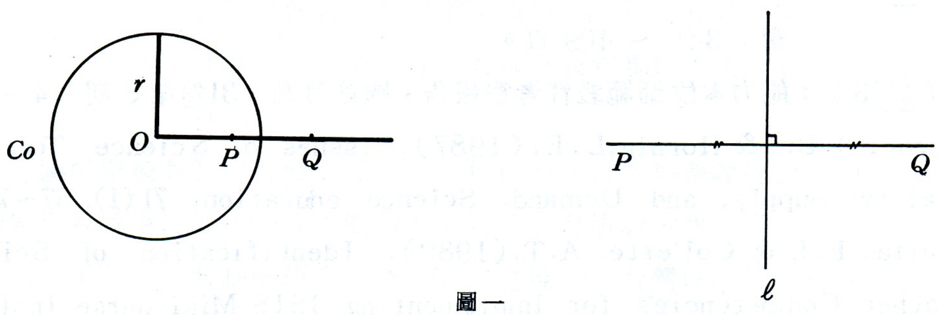
有關圓的鏡射

陳鈯逸
臺灣省立台中第一高級中學

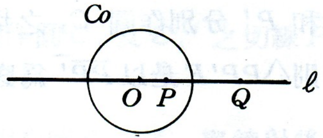
高中幾何學有關圓的鏡射方面，以前教材所僅有的一點點也被刪除了，整個高中的數學教材中，除了以解析法處理幾何問題的方法外，再也找不到綜合幾何的影子，漸漸的這些東西也被人們所淡忘，此次亞太地區高中數學競試的試題中有二題是屬於幾何，其中一題尺規作圖題，可用圓的鏡射來處理，但因爲高中教材已刪除，所有參加考試的學生，大都感到技窮，在此時此地實應借一小角，提提它，也許有助於對綜合幾何有興趣的同學，有所助益。

在圓鏡射中，先以一定圓 Co 爲鏡射圓，其圓心如果令之爲 O，則在同一平面上，任一點 P 關於 Co 之鏡射點 Q 之定義是如此設定的，即 Q 須在 $\overrightarrow{OP}$ 射線上，且 $OP \cdot OQ = r^2$，此處 r 是 Co 的半徑（如圖１）。人們之所以會找到圓的鏡射實起源於直線的鏡射。如果把直線當作是一半徑無限大的圓時，則 P、Q 對稱於直線，它合於 $OP \cdot OQ = r^2$，在此定義下，如果 r 爲定長，吾人稱 P、Q 互爲反轉點，P 對應 Q 之變換爲反轉變換，以下對圓的反轉變換有幾個定理，附於下方；以下之 Q 點稱爲 P 關於鏡射圖 Co 之像。



