$1=0$？ $1=\frac{1}{2}$？ 還是 $1=2$？

張莉莉

臺北市立師範學院數理系

一、前　　言

教了幾年大學數理系的學生，發現喜歡理論數學的人數遠不如喜歡應用數學的人數，這個事實我沒法去改，也不想去改，誰叫理論數學的起步這麼枯燥呢？應用數學要學的成功，除了要會觀察大自然與數學的相關性，最重要的是會用理論數學的結果，也就是會用定理。但我發現學生在引用定理時，常會忽略了定理的先決條件而直接使用結論，當然如此一來就常會有一些似是而非的結果了。會產生讓學生不看定理條件就用定理的習慣，相信中學時的解題練習，做得多而不確實是主要的原因，至少在我讀中學時，或許是爲了簡化題目，也或許是重點只在計算的過程，總之，我不記得，做任何題目前須檢查題目本身是否符合演算法之先決條件。本文將提出三個例子，前兩例子是同一定理的錯誤引用，分別產生了 $1=0$ 及 $1=2$ 的結果，而第三個例子雖與第二個例子同爲無窮級數的問題，卻爲另一定理的錯誤引用，而導致了 $1=\frac{1}{2}$ 等矛盾結果。

二、$1=0$ 或 $1=2$

只要讀過一點微積分的人都知道連續函數一定能積分，積分的結果爲原函數的反導函數（ antiderivative ），當然一個函數的反導函數會有無限多個，不過定理證明告訴我們這些反導函數只差一個常數，不會有不同的型態。而積分會有不同的方法，也僅是針對不同類型的題目，不同的方法方才積得快或積得出結果，絕不會因爲用了不同的方法而積出錯誤的東西：

例題 1 ［註 1 ］

此題爲利用部分積分法（ Integration by parts ）積 $\int \frac{dx}{x\ln x}$，奇怪的是結論會得到 $0=1$ ，讀者不妨想想哪裡出了問題。

使用部分積分法積連續函數 $f(x)$，為找出兩個連續函數 $u(x)$、$v(x)$，使得 $f(x)\,dx=u(x)\,dv(x)$，則部分積分法定理告訴我們

$$\int f(x)dx=\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$

現在令 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ ，$u(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ ，$dv(x)=\dfrac{dx}{x}$

且 $a=\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}dx$

則 $du(x)=\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=\dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}dx=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$

且 $v(x)=\ln x$

根據前述之定理結果

$$a=\frac{1}{\ln x}\ln x+\int\frac{1}{x(\ln x)^2}(\ln x)dx=1+\int\frac{1}{x\ln x}dx=1+a$$

兩邊同減 a ，而得 $0=1$ 。

如果你一時想不出問題的解答，或許你想想下面這個類似的問題，能給你一些提示，這是一個關於冪級數（power series）中二次級數（Binomial series）展開的問題，因著上題同樣的原因，而得出了錯誤的結果。

例題2［註4］

首先我們都知道一個無窮級數，只要在收斂半徑內均可求和，而最常用的二次級數定理為：

當 $|r|<1$ 時，$\dfrac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots$

現在我們令 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，當然此時 $f(0)=1$

由微分的定義：$f'(x)=\dfrac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$$=\frac{4x}{(1-x^2)^2}=2\left(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right)=2\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^1$$

所以 $f(x)=\frac{2}{1-x^2}$

根據二次級數定理，當 $|x|<1$ 時

$$f(x)=2(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots)$$

因此，當 $x=0$ 時，$f(0)=2$

但已知 $f(0)=1$，故得出矛盾結果 $1=2$。

三、$1=\frac{1}{2}$

下面是無窮級數的例子，它是因爲Abel 定理［註5］的錯誤引用，而產生了 $1=\frac{1}{2}$ 的矛盾結果。首先我將 Abel 定理做一敍述，然後舉一例［註2］引用之，讀者看看能否找出錯誤的部分。

我們均知道：如果函數定義爲冪級數，$f(x)=\Sigma a_n x^n$，且其收斂半徑爲正實數 R，則級數在 $x=\pm R$ 處可能收斂，也可能不收斂，而 Abel 定理則告訴我們：假設級數 $\Sigma a_n x^n$ 在 $x=R$ 處收斂，則它在 $0\leq x\leq R$ 處均勻收斂（ uniformally convergent ），因此當然在 $0\leq x\leq R$ 處收斂；亦即，若 $|x|<R$ 時，$f(x)=\Sigma a_n x^n$，且 $\Sigma a_n R^n$ 收斂，則 $f(R)=\Sigma a_n R^n$。

