幾何實驗介紹

葉東進

科學園區實驗高中

幾何方面的題材在高中數學裡所含的份量及所居的地位是每下愈況。影響所及，使得學生普遍缺乏幾何的知識，同時對數學現象的感覺也愈趨薄弱。雖說幾何題材淪落至今，有它自身應用上的限制及歷史的因素，但是它所蘊函的結構及表現的形式，對一個人的理性啓蒙及對宇宙結構的和諧的認知與欣賞是具有一定作用的。對於這般嫺淑的題材的逐漸沒落，除了令人興嘆，我們也不能奢望她在歷史的浪潮中，再度扮演教學上的一個要角。我們只是希望，在課堂中，學生能夠獲知更多有關幾何方面的知識，而且增強對數學現象的直覺能力。爲了達到這個目的，原本是需要花上不少的時間與精力，尤其在升學功利導向的今天，這幾乎是一種奢求。所幸，由於電腦及其軟體的進步，使得這個目的能夠因爲教學媒體的充分運用而較易達成。這便是在本文中要介紹的——幾何實驗。

幾何實驗就是通過操作、觀察、猜測等實驗步驟而獲知幾何知識及瞭解幾何現象。

作者所設計的實驗題材，全部是以Turbo Basic 語言編寫，內容有：Ceva 定理、Menelaus 定理、Pappus 定理、Pascal 定理、Desargues 定理、Simson 線、Euler 線、九點圓、錐線的作圖、錐線的相似性、軌跡問題、摺紙產生錐線及其它。由於篇幅所限，本文僅介紹其中數項。Turbo Basic 語言有一樣特色，即使用者可以在螢幕前操作的同時，觀察到現象的逐步呈現與改變，其呈現或改變的快慢，則可任意加以控制而形成一種動態的效果，因此很適合用來作實驗觀察的設計。此外，使用者也不需懂得程式語言，便可在終端機前進行操作觀察。因爲可以一再地重複觀察，使得對數學現象的瞭解因而更爲明白且深刻，也由於使用者能夠確確實實地從螢幕上看到具體的現象，建立了直覺的基礎，可因此而聯想到現象本身的可能推廣與發展，激發使用者的想像與創意。

爲能清楚地介紹這些實驗教材的內容，文中對於每一項素材都按下列的程序逐一說明：

(1) 程式構想

(2) 操作觀察

(3) 教學建議

儘管說明力求明白，但是毫無疑問的，實驗的工作主要還是得在電腦上作實際的進行，唯有如此，才能眞正體會到幾何實驗作爲一種教學模式的價值所在；否則只有淪爲紙上談兵。因此，如果讀者能夠自備Turbo Basic 的Program，那麼所有實驗題材的軟體，作者將毫無條件的提供給讀者使用，爲的只是希望能夠推廣此一教學模式，嘉惠學子。

這裡，要特別感謝清華大學全任重教授，他對程式的編寫及構想，提供了許多寶貴的指導與建議。此外，也要感謝新竹科學園區實驗高中的行政協助，使得此一實驗教學能夠在作者的數學課堂中順利的進行。

