用軟體SYMPHONY把 $\sin nx$，$\cos nx$ 分別表爲 $\sin x$，$\cos x$ 的多項式；把 $\tan nx$ 表爲 $\tan x$ 的有理式

葉東進
科學園區實驗高中

問題 1.：對於任意正奇數 n，把 $\sin nx$ 表爲 $\sin nx = \sum_{K=0}^{n} C_K \cdot \sin^K x$ 時，

C_K 爲何？

首先證明下列命題：

設 n 爲正偶數，$\cos x = a$，$\sin x = b$

(i) 當 $n \equiv 0 \pmod 4$，若 $\cos nx = f(a)$，則 $\cos nx = f(b)$

(ii) 當 $n \equiv 2 \pmod 4$，若 $\cos nx = f(a)$，則 $\cos nx = -f(b)$

證明：用數學歸納法：

$n = 4$ 時，$\cos 4x = 1 - 8a^2 + 8a^4$

但是 $a^2 = 1 - b^2$

所以
$$\cos 4x = 1 - 8(1 - b^2) + 8(1 - b^2)^2$$
$$= 1 - 8b^2 + 8b^4$$

又 $n = 2$ 時，$\cos 2x = -1 + 2a^2$

所以
$$\cos 2x = -1 + 2(1 - b^2)$$
$$= 1 - 2b^2$$

因此 $n = 2$ 及 $n = 4$ 時，命題成立。

今假定：

①
$$\begin{cases} \cos 2x = f(a) \\ \cos nx = g(a) \Rightarrow \cos nx = g(b) \\ \cos(n+2)x = h(a) \Rightarrow \cos nx = -h(b) \end{cases}$$

則由　$\cos(n+4)x=2\cos(n+2)x\cos 2x-\cos nx$

$=2h(a)f(a)-g(a)$

$=2(-h(b))(-f(b))-g(b)$　　$(\because f(a)=-f(b))$

$=2h(b)f(b)-g(b)$

因此，若有 $\cos(n+4)x=F(a)$，則有 $\cos(n+4)x=F(b)$

其次假定：

② $\begin{cases} \cos 2x=f(a) \\ \cos nx=g(a)\Rightarrow \cos nx=-g(b) \\ \cos(n+2)x=h(a)\Rightarrow \cos(n+2)x=h(b) \end{cases}$

則由　$\cos(n+4)x=2\cos(n+2)x\cos 2x-\cos nx$

$=2h(a)f(a)-g(a)$

$=2h(b)(-f(b))+g(b)$

$(\because f(a)=-f(b))$

$=-[2h(b)f(b)-g(b)]$

因此，若有 $\cos(n+4)x=F(a)$，則有 $\cos(n+4)x=-F(b)$

現在回到問題 1.。

設 n 爲正奇數，取 $\sin x=b$

由　$\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cos 2nx\cdot\sin x$

$\Rightarrow$　$\sin(2n+1)x=2\cos 2nx\cdot\sin x+\sin(2n-1)x$

令　$\sin(2n-1)x=\sum_{K=0}^{2n-1} B_K\cdot b^k$

由前述命題，知 $\cos 2nx$ 可以表爲 $\sin x(=b)$ 的多項式，因此，

令　$\cos 2nx=\sum_{K=0}^{2n} A_K\cdot b^k$

則　$\sin(2n+1)x$

$$=2\sum_{K=0}^{2n} A_K\cdot b^{K+1}+\sum_{k=0}^{2n-1} B_K\cdot b^k$$

$$= 2 \sum_{K=0}^{2n} A_k \cdot b^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n-2} B_{k+1} \cdot b^{k+1} + B_0$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{2n-2} A_k \cdot b^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n-2} B_{k+1} \cdot b^{k+1} + B_0 + 2A_{2n-1} \cdot b^{2n}$$

$$+ 2A_{2n} \cdot b^{2n+1}$$

$$= \sum_{K=0}^{2n-2} (2A_k + B_{k+1}) b^{k+1} + B_0 + 2A_{2n-1} \cdot b^{2n} +$$

$$2A_{2n} \cdot b^{2n+1}$$

但是　　$A_{-1} = 0$ ，$B_{2n} = 0$ ，$B_{2n+1} = 0$

因此，　　$\sin (2n + 1) x$

$$= \sum_{k=0}^{2n-2} (2A_k + B_{k+1}) b^{k+1} + (2A_{-1} + B_0) b^0$$

$$+ (2A_{2n-1} + B_{2n}) b^{2n} + (2A_{2n} + B_{2n+1}) b^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=-1}^{2n} (2A_k + B_{k+1}) b^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} (2A_{k-1} + B_k) b^k$$

