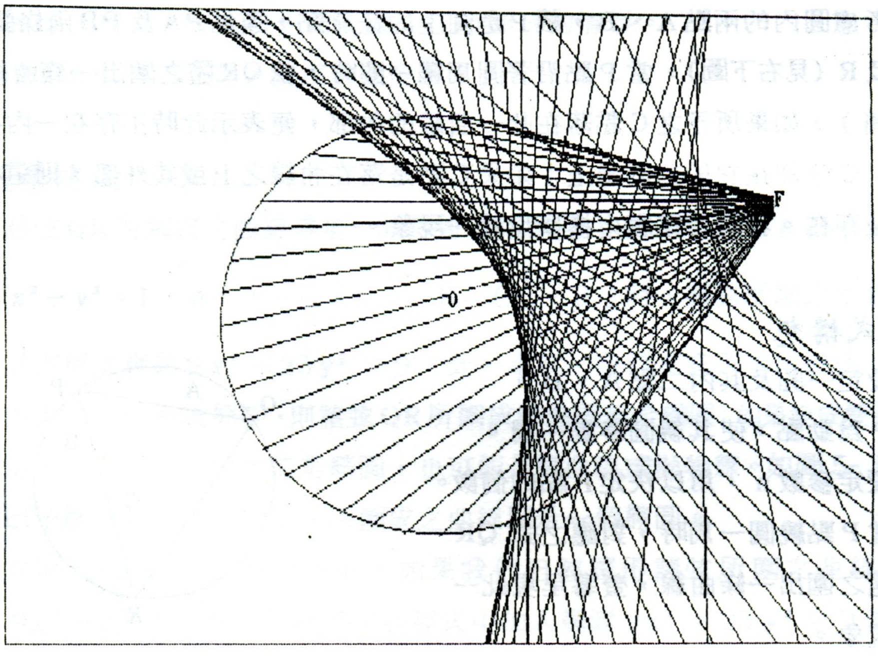


圖 4-3

(3) 教學建議

① 點F與圓上的點P對合所產生的直線摺痕，其實是線段FP的垂直平分線。

② 提醒學生，橢圓的定義是：平面上，到兩定點之距離和為一定值的所有點的軌跡。

③ 點F與點O，其實正是所圍曲線的兩個焦點。

④ 別忘了橢圓的光學性質是：橢圓上任一點的切線與切點及兩焦點的連線的兩個夾角相等。

⑤ 每一條摺痕都是所圍曲線的一條切線。

⑥ 根據以上諸項，引導學生對此一摺紙產生橢圓的事實給予證明。

⑦ 產生雙曲線的情形與橢圓者相仿。

五、一個有關三角形的問題

一已予圓內，任給不共線的三點A，B，C，問：是否恒存在一圓的內接三角形，使A，B，C三點分別在它的三個邊上。

關於此問題，我們的處理是這樣的：

先只考慮圓內的兩點A、B，讓P是圓上的任意點，連結PA及PB兩條弦，弦的端點是Q及R（見右下圖），當P點沿著圓周繞一圈時，弦QR隨之圍出一條曲線（其實是一個橢圓），如果所予之C點落在此一曲線的內部，便表示此時不存在一內接三角形使A、B、C分別在它的三個邊上；如果C點是落在曲線之上或其外部，則這樣的內接三角形便是存在。我們用電腦來模擬出此一現象。