一、Pascal定理

已予圓上任取六點A、B、C、D、E、F，令P＝AB∩DE，Q＝BC∩EF，R＝CD∩FA，則P，Q，R三點共線。

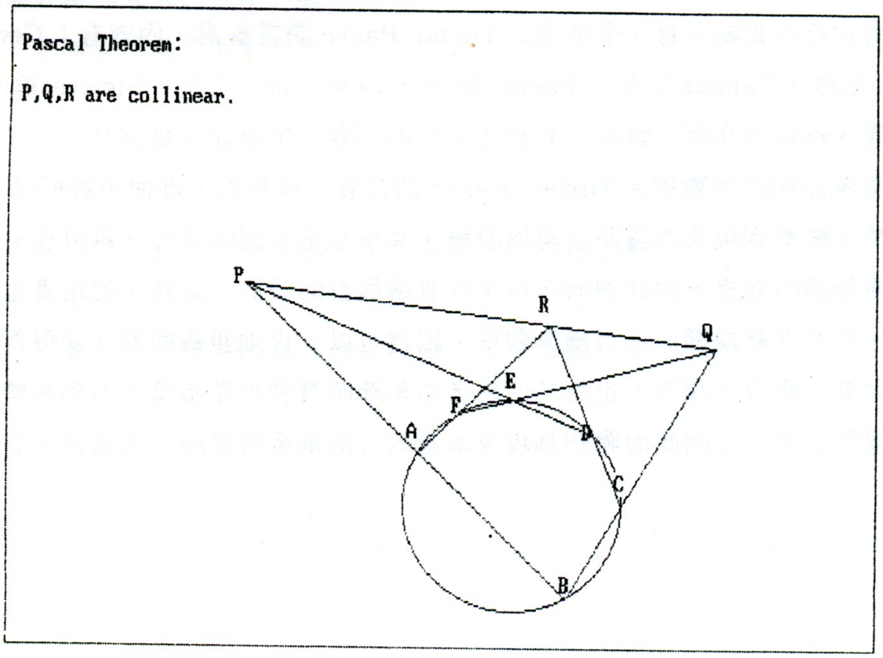

圖1-1

(1) 程式構想

① 設定一圓及其上三個定點A，B，C。

② 取三個參數r，s，t分別用來確定D，E，F的位置。

③ 設定控制鍵：$\boxed{\uparrow}$ 及 $\boxed{\downarrow}$ 用以控制D；$\boxed{\leftarrow}$ 及 $\boxed{\rightarrow}$ 用以控制E；$\boxed{\text{F1}}$ 及 $\boxed{\text{F2}}$ 用以控制F，使分別在圓上朝逆時針或順時針方向移動。