故得遞迴關係：

$$C_k = 2A_{k-1} + B_k$$

此關係表示：

$\sin (2n+1) x$的$\sin^k x$係數等於2倍的$\cos 2nx$的$\sin^{k-1} x$係數與$\sin (2n-1) x$的$\sin^k x$係數的和。

利用上式關係，配合SYMPHONY的COPY功能，我們可以造出$\sin nx$ 表為$\sin x$的n次多項式的列表（表1）。

問題2.：對於任意正整數 n，把 $\cos nx$ 表爲 $\cos nx = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot \cos^k x$ 時，C_k 爲何？

取　$\cos x = a$

由　$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cdot \cos x$

$\Rightarrow$　$\cos(n+1)x = 2\cos nx \cdot \cos x - \cos(n-1)x$

令　$\cos nx = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot a^k$　，　$\cos(n-1)x = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \cdot a^k$

則　$\cos(n+1)x$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} A_k \cdot a^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} B_k \cdot a^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (2A_k - B_{k+1})\, a^{k+1} + 2A_{n-1}\, a^n + 2A_n\, a^{n+1} - B_0$$

但是　$B_n = 0$,$B_{n+1} = 0$, $A_{-1} = 0$

因此，　$\cos(n+1)x$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (2A_k - B_{k+1})\, a^{k+1} + (2A_{n-1} - B_n)\, a^n$$

$$+ (2A_n - B_{n+1})\, a^{k+1} + (2A_{-1} - B_0)\, a^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (2A_{k-1} - B_k)\, a^k$$

故得遞迴關係：

$$C_k = 2A_{k-1} - B_k$$

此關係表示：

$\cos(n+1)x$ 的 $\cos^k x$ 係數等於2倍的 $\cos nx$ 的 $\cos^{k-1} x$ 係數與 $\cos(n-1)x$ 的 $\cos^k x$ 係數的差。

利用上式關係，配合SYMPHONY的COPY功能，我們可以造出 $\cos nx$ 表爲 $\cos x$ 的 n 次多項式的列表（表2）。

問題3.：對於任意正整數 n，把 $\tan nx$ 表爲 $\tan x$ 的有理式如何？

由　$\tan(n+1)x = \dfrac{\tan nx + \tan x}{1 - \tan nx \cdot \tan x}$

令　$\tan nx = \dfrac{p_n}{q_n}$，其中 p_n 與 q_n 均爲 $\tan x$ 的多項式

取　　$\tan x = c$

則　　$$\tan(n+1)x = \frac{\dfrac{p_n}{q_n} + c}{1 - \dfrac{p_n}{q_n}c} = \frac{p_n + c \cdot q_n}{q_n - c \cdot p_n}$$

故有遞迴關係：

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + c \cdot q_n \\ q_{n+1} = q_n - c \cdot p_n \end{cases}$$

此關係表示：

tan ($n+1$) x 表爲 tan x 的有理式時，該有理式的分子是 tan nx 的分子與 tan x 乘以 tan nx 的分母的和；而分母則是 tan nx 的分母與 tan x 乘以 tan nx 的分子的差。

