

同心圓平行線波列干涉的研究

李文堂

省立嘉義高中

一、前言

普通物理學討論波列的干涉現象時，大多從同頻率、同波長的圓形波列干涉現象開始，並常用水波槽中兩點波源產生同心圓形波列的干涉實驗來建立模型。Gerald Oster 和 Yasunori Nishijima⁽¹⁾利用透明片分別繪製直線、同心圓、佛瑞奈環波紋(Fresnel Ring)，將兩片重疊時，形成各種不同干涉條紋。作者於民國七十三年臺灣省政府教育廳主辦的第一屆視聽教學媒體製作競賽，將透明片印上同心圓，兩片重疊後經反射投影機(O.H.P.)投影在銀幕上，形成很清晰的干涉雙曲線(圖一)，改變兩波源(圓心)的距離，用來演示討論

$$|PS_1 - PS_2| = (n - \frac{1}{2})\lambda$$

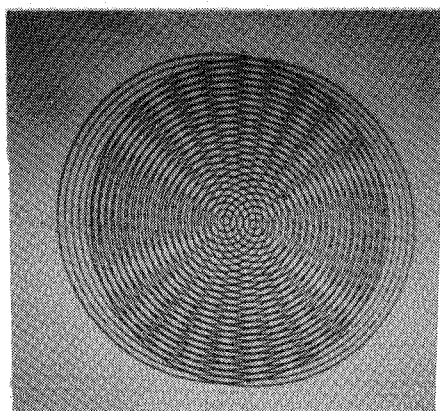
$$= d \sin \theta = d \cdot \frac{y_n}{r} \text{ 的干涉節線公}$$

式，甚為方便。教育廳已印製分送各高中使用。

關於不同波長、不同頻率的圓形波列干涉現象，T.S.Stein 和 L.G. Dishman⁽²⁾在美國物理期刊上發表他們所推導出的干涉條紋方程式：

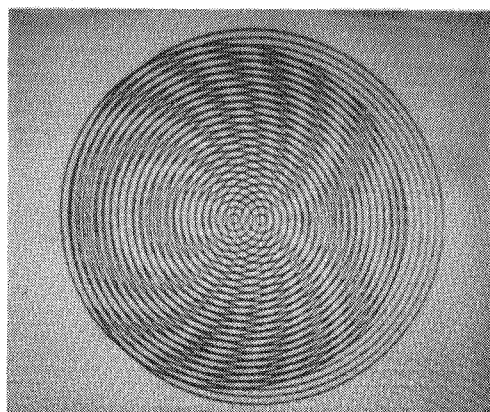
$$r = [vt + nv/(f_2 - f_1)] - [df_2/(f_2 - f_1)] \sin \theta$$

[v : 波速、t : 時間、n : 第 n 條節線、d : 兩波源距離、 f_1, f_2 兩波頻率]，並用電腦模擬繪圖，在固定的 f_1, f_2 時 $r = a - d \sin \theta$ 為一隨時間改變的蚶線。



圖一

作者將上述參加媒體製作競賽的透明片之波長（間隔）改變，利用影印機放大或縮小，成為兩片波長不同的同心圓形波列，放在 O.H.P. 上，在銀幕形成非常清楚的蚶線條紋，如圖二所示。改變兩波源距離時，蚶線在銀幕上呈動態畫面，干涉條紋非常顯著。作者嘗試利用水波槽產生兩頻率不同的波列——用兩個加不同電壓的起波馬達，在白幕上亦可看到蚶線由內往外動，但不如圖二清晰。

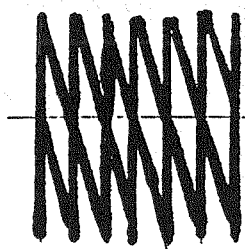


圖二

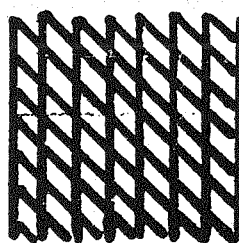
前(77)年底，作者將印有平行直線、同心圓、佛瑞奈環波紋的透明片，在 O.H.P. 上重疊，產生不同干涉現象，利用簡單的數學推導，將所見的干涉條紋以數學式表示，希望拋磚引玉，引起同好興趣，進一步研究發展。