(2) 操作觀察

① Run入程式，螢幕首先出現圖1-1（或圖1-2）所顯示的情形，我們看到P，Q，R三點共線。

② 固定r，s，t中的任意二個參數，操作控制鍵，以便觀察其中一個參數的改變是如何對應地影響動點的位置。

③ 無論動點如何地移動，我們總是見到P，Q，R三點共線。

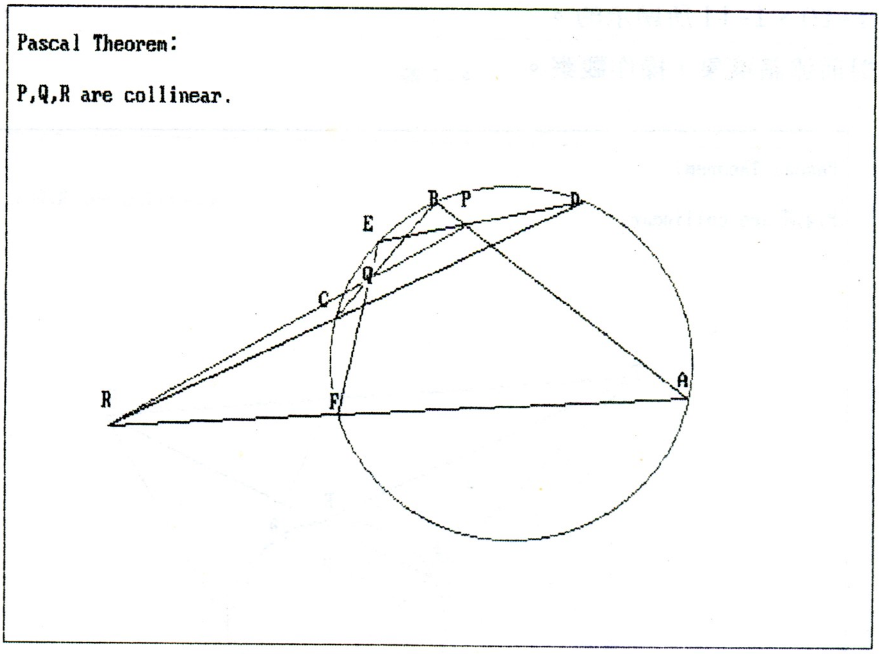

圖 1-2

(3) 教學建議

① 操作控制鍵，使其中一個動點與一定點重合，看看情況如何？如圖1-3所顯示的，此時F與A重合，而FR則是過F點的切線，我們看到P，Q，R 三點仍然共線。

② 若使F→A且D→E，我們看到割線AF→過A的切線，而割線DE→ 過E的切線，終至F＝A，D＝E時，如圖1-4所顯示的，P，Q，R三點仍然共線。

③ 若使F→A，D→E且B→C，則我們見到了如圖1-5所顯示的，而獲至如下的一個定理：

