用積分求體積

吳家怡譯
大學入學考試中心

卡摩拉王國的國慶快到了。慶祝會的各項準備工作進行得很順利，不過還有許多事情需要安排，紀陸遠常常說“總有那麼多小事要做”。

教授正在寫她的微積分綱要，她深信卡摩拉王國的數學小組，已經把有關這個主題的問題做完了。國王卻總是說“我相信我們還漏掉些什麼。定積分一定不只用在求面積上”。

教授說“我們知道積分可以做兩件事——求反微分和求面積”。

這時老趙很洩氣地走進來。他說“我很擔心沙帽山，就是有個漂亮的拋物面形狀的那個山頂。(圖一)

圖一

“我記得什麼是拋物面，”教授說：“是由一般平面上的拋物線，在三度空間中繞著它的對稱軸旋轉得到的”。

“那山頂很不穩固”老趙告訴我們。“我擔心慶祝會中，孩子們跳來跳去，會把那山震垮了。所以我們決定把山頂上的土移走。但是我們得先知道要移走多少土”。

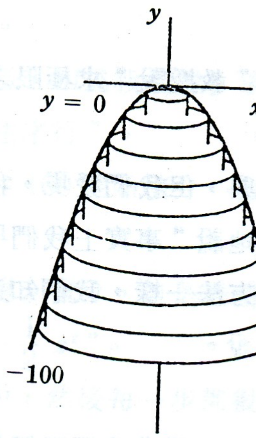
“眞糟糕，我們沒法幫你忙”紀陸遠說：“如果你需要知道什麼東西的面積的話，還有點希望”。

“我們應該可以做些什麼的”。國王抗議道，於是他開始召集大家。

“不行，我們沒辦法”。紀陸遠說：“我剛才翻過我的記錄，沒有任何公式可求拋物面體的體積”。

老趙還是把正確的尺寸給了我們：這山的截面的邊界恰好是 $y=-1/2x^2$，我們需要移走 $y=0$ 到 $y=-100$ 的土。

“我知道怎樣可以求近似值”國王說：“讓我們用求曲線下方面積同樣的方法著手。我們可以把這山頂分成許多小圓柱”（圖二）。巨人蒙哥高興地拍手道“蛋餅！蛋餅！”



圖二

（“如果他愛叫它們蛋餅，我們最好這樣叫”紀陸遠小聲說。）

“現在我們只需要求每個蛋餅的體積”教授說。

“這容易！”紀陸遠說“蛋餅的體積像下面這樣：

底面積×高＝π（半徑）^{2}×（高）”

“目前半徑是 x”教授說。

蛋餅體積＝πx^2×（高）

“我們以什麼表示高呢？”紀陸遠問。

“我們以什麼表示體積呢？”國王問。

“我們可以叫高 Δy”我建議“叫每個蛋餅體積 ΔU_i，小 i 表示第 i 個蛋餅”。

$$\Delta U_i = \pi x^2 \times \Delta y$$

“然後求體積的近似值，我們只要把這些蛋餅的體積加起來”教授說。

$$\text{拋物面體積} = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} \pi x^2 \times \Delta y$$

“我們還是漏了很多部分的體積”紀陸遠反對道“看看有多少區域在拋物體裡，卻不屬於任何一塊蛋餅”。

“我們可以愈分愈多蛋餅，使得體積近似值和全部體積愈來愈近”教授說。

紀陸遠正要抱怨他得加那麼多塊體積，國王卻叫了起來“我知道怎樣才能求拋物面體的體積了！我們讓蛋餅數目趨於無限大，來求它的極限！”

$$\text{拋物面體的體積} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta y\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi x^2 \times \Delta y$$

“我們可以叫這個極限為連續和”教授說“求極限之前，我們可以說我們有一個不連續之和”。

我們都為我們能發展這麼遠而高興，但我們發現，我們都不知道下步該怎麼走。

“這樣行不通的！”紀陸遠堅決地說“事實上我們早就證明過它不能用了！它就和我們上次求游泳池面積時用的第一個方法一樣，我們知道它完全不能用！”