二、原 理

圖三 - a 所示，兩片平行線透明片重疊，經投影機投射在銀幕上，黑線重合處遮光面積減少，在銀幕上出現加強性干涉的亮紋。反之，形成破壞性干涉，呈現暗紋。但若二列亮紋距離太近，或條紋交角過大，暗紋便不顯著，如圖三 - b 所示。以下所討論者，均為亮紋所形成的規則形狀條紋。



圖三 - a



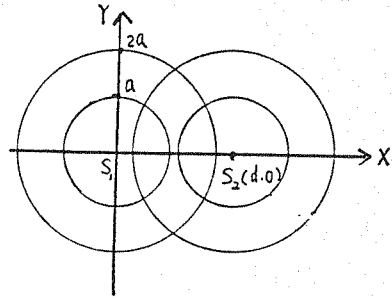
圖三 - b

三、結果與討論

(一)兩等間隔同心圓重疊形成的干涉條紋：

如圖四所示，以圓心 S_1 爲原點， S_1S_2 爲 x 軸， $S_2(d,0)$ 建立坐標系， S_1 圓系中，半徑依次爲 $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$

(1) S_1 圓系中，半徑 $n\lambda$ 之圓，與 S_2 圓系中半徑 $(m+n)\lambda$ 之圓相交，設交點爲 $P(x, y)$ 。



圖四

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (n\lambda)^2 & (n \in \mathbb{N}) \\ (x-d)^2 + y^2 = [(m+n)\lambda]^2 & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

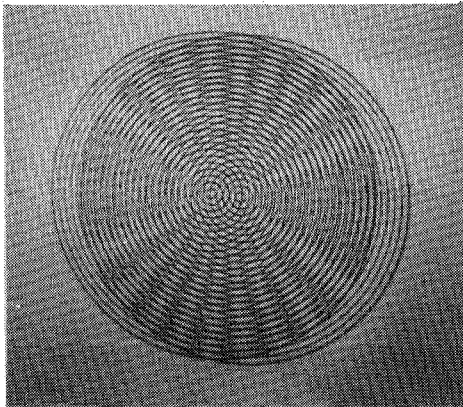
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = n\lambda & \dots\dots\dots ① \\ \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = (n+m)\lambda & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

① ② 消去 n 得 $\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = m\lambda \dots\dots\dots ③$

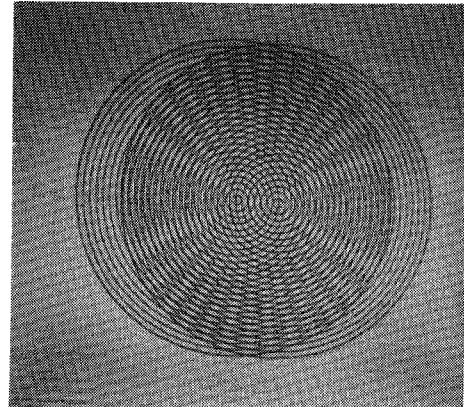
(i) ③ 式表示 $\overline{PS_1} - \overline{PS_2} = m\lambda = \text{定數}$ ，所以由 P 點所成的集合爲雙曲線。

(ii) ③ 式有實根 $\Leftrightarrow |m\lambda| \leq d$ ，即 $|m| \leq \frac{d}{\lambda}$ ， m 共有 $2\left[\frac{d}{\lambda}\right] + 1$ 個解。所以，當

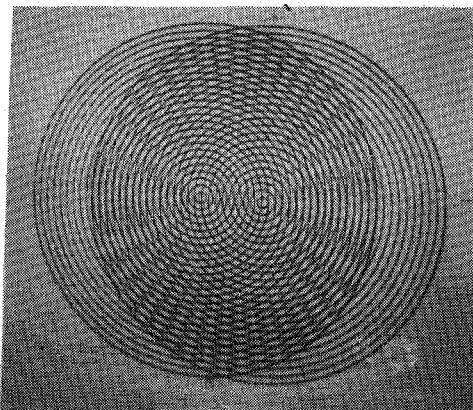
λ 不變時，增大 d ，則 m 增多，亦即雙曲線條紋數增多。圖五 - a 至圖五 - c 分別表示 $d = 4\lambda$ ， $d = 6\lambda$ ， $d = 8\lambda$ 的三種干涉條紋。