已予圓上三角形ABC，過A之切線交BC於P，過B之切線交CA於Q，過C之切線交AB於R，則P，Q，R三點共線。

④ 從射影的觀點來看，既然圓上的Pascal 定理成立，當然在橢圓、雙曲線及拋物線上，該定理也會成立，如圖1-6、1-7、1-8所顯示的。

⑤ 而圖1-5所顯示的現象，當然在橢圓、雙曲線及拋物線上也會出現，如圖1-9、1-10、1-11所顯示的。

⑥ 對前述諸現象，操作觀察。

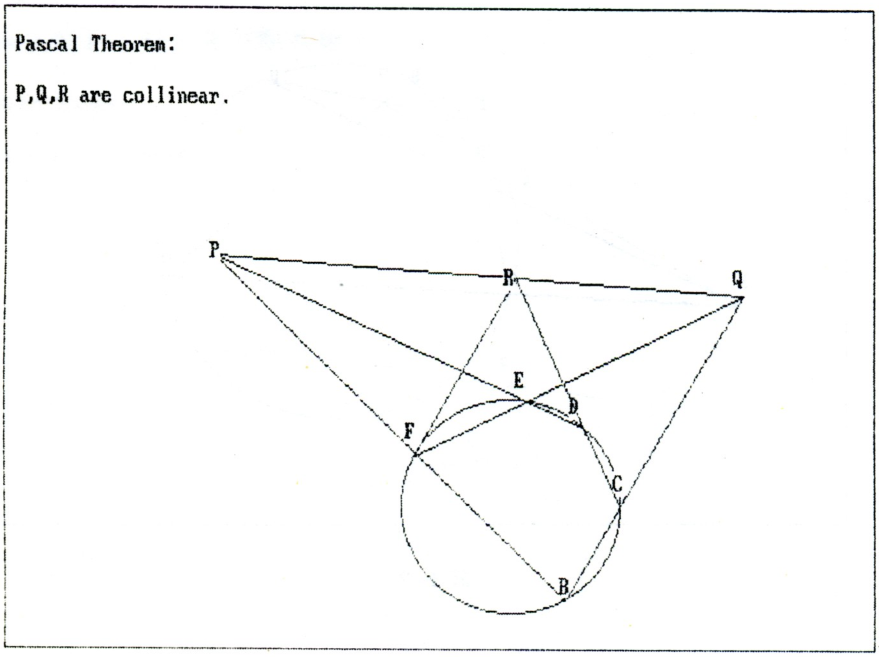

圖 1-3

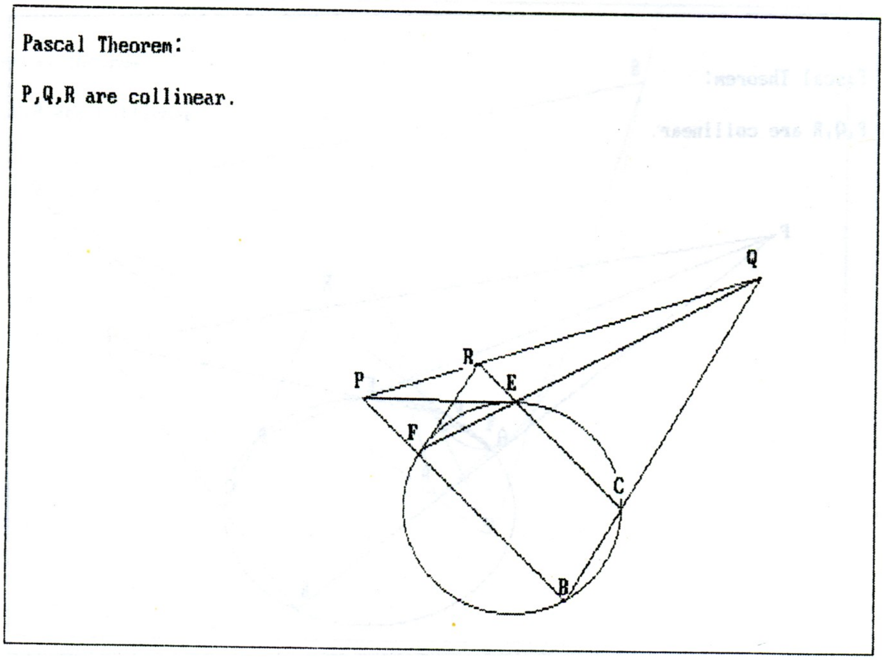
Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
Q
R
P
E
F
C
B

