

乘法公式與十分逼近法求平方根

陳廷圭

花蓮縣立新城國中

一、研究動機

國中課本第三冊第 18 頁的例題 3 中叫我們用十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值，準確到小數點以下三位，則須計算一位數平方 2 個，二位數平方 8 個，三位數平方 4 個，四位數平方 3 個，五位平方數 1 個，這個算法，不但費時，而且又容易計算錯誤。

二、研究目的

雖然利用計算器可以很方便準確的計算出各項乘積，但我們希望找出一種在沒有計算器時仍可以快捷的求出近似值的方法。

三、研究過程

〔問題一〕

課本第三冊 51 頁例題 7，一繩長 130 公分，分成 4 : 6 兩段，各長多少公分？

解法是利用比例 $\frac{130}{6+4} \times 6 = 78$ ， $\frac{130}{6+4} \times 4 = 52$

得各長 52 公分與 78 公分。

利用本題解法輔助十分逼近法是否比較快？

〔研究一〕

試仿此題之解法輔助十分逼近法求平方根之近似值。

$$\because 1 < \sqrt{3} < 2 \quad \text{而} \quad (\sqrt{3}^2 - 1^2) : (2^2 - \sqrt{3}^2) = 2 : 1$$

$$\therefore \text{希望 } \sqrt{3} \text{ 會等於 } (1 + \frac{2}{3} \times 1) \text{ 則 } 1.6 < \sqrt{3} < 1.7$$

$$\text{但 } 1.6^2 = 2.56 < 3, 1.7^2 = 2.89 < 3$$

〔結論一〕

用比例式的特性來輔助十分逼近法求這個近似值，答案並不正確，但已經比較接近了。

〔問題二〕

習作 25 頁第 1 題利用乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 求 $(20.4)^2$

得 $(20+0.4)^2 = 400 + 16 + 0.16 = 416.16$ 比直接乘 $(20.4)^2$ 快，又不易計算錯誤。十分逼近法是否也可由乘法公式輔助而簡化？

〔研究二〕

由 $(x+1)^2 - x^2 = [(x+1)-x][(x+1)+x] = (x+1)+x = x+(x+1)$
可推得 $(x+1)^2 = [x+(x+1)] + x^2$

又

$$\left(x + \frac{1}{10}\right)^2 = \left[\frac{1}{10}x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{100}\right)\right] + x^2 = \frac{1}{100} [10x + (10x+1)] + x^2$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{2}{10}\right)^2 &= \frac{1}{100} \{10\left(x + \frac{1}{10}\right) + [10\left(x + \frac{1}{10}\right) + 1] + \left(x + \frac{1}{10}\right)^2\} \\ &= \frac{1}{100} [(10x+1) + (10x+2)] + \frac{1}{100} [10x+10x+1] + x^2 \\ &= \frac{1}{100} [10x + (10x+1) + (10x+1) + (10x+2)] + x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 &= \frac{1}{100} [10x + (10x+1) + (10x+1) + (10x+2) + (10x+2) \\ &\quad + (10x+3)] + x^2 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{5}{10}\right)^2 &= \frac{1}{100} [10x + (10x+1) + (10x+1) + \cdots + (10x+4) + (10x+4) \\ &\quad + (10x+5)] + x^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right) + x^2 \end{aligned}$$

⋮

⋮

故求 $\sqrt{3}$ 平方根時至少可如下逼近

$$\because \sqrt{3}^2 = 3, 1^2 = 1, 2^2 = 4$$

$$\begin{array}{r}
 1.0^2 = \quad 1.00 \\
 \quad 10 \\
 +) \quad 11 \\
 \hline
 1.21 = 1.1^2 \\
 \quad 11 \\
 +) \quad 12 \\
 \hline
 1.44 = 1.2^2 \\
 \quad 12 \\
 +) \quad 13 \\
 \hline
 1.69 = 1.3^2 \\
 \quad 13 \\
 +) \quad 14 \\
 \hline
 1.96 = 1.4^2 \\
 \quad 14 \\
 +) \quad 15 \\
 \hline
 2.25 = 1.5^2 \\
 \quad 15 \\
 +) \quad 16 \\
 \hline
 2.56 = 1.6^2 \\
 \quad 16 \\
 +) \quad 17 \\
 \hline
 2.89 = 1.7^2 \\
 \quad 17 \\
 +) \quad 18 \\
 \hline
 3.24 = 1.8^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1.70^2 = \quad 2.8900 \\
 \quad 170 \\
 +) \quad 171 \\
 \hline
 2.9241 = 1.71^2 \\
 \quad 171 \\
 +) \quad 172 \\
 \hline
 2.9584 = 1.72^2 \\
 \quad 172 \\
 +) \quad 173 \\
 \hline
 2.9929 = 1.73^2 \\
 \quad 173 \\
 +) \quad 174 \\
 \hline
 3.0276 = 1.74^2 \\
 \\
 1.730^2 = \quad 2.992900 \\
 \quad 1730 \\
 +) \quad 1731 \\
 \hline
 2.996361 = 1.731^2 \\
 \quad 1731 \\
 +) \quad 1732 \\
 \hline
 2.999824 = 1.732^2 \\
 \quad 1732 \\
 +) \quad 1733 \\
 \hline
 3.003289 = 1.733^2
 \end{array}$$