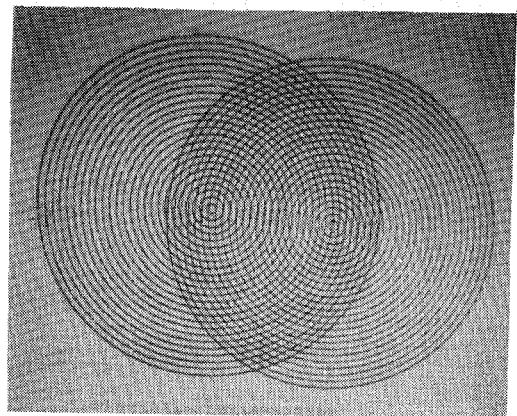
圖五 - a



圖五 - b



圖五 - c



圖六

(iii) 當 $m = \pm \frac{d}{\lambda}$ 時，集合 P 表示射線。即： $d = \pm m\lambda$ 時， S_1, S_2 兩波源亦在亮紋上，

且通過 S_1, S_2 之干涉條紋為直線。

(2) S_1 圓系中半徑 $n\lambda$ 之圓與 S_2 圓系中半徑 $(m-n)\lambda$ 之圓相交，設交點 $Q(x, y)$ ，則：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (n\lambda)^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = [(m-n)\lambda]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = m\lambda \dots\dots\dots ④ \\ \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = (m-n)\lambda \dots\dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$④ + ⑤ : \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = m\lambda \dots\dots\dots ⑥$$

⑥ 式表示 $\overline{QS_1} + \overline{QS_2} = m\lambda$ 為一橢圓系，如圖六所示。

(i) ⑥ 式有解時 $m\lambda \geq d \Rightarrow m \geq \frac{d}{\lambda}$ ，即 $m \geq \frac{d}{\lambda}$ 時兩等波長的圓形波列干涉形成橢圓。

(ii) 由 ③ 式知 $|m| \leq \frac{d}{\lambda}$ 時兩等波長的圓形波列干涉形成雙曲線。

(二) 兩圓系半徑不相等， S_1 圓系中圓的半徑依次為 $\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1 \dots\dots$ ， S_2 圓系中圓的半徑依次為 $\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2 \dots\dots$ ，令 $\lambda_1 > \lambda_2$ 。以 S_1 為原點， $S_2(d, 0)$ 建立坐標系，交點 $P(x, y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (n\lambda_1)^2 & (n \in \mathbb{N}) \\ (x-d)^2 + y^2 = [(m+n)\lambda_2]^2 & (m+n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$x, y \text{ 有解} \Leftrightarrow \begin{cases} n\lambda_1 + (m+n)\lambda_2 \geq d \\ |n\lambda_1 - (m+n)\lambda_2| \leq d \end{cases}$$

消去 n 得 $x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} (x^2 + y^2) + \frac{2\lambda_2^2 m}{\lambda_1} \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda_2^2 m^2$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

得 $r^2 - 2rd \cos \theta + d^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} r^2 + \frac{2\lambda_2^2 m}{\lambda_1} r + \lambda_2^2 m^2$

$$r^2 \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) = \left(2d \cos \theta + \frac{2\lambda_2^2 m}{\lambda_1}\right) r + m^2 \lambda_2^2 - d^2 \dots\dots\dots ⑦$$

在 $r \gg m^2 \lambda_2^2 - d^2$ 時 $r = \frac{2\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos \theta + \frac{2\lambda_1 \lambda_2^2 m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \dots\dots\dots ⑧$

式⑧表示蚶線，如圖七所示。

(i) $d = 0$ 時， $n\lambda_1 = \lambda_2(m+n)$

$$\Leftrightarrow n = \frac{m\lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (m \in \mathbb{N})$$

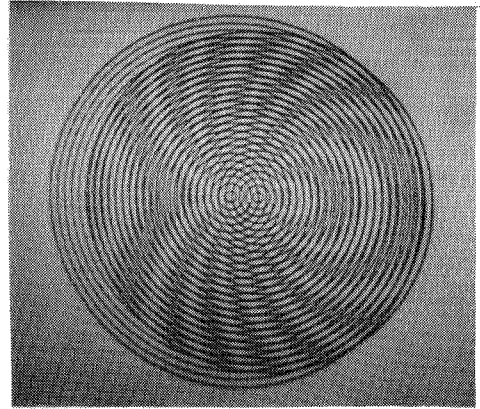
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{m\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 \dots \textcircled{9}$$

表一同心圓系，如圖八 - 1 所示。

(ii) $\lambda_1 d = m\lambda_2^2$ 時，形成 $r = k_1 \cos \theta + k_2$ 之形式，數學上稱為心臟線，如圖八 - 2 所示。