圖 1-4

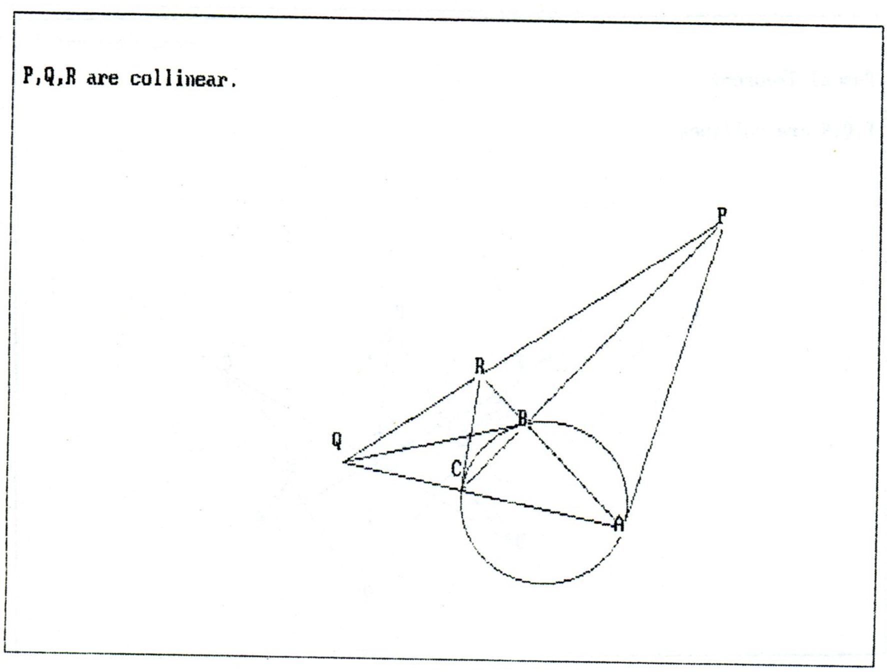
P,Q,R are collinear.
P
R
Q
B
C
A

圖 1-5

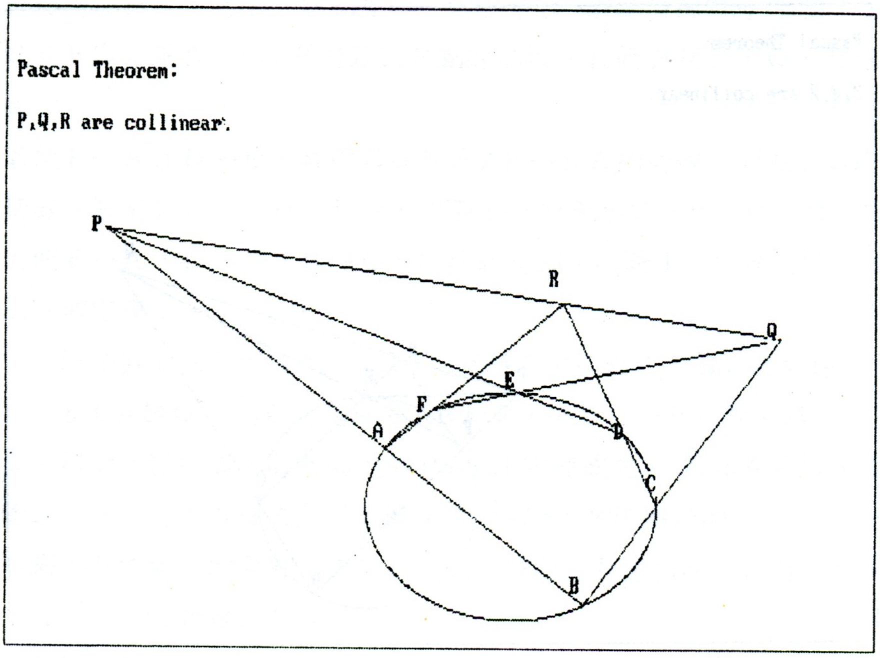
Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
P
R
Q
E
F
D
A
C
B