利用上式關係，配合 SYMPHONY 的 COPY 功能，我們可以造出 tan nx 表爲 tan x 的有理式的列表（表 3 ）。

從列表，我們發現有如下的等式：

$$\tan nx = \frac{I_m[(1+i\tan x)^n]}{R_e[(1+i\tan x)^n]}，其中 n \in N$$

這個等式的證明，補足如下：

$$\tan nx = \frac{\sin nx}{\cos nx} = \frac{I_m(\cos nx + i\sin nx)}{R_e(\cos nx + i\sin nx)}$$

$$= \frac{I_m[(\cos x + i\sin x)^n]}{R_e[(\cos x + i\sin x)^n]}$$

$$= \frac{I_m[(\cos x + i\sin x)^n]/\cos^n x}{R_e[(\cos x + i\sin x)^n]/\cos^n x}$$

$$= \frac{I_m[(\cos x + i\sin x)^n/\cos^n x]}{R_e[(\cos x + i\sin x)^n/\cos^n x]}$$

$$= \frac{I_m[(1+i\tan x)^n]}{R_e[(1+i\tan x)^n]}$$

附：本文的主題及部分技巧，承清大全任重教授以及審稿教授的啓發與指導，在此謹表十分的謝意。

（　表　1　）

$\sin(x)=$	b	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6	b^7	b^8	b^9	b^{10}	b^{11}	b^{12}	b^{13}	b^{14}	b^{15}
$\sin(1x)=$			1														
$\sin(3x)=$			3	0	−4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sin(5x)=$			5	0	−20	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sin(7x)=$			7	0	−56	0	112	0	−64	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sin(9x)=$			9	0	−120	0	432	0	−576	0	256	0	0	0	0	0	0
$\sin(11x)=$			11	0	−220	0	1232	0	−2816	0	2816	0	−1024	0	0	0	0
$\sin(13x)=$			13	0	−364	0	2912	0	−9984	0	16640	0	−13312	0	4096	0	0
$\sin(15x)=$			15	0	−560	0	6048	0	−28800	0	70400	0	−92160	0	61440	0	−16384

$\cos(x)=a$	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	a^{15}
$\cos(0x)=$	1															
$\cos(1x)=$		1														
$\cos(2x)=$	−1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(3x)=$	0	−3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(4x)=$	1	0	−8	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(5x)=$	0	5	0	−20	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(6x)=$	−1	0	18	0	−48	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(7x)=$	0	−7	0	56	0	−112	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(8x)=$	1	0	−32	0	160	0	−256	0	128	0	0	0	0	0	0	0
$\cos(9x)=$	0	9	0	−120	0	432	0	−576	0	256	0	0	0	0	0	0
$\cos(10x)=$	−1	0	50	0	−400	0	1120	0	−1280	0	512	0	0	0	0	0
$\cos(11x)=$	0	−11	0	220	0	−1232	0	2816	0	−2816	0	1024	0	0	0	0
$\cos(12x)=$	1	0	−72	0	840	0	−3584	0	6912	0	−6144	0	2048	0	0	0
$\cos(13x)=$	0	13	0	−364	0	2192	0	−9984	0	16640	0	−13312	0	4096	0	0
$\cos(14x)=$	−1	0	98	0	−1568	0	9408	0	−26880	0	39424	0	−28672	0	8192	0
$\cos(15x)=$	0	−15	0	560	0	−6048	0	28800	0	−70400	0	92160	0	−61440	0	16384

（表　3）

$\tan(x)=a$	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
$\tan(1x)=$	0	1											
	1												
$\tan(2x)=$	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tan(3x)=$	0	3	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	−3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tan(4x)=$	0	4	0	−4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	−6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tan(5x)=$	0	5	0	−10	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	−10	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tan(6x)=$	0	6	0	−20	0	6	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	−15	0	15	0	−1	0	0	0	0	0	0
$\tan(7x)=$	0	7	0	−35	0	21	0	−1	0	0	0	0	0
	1	0	−21	0	35	0	−7	0	0	0	0	0	0
$\tan(8x)=$	0	8	0	−56	0	56	0	−8	0	0	0	0	0
	1	0	−28	0	70	0	−28	0	1	0	0	0	0
$\tan(9x)=$	0	9	0	−84	0	126	0	−36	0	1	0	0	0
	1	0	−36	0	126	0	−84	0	9	0	0	0	0

例：$\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$　　$\tan 4x=\dfrac{4\tan x-4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$