(iii) 水波槽中放置兩個點波源起波器，

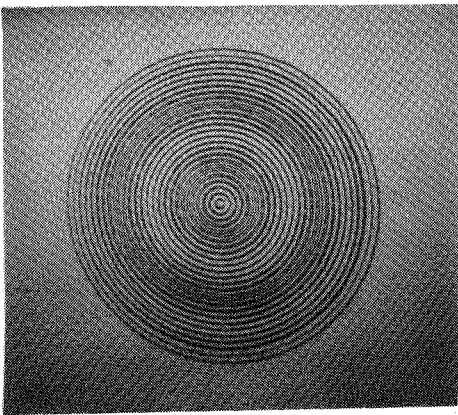
調整兩個起波器的電壓使頻率不同，形成兩不同波長的圓形波，干涉後形成蚶線，有如圖七、圖八。



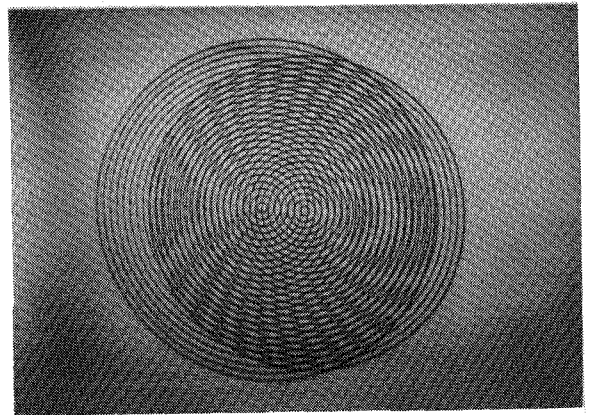
圖七

(三) 同心圓和平行直線的干涉：

以同心圓的圓心為原點建立坐標系，如圖九所示。同心圓的半徑依次為 $\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1, \dots$ 。平行直線中 $y = d$ 之直線為 L_0 ，向下依次為 $L_1 : y = d + \lambda_2, L_2 : y =$



圖八 - 1



圖八 - 2

$d + 2\lambda_2$, $L_i: y = d + i\lambda_2 (i \in \mathbb{N})$ 。

[即同心圓之圓形波列之波長 λ_1 , 直線波列之波長 λ_2 之干涉情形。]

設直線與圓之交點坐標為 $P(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (m\lambda_1)^2 \\ y = d + m\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = m\lambda_1 \cdots \cdots \cdots ⑩ \\ y - d = m\lambda_2 \cdots \cdots \cdots ⑪ \end{cases}$$

式⑩為 P 點至原點之距離, 式⑪為 P 點至 L_0 之距離, 定原點為焦點 F , $y = d$ 為

準線 L , 則: 離心率 $e \equiv \frac{d(P, F)}{d(L, F)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 依次令 $L_1, L_2, \cdots$ 為準線, 則得到一同焦