圖1-6

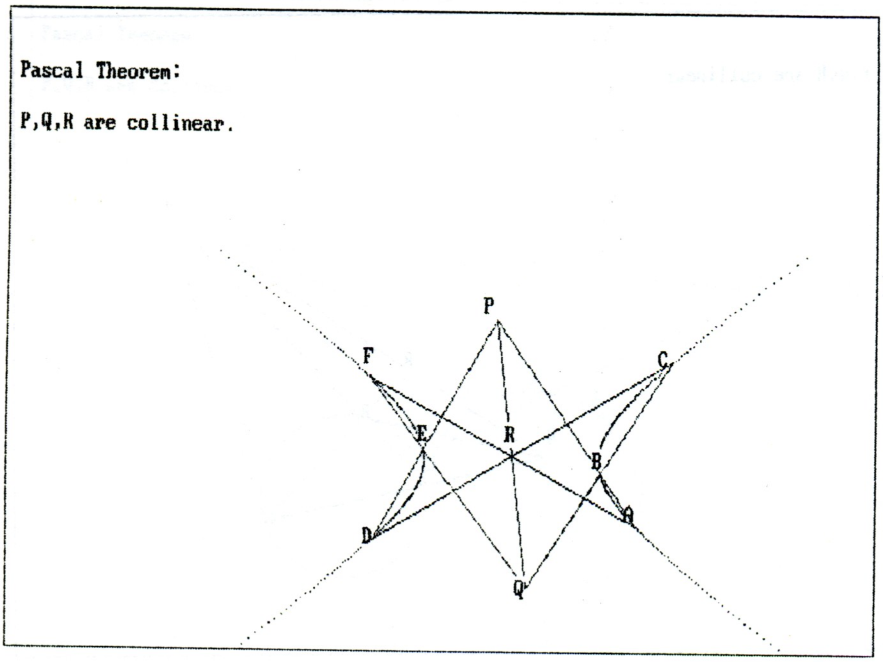
Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
P
F
C
E
R
B
A
D
Q

圖1-7

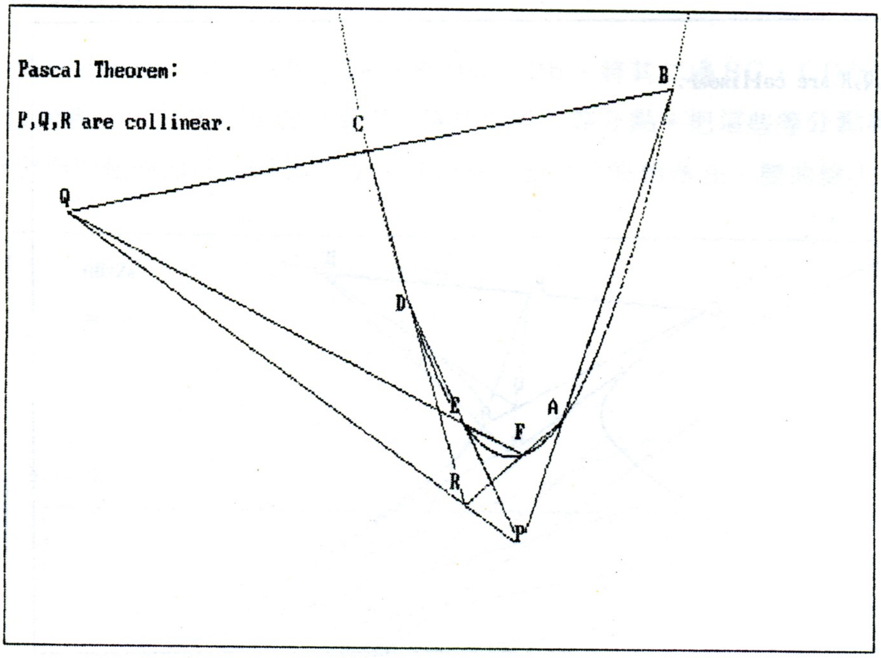
Pascal Theorem:
P,Q,R are collinear.
B
C
Q
D
E
A
F
R
P