“這就對了！”教授突然興奮地說。

“什麼？”紀陸遠說。

“就是你說的呀！”教授繼續興奮地說“我們已經知道曲線下的區域面積等於連續的和”。

$$\text{曲線下區域面積} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

“這個我知道！”紀陸遠說“但是我們不會算連續和”。

“不過我們又知道曲線下區域面積等於定積分”。

$$\text{曲線下面積} = \int_a^b f(x)\,dx$$

“這個我也知道”紀陸遠說。

“如果連續和及定積分都等於面積，那它們彼此一定相等！”教授快樂地宣佈道。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \text{連續和} \\ &= \text{曲線下區域面積} \\ &= \text{定積分} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

“現在我們可以求那個連續和了”國王說“我們只要求出定積分，這是我們會的。所以連續和不只是代表面積，也可以代表體積，甚至一些其他東西”。

“你們現在能解決那問題了嗎？”老趙問。我們把拋物面體體積用連續和表示出來。

$$U=\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi x^2\Delta y$$

“現在，只要把它變成定積分”國王說。

$$U=\int \pi x^2 dy$$

“上下界呢？”紀陸遠問。

“上下界應該用 y 的值表示，因爲我們對 y 積分”國王說“我們選的上下界，要讓蛋餅把所有我們要的部分都蓋住才行”。

“看起來，似乎是從 $y=-100$ 開始積分一直到 $y=0$”教授說。（圖二）

$$U=\pi\int_{-100}^{0}x^2dy$$

“現在我們麻煩了。我們對 y 積分，但是被積分的是 x 的函數”紀陸遠說。幸好老趙提醒他“我已經告訴你 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$”。

我們把這個關係代入積分中，然後每一步都很自然地出來了。

$$x^2=-2y$$

$$U=\pi\int_{-100}^{0}(-2y)dy$$

$$=(-2\pi)\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{-100}^{0}$$

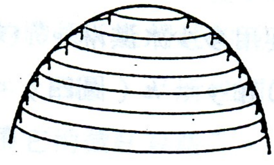
$$=10,000\pi$$

“哇！這可是不少的土”老趙吹了聲口哨“不過我相信你們”。

“我可不相信你們”紀陸遠提出異議“我不能保證蛋餅法真的行得通。讓我們試試我們已經知道體積的東西，像半徑爲 r 的球”。

“我們知道球體積是 $4/3\pi r^3$”國王說。

教授開始把球分成蛋餅。“讓我們先求一個半球”她建議道“然後乘以 2 就得到整個球體積”（圖三）。



圖三

我建議我們把一塊蛋餅的體積定為 dU，這樣容易設出積分 $\int dU=U$。我們決定叫蛋餅的厚為 dy，因為是對 y 積分。所以每塊蛋餅體積是

$$dU=\pi x^2 dy。$$

我們求它的積分

$$U=\int dU$$
$$=\int \pi x^2 dy$$

我們決定上下界該用 y 值：由 $y=0$ 到 $y=r$

$$U=\int_0^r \pi x^2 dy$$

現在我們得以 y 表示 x^2。紀陸遠一看到代數問題，就能立刻認出來。由於球的橫截面是一個圓，他用圓方程式：

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2=r^2-y^2$$
$$U=\pi\int_0^r (r^2-y^2)dy$$

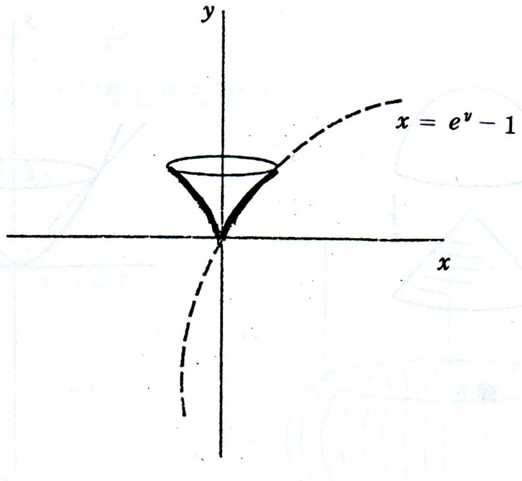
現在只剩下用我們的方法來解定積分了：

$$U=\pi\int_0^r r^2 dy-\pi\int_0^r y^2 dy$$
$$=\pi r^2\int_0^r dy-\pi\frac{1}{3}y^3\Big|_0^r$$
$$=\pi r^2(r-0)-\pi\frac{1}{3}(r^3-0)$$
$$=\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3$$
$$U=\frac{2}{3}\pi r^3$$