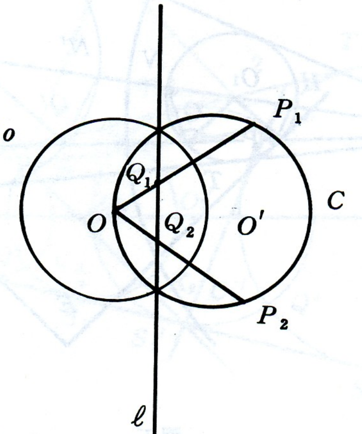
圖一

定理１：一直線 ℓ 通過鏡射圓 Co 的圓心，經鏡射後線 ℓ 的像的圖形爲 ℓ 本身，其中 Co 的圓心經鏡射後，其像爲無限遠點，圓內部的點，所成的像必在圓外。



圖二

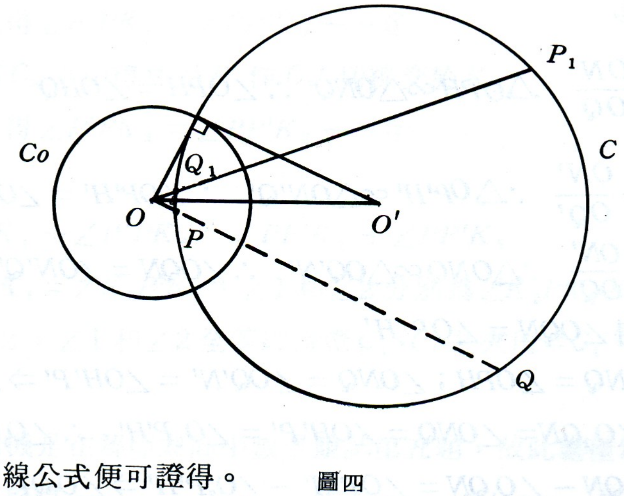
定理2：一圓C如果經過鏡射圓 Co 的圓心 O，則經鏡射後其像的圖形是一直線，且不經過O。



利用相似形即可證得。

圖三

定理3：如果圓C與鏡射圓 Co 正交，則圓C經鏡射後其像的圖形仍爲C圓本身，

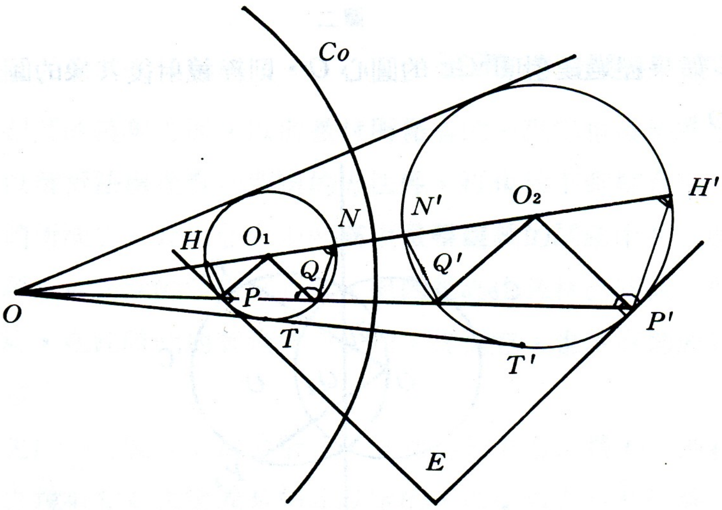


利用切割線公式便可證得。

圖四

定理4：設 Co 為鏡射圓，圓 C_1 及其上一點 P，經鏡射以後 C_1 的像為 C_1'，點 P 的像為 P' 時，則過 P 和 P' 分別作圓 C_1 之切線 ℓ 和圓 C_1'（可能為直線）之切線 ℓ' 交於 E 時，則 $\triangle PP'E$ 是以 $\overline{PP'}$ 為底邊的等腰△。

證 明：請參考下圖五。



圖五

設 $P\to P'$；$Q\to Q'$；$H\to H'$；$N\to N'$ 如圖。

則 $OP\cdot OP'=OQ\cdot OQ'=OH\cdot OH'=\underset{③}{ON\cdot ON'}$ 且 $OP\cdot OQ=\underset{①}{OH\cdot ON}$；

$\underset{②}{OP'\cdot OQ'=OH'\cdot ON'}$

① 得 $\dfrac{OP}{OH}=\dfrac{ON}{OQ}$ $\therefore\triangle OPH\sim\triangle ONQ$ $\therefore\angle OPH=\angle OHQ$

② 得 $\dfrac{OP'}{OH'}=\dfrac{ON'}{OQ'}$ $\therefore\triangle OP'H'\sim\triangle ON'Q'$ $\therefore\angle OP'H'=\angle ON'Q'$ ……ⓐ

③ 得 $\dfrac{OQ}{ON}=\dfrac{ON'}{OQ'}$ $\therefore\triangle ONQ\sim\triangle OQ'N'$ $\therefore\angle OQN=\angle ON'Q'$ ……ⓑ

由ⓐⓑ得 $\angle OQN=\angle OP'H'$

同理可證 $\angle ONQ=\angle OPH$；$\angle ONQ=\angle OQ'N'=\angle OH'P'\Rightarrow\angle OPH=\angle OH'P'$

但等腰性質 $\angle O_1QN=\angle ONQ=\angle OH'P'=\angle O_2P'H'$ $\therefore\angle O_1QN=\angle O_2P'H'$ －②