圖 1-8

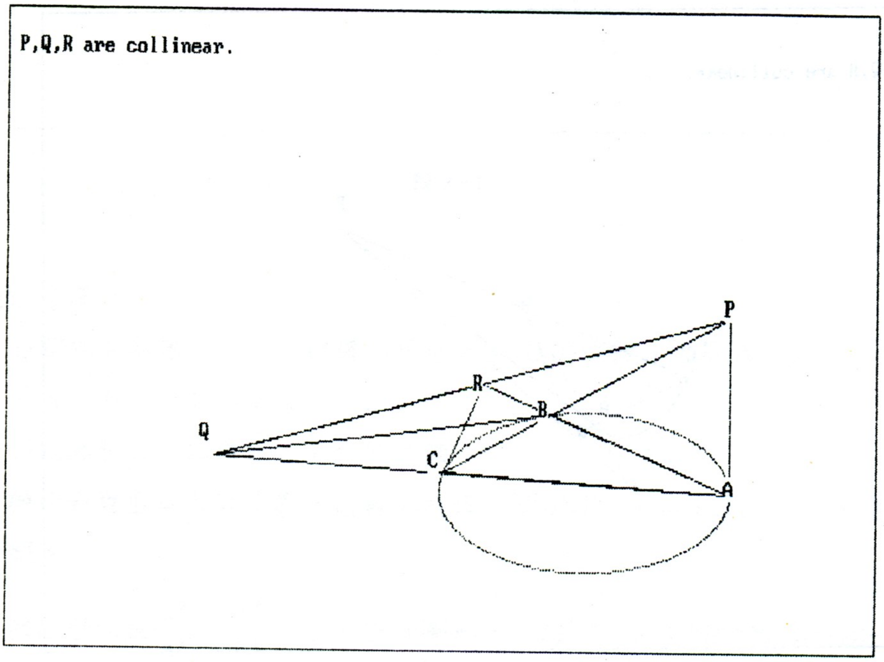
P,Q,R are collinear.
P
R
B
Q
C
A

圖 1-9

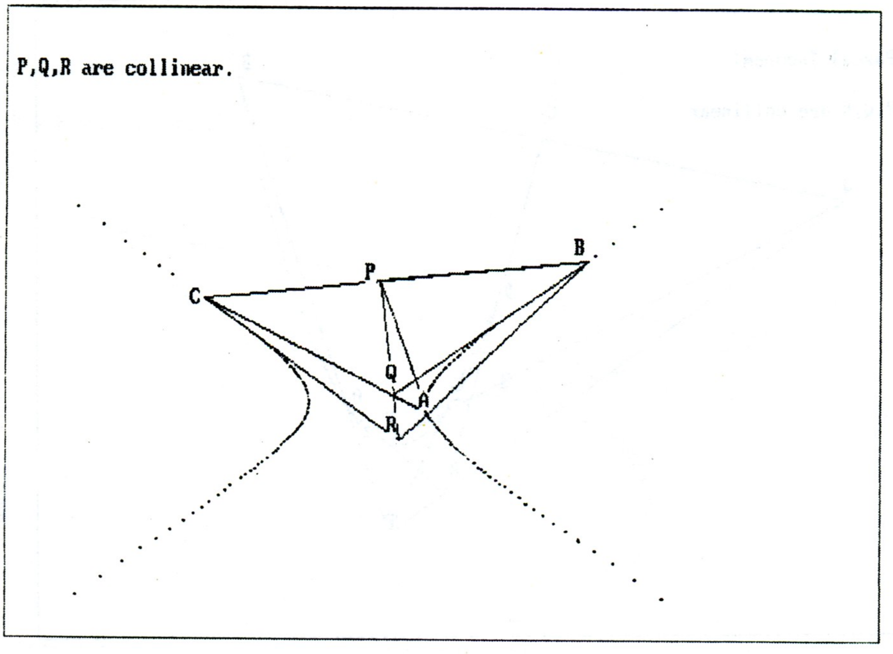

圖 1-10

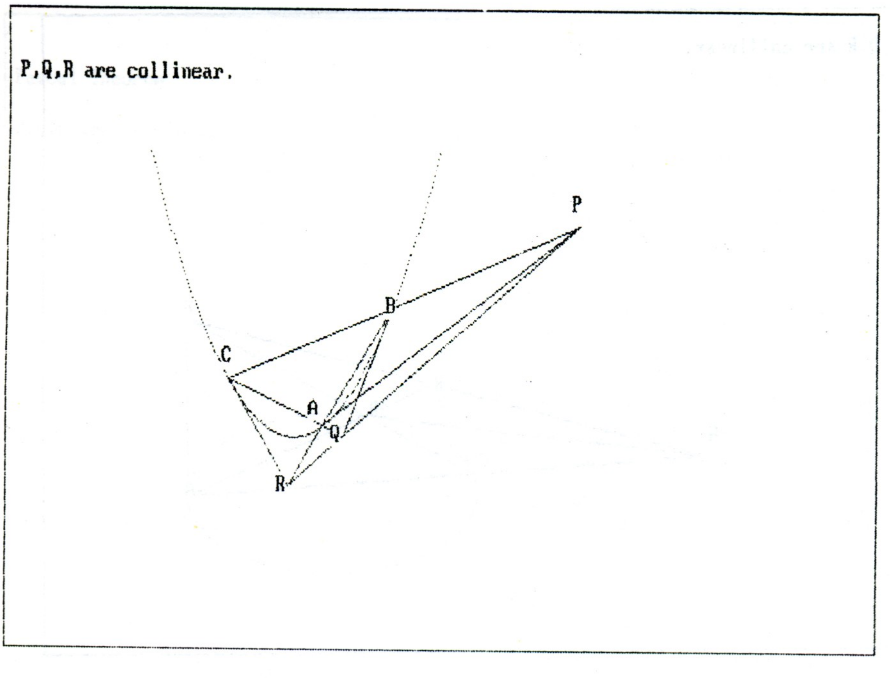

圖 1-11

二、雙曲線的作圖

給一矩形ABCD，其長AB＝2a，寬BC＝2b，將其二邊BC，CD皆作n等分，在CD的反射線上，以2a/n爲一單位，逐次取得n等分點，把這些等分點與 BC上的等分點分別作對應的連結（圖2-1），則對應兩線之交點恰落在一雙曲線上。