例題 3

考慮分式 $\frac{1}{1+x}$

根據簡單的分式運算可得

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1-t^2}-t\frac{1}{1-t^4}-t^2\frac{1}{1-t^4}$$

再根據二次級數定理，當 $|t|<1$，

$$\frac{1}{1+t}=(1+t^2+t^4+\cdots\cdots)+(-t)(1+t^4+t^2+\cdots\cdots)+$$

$$(-t^3)(1+t^4+t^8+\cdots\cdots)$$

$$=(1-t-t^3)+(t^2-t^5-t^7)+(t^4-t^9-t^{11})+\cdots\cdots$$

現將等式二端同時從0積到 x，且 $|x|<1$，則

$$\ln(1+x)=(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})+(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{8})+(\frac{x^5}{5}-\frac{x^{10}}{10}-\frac{x^{12}}{12})+$$

$$(\frac{x^7}{7}-\cdots\cdots \qquad \text{（式1）}$$

當 $x=1$ 時上式之右邊爲

$$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4-2-1}{4}+\frac{8-4-3}{24}+\frac{12-6-5}{60}+\frac{16-8-7}{112}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{112}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{28}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots\cdots)$$

即，$x=1$ 時，無窮級數可以 $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ 表示。在初等微積分中，我們學過積分測試法［註3］：令 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是非負的級數，$f(x)$ 對所有的 $x\geq 1$ 均連續且滿足下面二個條件：

(a) $f(n)=a_n$ 對所有 $n=1,2,3,\cdots$

(b) 對所有 $x\geq 1$，f 是單調下降函數；即，假設 $x_1\geq 1$，$x_2\geq 1$，且 $x_1\leq x_2$，則 $f(x_1)\geq f(x_2)$。

則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 與 $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ 同時收斂，同時發散。

現在令 $f(x)=\dfrac{1}{x(2x-1)}$，則 $f(x)$ 滿足積分測試法的所有條件。根據瑕積分的定義

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x(2x-1)}dx=\lim_{h\to\infty}\int_1^h\frac{1}{x(2x-1)}dx$$

$$=\lim_{h\to\infty}\int_1^h\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left(-\ln x\Big|_1^h+\ln(2x-1)\Big|_1^h\right)$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left(-\ln h+\ln(2h-1)\right)$$

$$=\lim_{h\to\infty}\ln\frac{2h-1}{h}$$

$$=\ln 2$$

此為收斂，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2n-1)}$ 收斂。換句話說，級數

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots\right.$$

收斂，故可引用Abel 定理於式(1)，當 $x=1$ 時

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots$$

因為上式右端可合併成

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

故 $\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$，又因 $\ln 2\neq 0$， 所以兩端同除 $\ln 2$ 而得 $1=\frac{1}{2}$ 為錯誤之結果。

四、結 論

看完了前面三個例子，不知你找到問題的所在了沒？其實其原因是很簡單的，第一類的二個例子均是不定積分後忘了加一常數項，所以導出了 1 = 0 及 1 = 2 的結果，事實上你說它能導出 1 = 1000 也沒什麼不可以，因爲不定積分的結果，本來也只是原函數的反導函數，在最前面我們也說過，一連續函數的反導數如考慮常數的差異，則會有無限多個。第二類的例子則是在引用 Abel 定理時，忽略了定理所考慮的冪級數形態爲 $\Sigma a_n x^n$，亦即級數須爲 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots$，變數之次方呈上升的方式排列。當我們代 1 於（式 1 ）之右邊證明出級數爲收斂時，級數並沒有按上升冪的排列，故不可因 $|x| < 1$ 時（式 1 ）左右相等，且 $x = 1$ 時右式收斂，就引用 Abel 定理而說 $x = 1$ 時（式 1 ）左右相等。會提出本文，主要是有感於目前的大學生在定理的引用時，常不重視甚至忽略了定理的先決條件，而直接引用定理，結果當然是不對的。追根其原因很可能是中學時長時期的不重視條件所導致。雖然中學時所討論的題目，爲了單純化，均是符合定理條件的題目，但希望教師在教學時，仍提醒學生條件的重要性。

五、參考文獻

1. Anderson, B., "DoH's Theorem", The college Math. Journal, vol. 21, No.3 May 1990.
2. Burk, F., "More Fun With Series", The college Math. Journal. Vol. 21, No.5, November 1990.
3. Fraleigh, J.B., "Calculus With Analytic Geometry", 3rd Edition, Addison-Wesley Pub. Co., 1990.
4. Howard, J., "A power Series Representation", The college Math. Journal, Vol.21, No.5, November 1990.
5. Taylor, A. and Mann, W., "Advanced Calculus", third Ed., John Wiley Sons. 1983.