

1991 年亞太數學奧林匹亞試題

1991 年 3 月 15 日

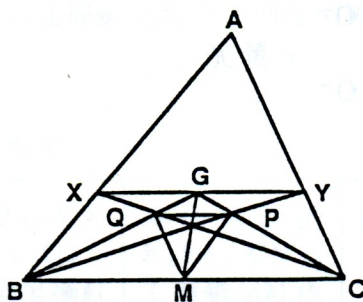
中華民國亞太數學奧林匹亞競試委員會提供

注意事項：

- (1) 時間分配：4 小時
- (2) 配分：每題 7 分，總計 35 分。
- (3) 不可使用計算器

問題 1：

在 $\triangle ABC$ 中， G 為其重心， M 為 BC 的中點，設 X 在 AB 上， Y 在 AC 上，使得 X, G, Y 三點共線且 XY 與 BC 平行，若 XC 與 GB 相交於 Q ， YB 與 GC 相交於 P ，試證 $\triangle MPQ$ 與 $\triangle ABC$ 相似。



問題 2：

設平面上有 997 點，將每兩點的連接線段的中點以紅點標示，試證所得紅點至少有 1991 個。

您能否找到一個特例使紅點恰有 1991 個？

問題 3：

設 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 都是正實數，且

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$$

試證

$$\sum_{k=1}^n \frac{(a_k)^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k$$

問題 4：

在學校下課休息時， n 位學生繞著老師圍成一圓圈玩遊戲，老師根據下述規則沿順時針方向走過每一位學生面前分給某些學生糖果：他先選定一位學生給他一塊糖，然後跳過一位再給下一位學生一塊，接著跳過兩位再給下一位學生一塊，然後跳過三位，……等等。

試求所有可能的 n 值，使得每位學生至少都能拿到一塊糖（老師可能要繞許多圈）。

問題 5：

設 C_1 與 C_2 為兩個相切的圓，而 P 點在此兩圓的根軸上，試以尺規作圖作出通過 P 點且與 C_1, C_2 都相切的所有圓 C 。

（所謂 C_1 與 C_2 的根軸，乃是 C_1 與 C_2 的公切線，此直線與 C_1, C_2 的連心線垂直）。