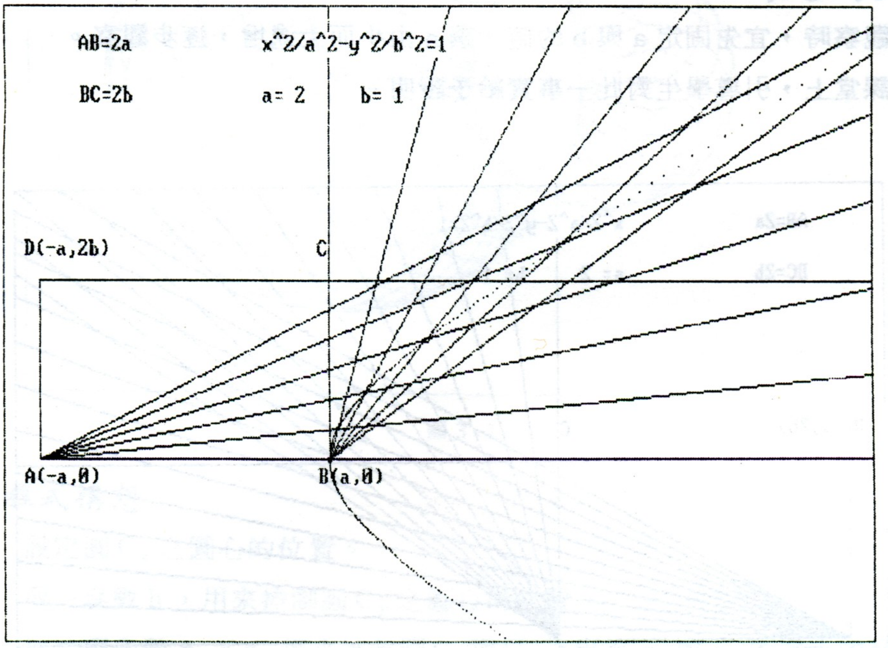

圖 2-1

(1) 程式構想

① 設定兩個參數a與b，以確定矩形ABCD的位置，並取A＝（－a，0），B＝（a，0），C＝（a，2b）。

② 設定參數n，以確定等分點的個數。

③ 繪出對應直線及其交點，直線與直線之間出現的時間長短，加以控制，以便觀察。

④ 繪出雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的部分圖形，以驗證上述交點確實落在此一雙曲線上。

(2) **操作觀察**

① Run入程式，螢幕首先出現圖2-1所顯示的情形，此時所取n值爲4。

② 改變n之值爲12，則出現如圖2-2所顯示的。

③ 在程式中，改變參數a或b的值，可以看到不同形狀的雙曲線的作圖。

(3) **教學建議**

① 觀察時，宜先固定a與b的值，讓n由小而大遞增，逐步觀察。

② 課堂上，引導學生對此一事實給予證明。

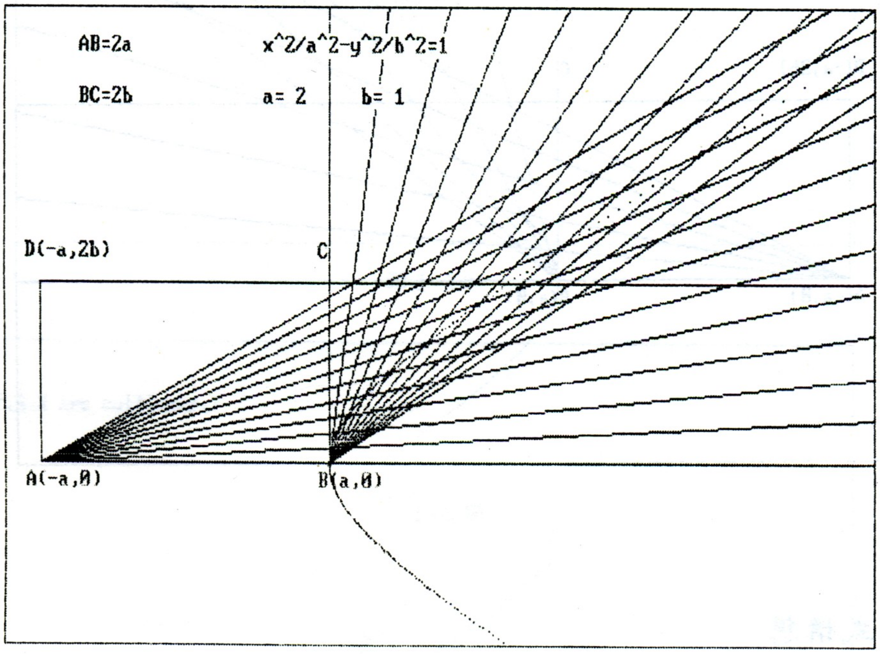

圖 2-2

三、軌跡問題(3)

一動圓P與兩定圓C_1與C_2中的一個內切，與另一個外切，則動圓之圓心P的軌跡爲何？