①－② $\angle OQN-\angle O_1QN=\angle OP'H'-\angle O_2P'H'\Rightarrow\angle O_1QP=\angle O_2P'Q'$ －－③

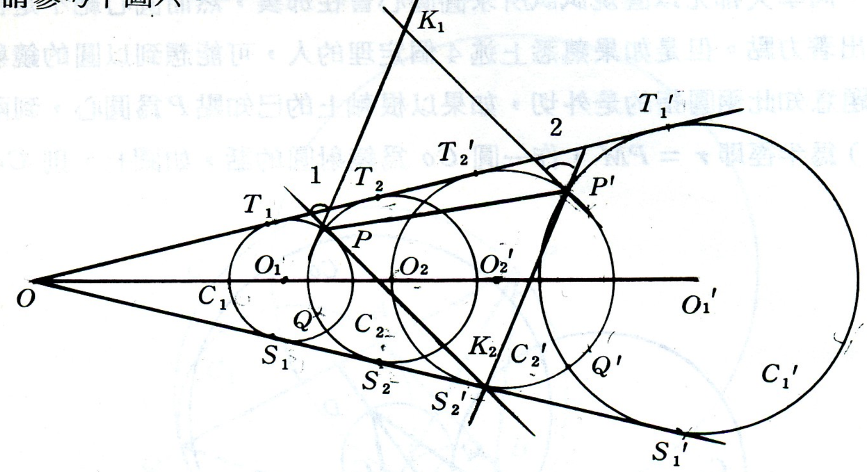
但 $\angle O_1PQ=\angle O_1QP$ 由③ $\therefore\angle O_1PQ=\angle O_2P'Q'$ －－④

由④其餘角相等$\therefore \angle P'PE = \angle PP'E$

$\therefore$過P和其像點P'分別作圓C_1及C_1'之切線$\overleftrightarrow{PE}$、$\overleftrightarrow{P'E}$和線$\overleftrightarrow{PP'}$夾等角。

定理4：以Co為鏡射圓，另兩相交圓C_1、C_2經鏡射後得到的像為C_1'、C_2'時，則C_1、C_2兩圓之交角與C_1'、C_2'兩圓之交角全等（方向相反）。

證　明：請參考下圖六。



圖六

證　明：C_1、C_2在交點P所作之二切線夾角，等於C_1'、C_2'過交點P'之兩切線夾角（其中C_1'、C_2'、P'分別為圓C_1、C_2，及點P經圓鏡射所得之像）

設過P切C_1之切線和過P'作C_1'之切線交於K_1

依前證得$\angle P'PK_1 = \angle PP'K_1$ ——①

設過P切C_2之切線和過P'作C_2'切線交於K_2

依前證得$\angle P'PK_2 = \angle PP'K_2$ ——②

①＋②得

$\angle P'PK_1 + \angle P'PK_2 = \angle PP'K_1 + \angle PP'K_2$

即$\angle K_2PK_1 = \angle K_2P'K_1$，$\angle 1$和$\angle 2$分別為$\angle K_2PK_1$及$\angle K_2P'K_1$之補角，$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 1$和$\angle 2$全等即得證C_1、C_2之夾角$=C_1'$、C_2'之夾角，故得證。

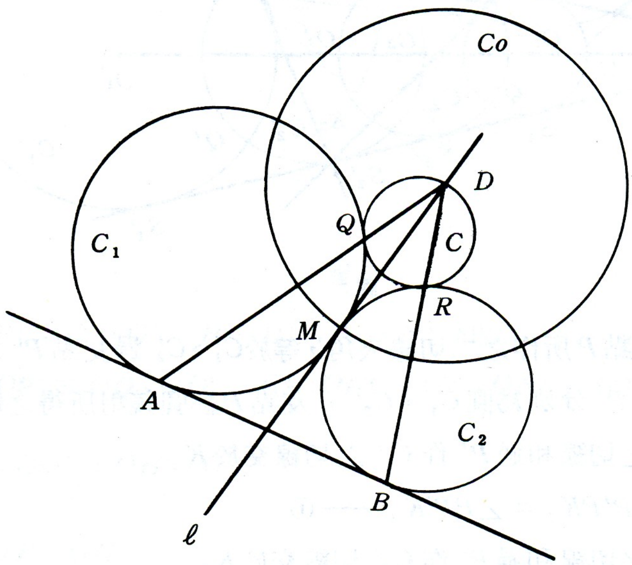
因本文主要動機是在解亞太高中數學競試第五題，故此處僅將解題中，須借用的部份定理列出，餘不贅述。