教授鬆口氣說“正是我們要的！如果半球是 $\frac{2}{3}\pi r^3$，那整個球就是 $\frac{4}{3}\pi r^3$。”

“所以這方法真能用呢！”紀陸遠快樂地說“慶祝會中有許多需要安排的事，這方法都可以幫上忙呢！”他翻開他的筆記本，翻到其中一頁。

“這兒有個好例子，我們設計了一種特別的蛋捲冰淇淋，在慶祝會中用。如果我們能算出蛋捲的體積，我們就知道要用多少冰淇淋。”，那些冰淇淋蛋捲是由曲線 $x=e^y-1$ 繞 y 軸旋轉來的，上下界為 $y=0$ 和 $y=h$（圖四）。



圖四

（我們用 h 代表蛋捲冰淇淋的高，因爲紀陸遠忘了高是多少了。）

“我們可以很容易地利用蛋餅法”教授說“我們對 y 積分，由 $y = 0$ 到 $y = h$ 。”

每個蛋餅體積爲：$dU = \pi x^2 dy$

$$x = e^{y-1}$$

$$dU = \pi(e^y - 1)^2 dy$$

$$U = \pi \int_0^h (e^{2y} - 2e^y + 1) dy$$

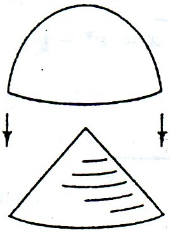
$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2y} - 2e^y + y \right) \Big|_0^h$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2h} - 2e^h + h - \frac{1}{2} e^0 + 2e^0 - 0 \right)$$

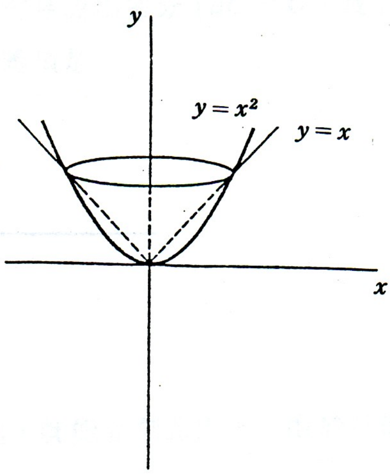
$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2h} - 2e^h + h + \frac{3}{2} \right)$$

“另一個問題我們現在也可以解決了”國王說“花圃管理員向我提起那塊尖尖的石頭。還記得那塊在玫瑰花園裡，表面是圓錐型的石頭嗎？我很怕慶祝會中的小孩會被那尖頭傷到。除非我們做個東西把它罩住。所以老趙和我商量出怎樣造一個圓滑的水泥蓋子放在頂上。如果我們能算出它的體積，我們就知道要多少水泥了！

這個罩子是由兩條曲線 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所包圍的部分，繞 y 軸旋轉而成的(圖六)。“注意我們把那蓋子倒過來，讓它稍微好算些”。



圖五



圖六

“我們需要蛋餅嗎？”國王問“或許我們可以用其他的形狀”

“什麼形狀呢？”紀陸遠問。

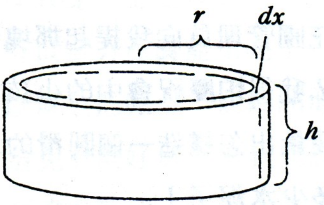
“我們需要寫出它的連續和”教授同意道“或許能找出另一個可用的形狀。”

我建議我們用圓環層（圖七）如果圓環層夠薄，那我們就可以說這圓環層的體積等於 $dU=(2\pi r)hdx$。（注意 $2\pi r$ 是圓周，所以 $2\pi rh$ 是外層面積。圓環層體積爲表面積乘以厚度）。