利用公式 $(x + 0.5)^2 = x^2 + x + 0.25$

$$\therefore 1.7325^2 = 1.7320^2 + 1.7320 + 0.000025$$

$$\begin{array}{r}
 2.999824 \\
 +) \quad 173225 \\
 \hline
 3.00155625 > 3
 \end{array}$$

$$\therefore 1.7325 > \sqrt{3} \quad \therefore \sqrt{3} = 1.732$$

〔結論二〕

這個解法比課本 18 頁的做法快，且不容計算錯誤，又可避免研究一不準確的缺點。

〔問題三〕

課本123頁例4中我們學習到求某數平方根時，可先將某數乘以 100，求平方值後，再除以 10，這個方法能否輔助研究二，使它更清楚。

〔研究三〕

$$\left(x + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}\right)^2 = \frac{1}{100} [10x + (10x + 1) + (10x + 1)] + \frac{25}{10000} + x^2$$

公式消去 2 則下一位補 25 表示上一節的 0.25。

丁：因為要求到小數點以下 3 位，所以這裏用 1.7325^2 檢查再決定進位或捨去。

$$\therefore 1.732 < \sqrt{3} < 1.7325$$

$$\therefore \sqrt{3} \doteq 1.732$$

〔結論三〕

研究三的表格相當於研究二的計算，只是經過整理，所以比較快，而且其中有連串的連續整數求和，可以快捷算出。

〔結論四〕

綜合以上研究可得流程圖如附圖(-)。

例1 用十分逼近法求 $\sqrt{13}$ 近似值。(取到小數以下三位)

3^2	13	00	00	00	
	9				
	3	25			
	$\triangle 4$				
12	25				
	35				
	36	00			
	36				
12	96	00			
	3	60	25		
	$\triangle 3$	61			
12	99	60	25		
		36	05		
		$\triangle 36$	06	25	
3.6055^2	12	99	96	30	$25 < 13$

$$\therefore \sqrt{13} \doteq 3.606$$

開



例 2 用十分逼近法求 $\sqrt{11.2}$ 近似值。(取到小數以下三位)

3^2	11	20	00	00	
	9	00			
	$\triangle 3$				
	9	00			
		30			
		31			
		31			
		32			
		32			
		33	00		
		$\triangle 33$			
	10	89	00		
		3	30		
		3	31		
		3	31		
		3	32		
		3	32		
		3	33		
		3	33		
		3	34		
		3	34	25	
		3	35		
	11	18	90	25	
			33	45	
			33	46	
			33	46	25
			33	47	
	3.3465 ²	11	19	90	61
					25 < 11.2

$\therefore \sqrt{11.2} \div 3.347$

例3 用十分逼近法求 $\sqrt{302}$ 近似值。(取到小數以下三位)

3	02	00	00	00
1				
1	25			
$\triangle 2$				
2	25			
	15			
	16			
	16			
	17	00		
	$\triangle 17$			
2	89	00		
	1	70		
	1	71		
	1	71		
	1	72		
	1	72		
	1	73		
	1	73	25	
	$\triangle 1$	$\triangle 74$		
3	01	02	25	
		17	35	
		17	36	
		17	36	
		17	37	
		17	37	25
		$\triangle 17$	$\triangle 38$	
17.375 ²	3	01	89	06
			1	73
			1	73
			1	73
			1	73
			1	73
			1	73
			1	73
			$\triangle 1$	$\triangle 73$
3	01	99	48	84
				00 < 302

$$\therefore \sqrt{302} \div 17.378$$

例 4 用十分逼近法求 $\sqrt{1.25}$ 近似值。(取到小數以下第三位)

	1	25	(00)	(00)	
	1	(00)			
1.0 ²	1	(00)			
		10			
		11	(00)		
		$\triangle 11$			
	1	21	00		
		1	10		
		1	11		
		1	11	25	
		$\triangle 1$	12		
	1	24	32	25	
			11	15	
			11	16	
			11	16	
			11	17	
			11	17	
			11	18	(00)
			$\triangle 11$	18	
1.118	1	24	99	24	(00 < 125)

$$\therefore \sqrt{1.25} \doteq 1.118$$

四、結 論

1. 新編教科書採用十分逼近法求平方根的近似值，引起很多教者與學者的疑問，認為十分逼近法不如舊教材的方法，但經由本研究來看，因為第三冊第三章教到乘法公式，兩單元一合併，新教材引用十分逼近法求平方根，道理淺顯，而算法也並不難。
2. 國二學生尚缺電腦程式設計能力，否則本流程圖再配合電腦更具價值，如此更可顯示十分逼近法，也有啟發學習者對電腦軟體設計之興趣，其前瞻性更具價值。
3. 用加的做法比乘的方法要快且準確。