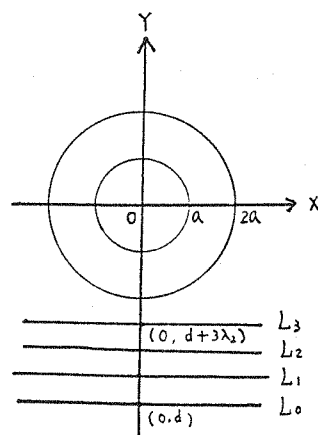
點, 同離心率之二次曲線系。

(i) $0 < e < 1$ 時 P 之集合為橢圓系, 如圖十之 1 所示。

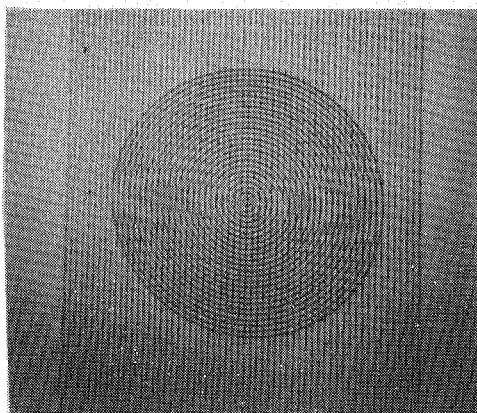
(ii) $e = 1$ 時, P 之集合為拋物線系, 如圖十之 2 所示。

(iii) $e > 1$ 時, P 之集合為雙曲線系, 如圖十之 3 所示。

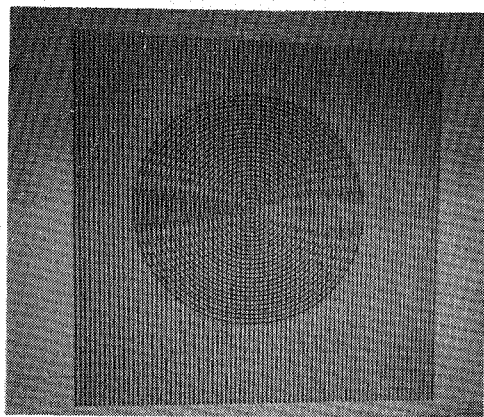
(iv) 利用水波槽亦可得到此干涉條紋: 兩個起波器放在水槽內, 一個放一點波源產生圓形波, 另一個放木棒產生直線波, 調整不同率, 當 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e$ 介於 0 和 1 間形成橢圓, 當 $e = 1$ 時得到拋物線, $e > 1$ 時為雙曲線。



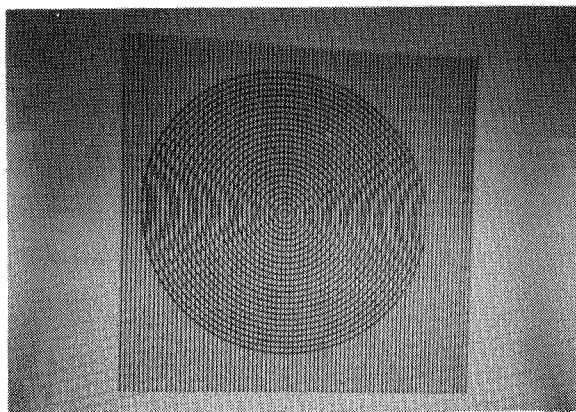
圖九



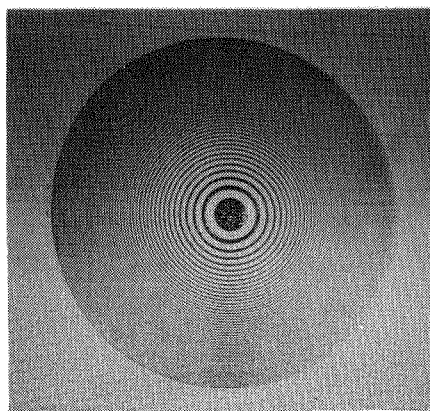
圖十 -1



圖十 -2



圖十 -3



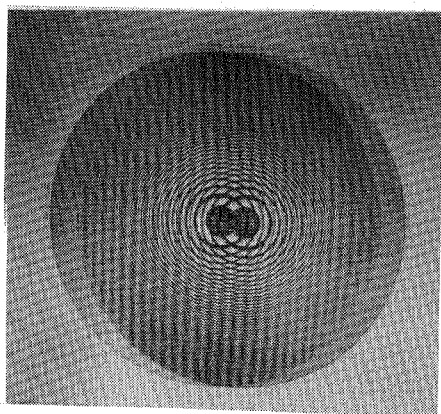
圖十一

(四) 佛瑞奈環紋 (Fresnel-Ring Moirés) 的干涉：

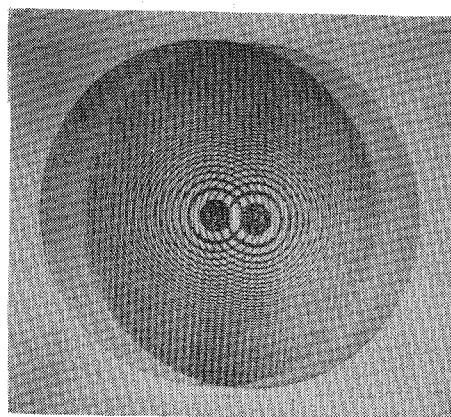
同心圓系的半徑依次為 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2n-2}, \sqrt{2n-1} (n \in \mathbb{N})$ 。

在半徑 $\sqrt{2n-2}$ 至 $\sqrt{2n-1}$ 間之面積等於中央黑點面積，是為佛瑞奈環紋。將兩環紋透明片重疊放置在投影機上，緩緩拉動一片，使二圓心漸分離時，先看到有平行直線產生，如圖十二所示，逐漸加大二圓心距離，則直線趨密，但明暗之分隔則趨不明顯，再加大二圓心距離，則在兩佛瑞奈環紋旁產生新的佛瑞奈環紋，如圖十三所示，再加大距離，則兩環紋間出現新的佛瑞奈環紋，如圖十四所示。