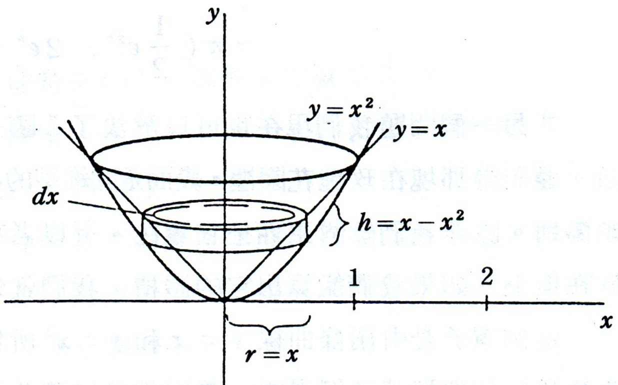
“你最好確定不能把這些層弄得太厚”紀陸遠說“如果它們太厚了，你用來求體積近似值的公式就不成立了”

“這沒問題”教授告訴他“我們等會兒求極限時，每層的厚度要趨近於 0”

然後，我們得把這些圓環層裝進罩裡（圖八）。



圖七



圖八

“現在我們需要這圓環層的半徑和高度”教授說。半徑剛好等於它所佔的 x 坐標，高度則等於兩曲線的距離 $h = x - x^2$。

“現在我們必須求它們的和”國王補充說。

$$U = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r h \,\Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x(x - x^2)\,\Delta x$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\,(x - x^2)\,dx$$

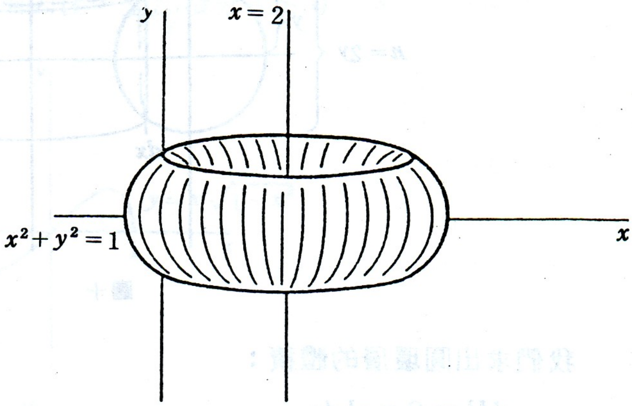
“這容易積分”紀陸遠說。

$$U = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 - 2\pi \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$U = \frac{\pi}{6}$$



圖九

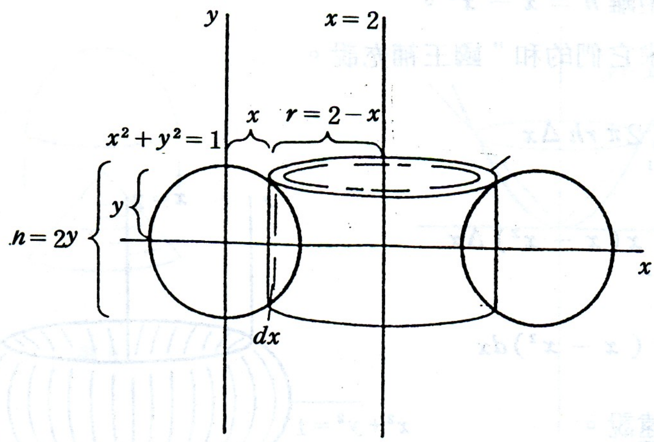
“不錯，我們又發展出一種圓環層的方法”紀陸遠說“這可以用在慶祝會中的另一個東西上。我們要送甜甜圈給小朋友。我得算出甜甜圈的體積，這樣我才知道要訂多少配料”。

甜甜圈是由圓 $x^2 + y^2 = 1$ 繞 $x = 2$ 的直線旋轉出來的。（幾何上給它的名字是車胎面）。

阿板畫了個圖，代表甜甜圈中的一個圓環層。接下來的問題是去求它的半徑和高。

“它的半徑是 $2 - x$”教授說。

“高是 $2y$”國王補充說（圖十）。



圖十

我們求出圓環層的體積：

$$dU = 2\pi rhdx$$

$$r = 2 - x$$

$$h = 2y$$

“我們可以解出 y ”紀陸遠注意到。

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$dU = 2\pi(2 - x)\,2\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