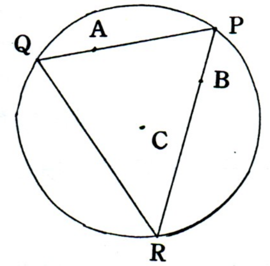
(1) 程式構想

① 設定一圓及其內二點A，B。

② P爲動點，使其繞圓移動一周。

③ 設定參數n，用以決定P點的個數。

④ 當P點繞圓一周時，對應之弦QR隨之圍出一條曲線，螢幕呈現此一現象。



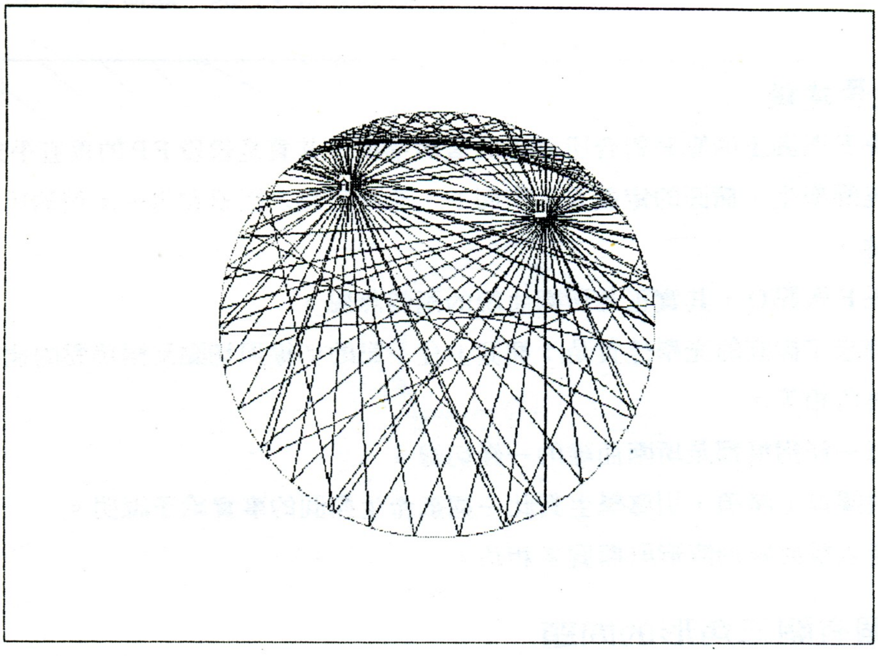


圖 5-1

(2) 操作觀察

① Run 入程式，螢幕首先出現圖 5-1 所顯示的情形。

② 改變 A 與 B 的位置，觀察其它情形。

(3) 教學建議

① 諸弦 QR 所圍成之曲線確是一個橢圓，比如圖 5-2 所顯示的，當我們取已予圓爲 $x^2+y^2=1$，$A=(-\frac{1}{2},0)$，$B=(\frac{1}{2},0)$ 時，諸弦所圍之曲線爲一橢圓，其方程式則爲 $9x^2+25y^2=9$。此一事實，我們在底下給出證明（註）。

② 如果已予圓換成橢圓，則諸弦 QR 所圍成的曲線也是橢圓；如果換成雙曲線或拋物線，則圍成的曲線可能是橢圓，也可能是雙曲線或拋物線。如圖 5-3 所顯示的，已予錐線是一個拋物線，所圍成之曲線則是一個橢圓。

③ 在圖 5-2 所顯示的情形中，如果我們已經證得諸弦所圍之曲線是橢圓 $9x^2+25y^2=9$，則我們可在程式中加入橢圓 $9x^2+25y^2=9$ 的繪圖，以爲驗證之用。