1991年亞太數學奧林匹亞競試，在三月十五日師大數學系舉行，第五題試題如下:

設 C_1 與 C_2 爲兩個相切的圓，而點 P 在此兩圓的根軸上，試以尺規作圖作出通過 P 點且與 C_1、C_2 都相切的所有圓 C。

（所謂 C_1 與 C_2 的根軸，乃是 C_1 與 C_2 的公切線，此直線與 C_1、C_2 的連心線垂直）

所謂尺規作圖就是只能以可畫直線和畫圓二種工具，不能有刻度、角度……作圖，在初見此題時，同學大都先以圓規試試所求圓圓心會在那裏，然而圓心絕不是在根軸上，因此便很難找出著力點。但是如果熟悉上述4個定理的人，可能想到以圓的鏡射方式來處理，尤其由題意知此兩圓指的是外切，如果以根軸上的已知點 P 爲圓心，到兩圓公切點，（令爲 M）爲半徑即 $r=PM$，作一圓 Co 爲鏡射圓的話，如圖七，則 Co 通過 M

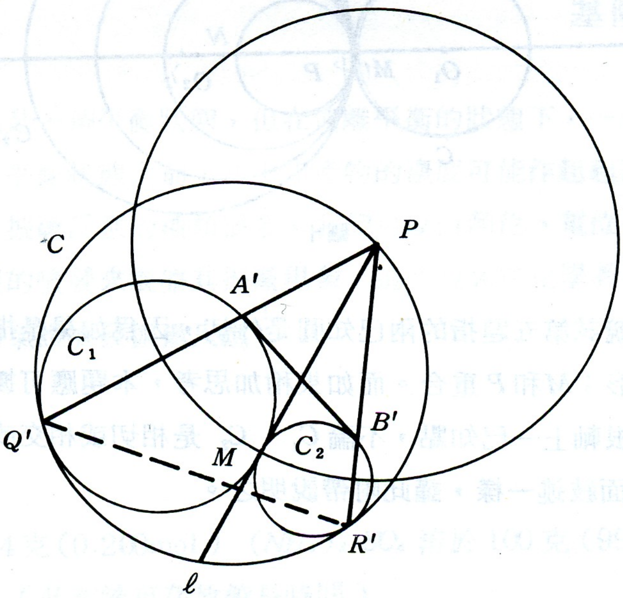


圖七

故很明顯的 Co 和 C_1 及 C_2 兩圓正交，因而 C_1、C_2 兩個圓經 Co 爲鏡射圓鏡射後它們的像均爲自己本身。假若所求的圓過 P 又與 C_1、C_2 相切，則此圓經圓 Co 爲鏡射圓，鏡射後的像必爲一直線 ℓ（因此圓經過鏡射圓的圓心）且必與 C_1、C_2 相切（因兩圓兩切，夾角爲 0°，經圓鏡射後其像之夾角也保持 0°，即相切），所以可知 ℓ 是 C_1 和 C_2 的公切線，剩下的問題就是由像，即（線 ℓ）來反推出過 P 與 C_1、C_2 相切的所求圓了。既然線 ℓ 與 C_1、C_2 相切，不妨令其切點爲 A、B 如圖七，而 A、B 是那一個點的像呢？只要連 $\overline{PA}$ 及 $\overline{PB}$ 分別交 C_1 圓、C_2 圓之交點，令爲 Q、R 就對了，如此一來，經過 P、Q、R 三點的圓經以 Co 爲鏡射圓，PM 爲半徑鏡射後，不就是公切線 $\overleftrightarrow{AB}$ 了嗎？