“我們現在得求出積分”教授說。它應該以 x 表示，因爲我們要對 x 積分”。我們仔細觀察圖形，最後決定由 $x = -1$ 積到 $x = 1$，就可以把全部甜甜圈包含進去。

$$U = \int_{-1}^{1} 2\pi(2 - x)\,2\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{1}(2 - x)\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

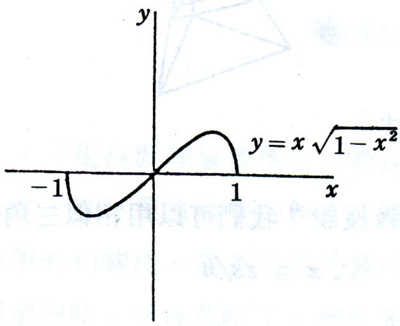
$$= 4\pi\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x^2}\,dx - 4\pi\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

我們讓 $u = 1 - x^2$，$du = -2x\,dx$ 代入第二個積分，得到

$$U=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+2\pi\int_{0}^{0}u^{1/2}\,du$$

“第二個積分不可能對！”紀陸遠說“它等於0啊！”

我們想了一會，教授說“它當然是0，你看這被積分的函數圖形（圖十一），有一半在 x 軸下方，面積是負的。這兩部分消去後，全部積分等於0”。



圖十一

“不論如何，我們知道甜甜圈的面積不可能為0”紀陸遠說。

“幸好還有第一個積分要算”。

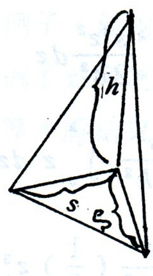
$$V=8\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\,dx$$

我們用三角代入法 $x=\sin\theta$ ， $dx=\cos\theta\,d\theta$

$$U=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

我們求過 $\cos^2\theta$ 的積分，所以最後的積分是：

$$U=8\pi\times(\pi/2)$$
$$=4\pi^2$$



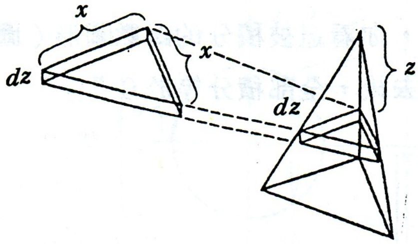
圖十二

“我還有另一個和慶祝會有關的問題”老趙說“我要在大廳的一角建一個架子（圖十二）。這架子高大，底為等腰直角三角形，腰為 s ；我想你們能求出這架子的體積”。

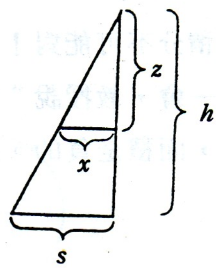
“我們能嗎？”紀陸遠說“這不是一個旋轉的問題，所以和我們以前做的不同。你沒法用蛋餅或圓環層來塡滿它。事實上唯一可用來塡它的是三角形”（圖十三）。

“每個小三角形體積很容易求，因為它正是三角形面積乘以厚度。而且它們是直角三角形，面積很好求”紀陸遠說“你只要把兩股相乘除以2”我們有的兩股相等，所以只要求出一股就行了。我們讓 x 代表一股長， z 表示由三角錐頂點到這兒的距離（見圖

十四）。



圖十三



圖十四

"我知道怎樣求 x "教授說"我們可以用相似三角形的關係建立"

$$z/h = x/s \qquad \therefore x = zs/h$$

我們寫下微分後的值

$$dU = \frac{1}{2}x^2dz = \frac{s^2z^2}{2h^2}dz$$

我們對 z 積分，由 $z = 0$ 積到 $z = h$：

$$U = \int_0^h \frac{s^2z^2}{2h^2}dz$$

$$= \frac{s^2}{2h^2}\int_0^h z^2dz$$

$$= \frac{s^2}{2h^2}\left(\frac{1}{3}\right)z^3 \Big|_0^h$$

$$= \frac{s^2h^3}{6h^2}$$

$$= \frac{s^2h}{6}$$

"我從沒想到積分有這麼多變化"紀陸遠說"這一定會是有史以來最好的慶祝會，我們讓微積分做了這麼多工作。現在還有一些問題我想我們也可以解了，只是我記不得它們了…"（本文譯自 Calculus by Discovery By. D. Downing）