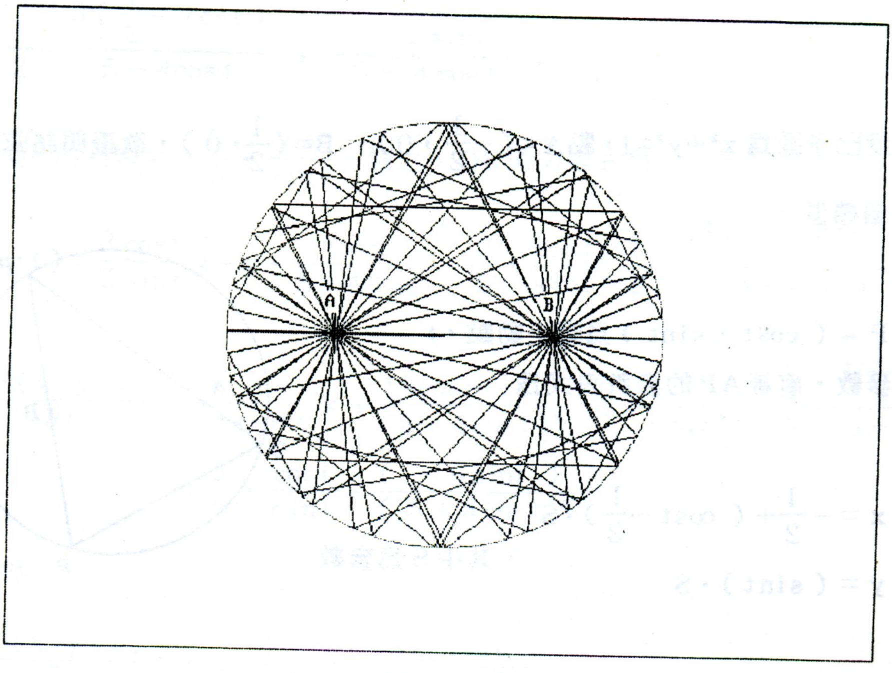


圖 5-2

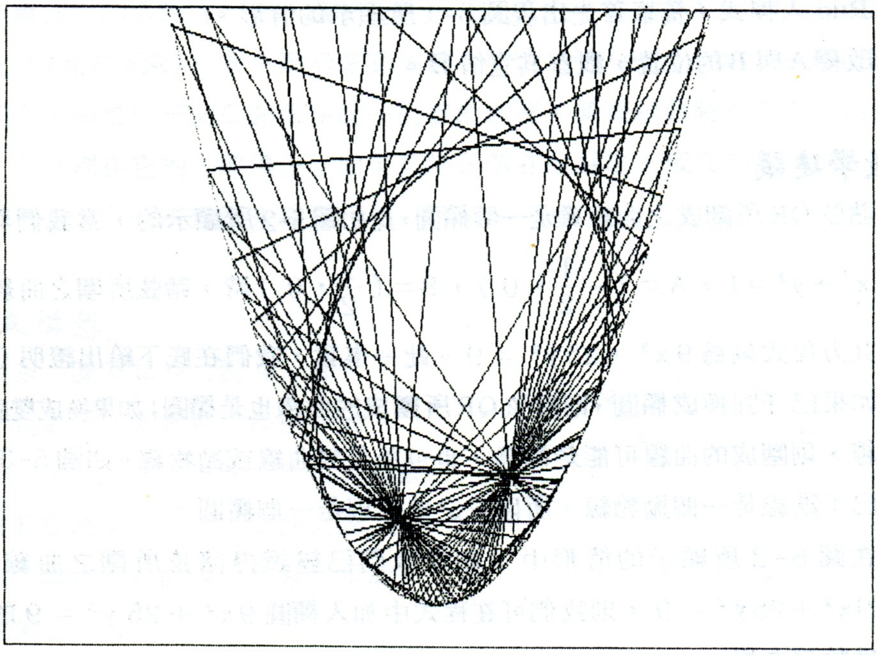
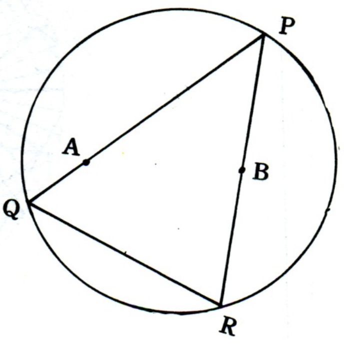


圖 5-3

〔註〕

假設已予圓爲 $x^2+y^2=1$，點 $A=(-\frac{1}{2}, 0)$， $B=(\frac{1}{2}, 0)$，欲證明諸弦QR的包絡線是一個橢圓。



令 $P=(\cos t, \sin t)$ 爲圓上動點，t 爲參數，直線AP的參數表式爲

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+(\cos t+\frac{1}{2})\cdot S \\ y=(\sin t)\cdot S \end{cases}$$，其中S爲參數

欲求Q的座標，將上式代入 $x^2+y^2=1$ 中，得

$$\left[-\frac{1}{2}+\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\cdot S\right]^2+\left[(\sin t)\cdot S\right]^2=1$$

$$\therefore\ (S-1)\left[\left(\cos t+\frac{5}{4}\right)\cdot S+\frac{3}{4}\right]=0$$

由於 $S=1$ 時，對應之點 (x,y) 即爲原來的點 $P=(\cos t,\sin t)$，故

取 $S=\left(-\frac{3}{4}\right)/\left(\cos t+\frac{5}{4}\right)$，得

Q之座標爲

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{3\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)}{5+4\cos t},\ \frac{-3\sin t}{5+4\cos t}\right)$$

同理，可得R之座標爲

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3\left(\frac{1}{2}-\cos t\right)}{5-4\cos t},\ \frac{-3\sin t}{5-4\cos t}\right)$$

所以，QR的斜率 $=-\frac{3}{5}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}$，隨之，QR的方程式爲

$$f(x,y,t)=\frac{3\cos t}{5\sin t}x+y+\frac{3\sin t}{5+4\cos t}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\left[\frac{1}{2}+\frac{3\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)}{5+4\cos t}\right]=0$$

又，

$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}=-\frac{3}{5\sin^2 t}x+\frac{15\cos t+12}{(5+4\cos t)^2}+\left(-\frac{3}{5\sin^2 t}\right)\left[\frac{1}{2}+\frac{3\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)}{5+4\cos t}\right]$$
$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{(-9\sin t)}{(5+4\cos t)^2}$$

化簡，得

$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}=-\frac{3}{5\sin^2 t}x-\frac{3}{5}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}$$

解聯立方程 $\begin{cases} f(x,y,t)=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}=0 \end{cases}$ （參看：楊維哲，微積分，三民書局，§17.39～.4）

得 $\begin{cases} x=-\cos t \\ y=-\dfrac{3}{5}\sin t \end{cases}$

所以諸弦QR的包絡線是橢圓：$9x^2+25y^2=9$。

參考資料

1. 幾何學概論，趙文敏著。
2. 微積分，楊維哲著。
3. 幾何學辭典，笹部貞市郎著。
4. 解析幾何學辭典，笹部貞市郎著。
5. 數學思想發展史，洪萬生等譯。
6. A Survey of Geometry. HOWARD EVES.