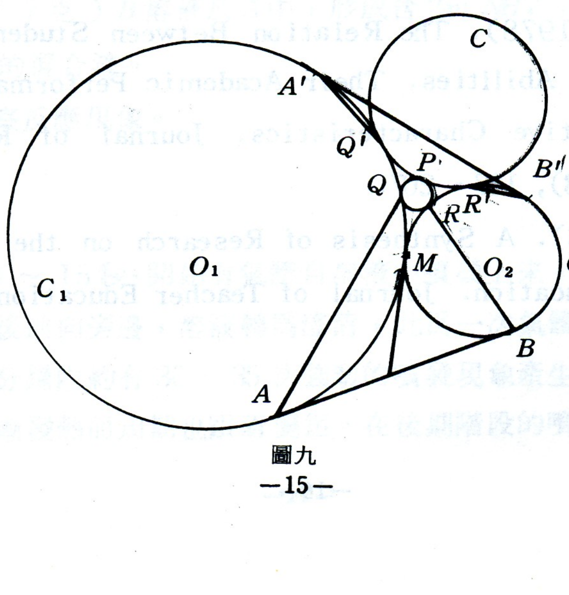
由於定理 4 的關係過 P、Q、R 三點的圓確實是與 C_1 圓、C_2 圓相切，這便是所求的圓了。經過 P、Q、R 三點作一圓只要用尺規作 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{PR}$ 的中垂線便可找到圓心和半徑，所以大致上，作法便確定了。

由於圓 C_1 和 C_2 的公切線有二條，所以過 P 的所求圓就有二個了，請看下圖：它的作法是連 $\overleftrightarrow{PA'}$、$\overleftrightarrow{PB'}$ 兩線分別交圓 C_1 和圓 C_2 於 Q' 和 R' 經 $PQ'R'$ 三點作一圓，啊！此圓和 C_1、C_2 內切是所求的另一圓。如下圖八



圖八

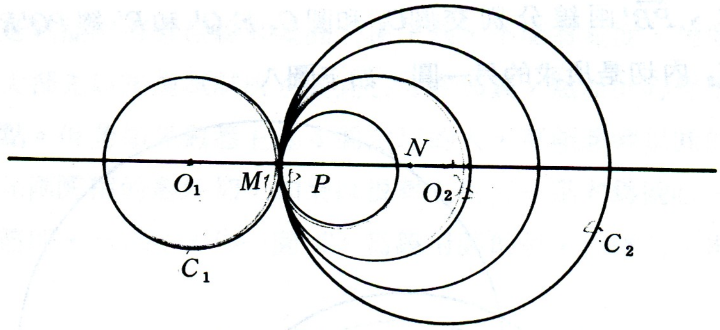
可是 P 點在根軸上的位置會影響我們過 P 作出的所求圓（蒙師大李虎雄教授提示，多謝）位置，我們注意圖九，如果 P 點在二公切線之間，則同上述的方法所找到的圓也是兩個，



圖九

但它們均與C_1、C_2 相外切，如圖九。

至於P點如果正好是M點，則任意過M和C_1、C_2 相切之圓均爲所求，其作法只要連$\overleftrightarrow{O_1O_2}$，取其上任意點$N$爲圓心，$MN$爲半徑作圓即可，此種圓有無限多個，如圖十。



圖十

本年度亞太數學競試第五題指的兩已知圓是外切，因爲如果是指相內切，則只有一種圓相當於圖十的情形；M和P重合。而如果稍加思考，本題應可擴大到P點，只要在兩已知圓C_1、C_2 之根軸上一已知點，不論C_1、C_2 是相切或相交或分離（內離除外），試題之解法，都如上面敍述一樣，謹此附帶說明之。

（上承第9頁）

Marjoribanks, K. (1978). The Relation Between Students' Convergent and Divergent Abilities, Their Academic Performance, and School Related Affective Characteristics. Journal of Research in Science Teaching, 15 (3), 197～207.

Troyer, M.B. (1986). A Synthesis of Research on the Characteristice of teacher Education. Journal of Teacher Education, Sept-Oct, 6～11.