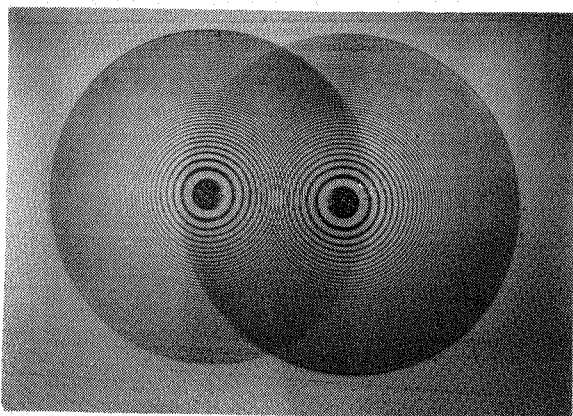
如圖十五所示，一佛瑞奈環紋之環心 S_1 為原點，另一環心在 $S_2 (d, 0)$ 處半徑依次為 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \dots$ 。



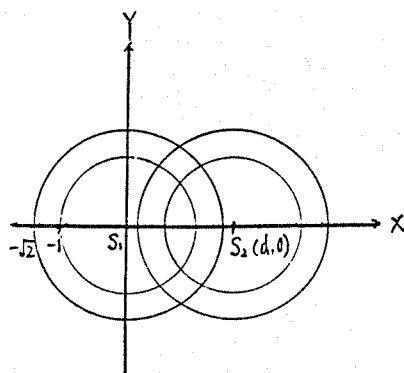
圖十二



圖十三



圖十四



圖十五

(1) 設 S_1 圓系中，半徑 $\sqrt{t} r$ 之圓與 S_2 圓系中半徑 $\sqrt{m+t} r$ 之圓相交，其交點為 P 當 m 為偶數時， P 為明帶中點， m 為奇數時， P 為暗帶中點，為方便起見，令 $m = 2n$ ， P 皆成明帶， P 之坐標 $P(x, y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t r^2 & \dots\dots\dots (12) \\ (x-d)^2 + y^2 = (t+m) r^2 & \dots\dots\dots (13) \end{cases}$$

$$(12) - (13) \quad 2dx - d^2 = -mr^2$$

$$\therefore x = \frac{d^2}{2d} - \frac{m}{2d} r^2 \dots\dots\dots (14) \quad m = 0, \pm 2, \pm 4 \dots\dots$$

式⑭表示明帶間隔為 $\frac{r^2}{d}$ 之直線，如圖十二所示，在 d 增大時， $\frac{r^2}{d}$ 減少， $\therefore$ 直線趨密。

(2) S_1 圓系中半徑 $\sqrt{t} r$ 之圓與 S_2 圓系中半徑 $\sqrt{n-t} r$ 之圓相交，交點 $Q(x, y)$ ，當 n 為偶數時， Q 亦為明帶中點， n 為奇數時， Q 為暗帶中點。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t r^2 & \dots\dots\dots (15) \\ (x-d)^2 + y^2 = (n-t) r^2 & \dots\dots\dots (16) \end{cases}$$

$$(15) + (16) : 2x^2 - 2dx + d^2 + 2y^2 = nr^2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{n}{2} r^2 - \frac{d^2}{4} \dots\dots\dots (17) \quad (n \in \mathbb{N})$$

表 Q 成一個以 $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ 為圓心，半徑平方成等差數列之同心圓系（即佛瑞奈環紋），

其新環心在原來二環心中點 $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ 處，如圖十四所示。

(3) S_1 圓系半徑 $\sqrt{2t}r$ 之圓，與 S_2 圓系中半徑 $\sqrt{n+t}r$ 之圓相交，設交點為 $R_1(x, y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2tr^2 & \dots\dots\dots (18) \\ (x-d)^2 + y^2 = (t+n)r^2 & \dots\dots\dots (19) \end{cases}$$

$$(19) \times 2 - (18) : x^2 - 4dx + 2d^2 + y^2 = 2nr^2$$

$$\Rightarrow (x-2d)^2 + y^2 = 2d^2 + 2nr^2 \dots\dots\dots (20) \quad (n \in \mathbb{N})$$

②式表示以 $(2d, 0)$ 為圓心之佛瑞奈環紋。

(4) S_1 圓系中半徑 $\sqrt{2t}r$ 之圓與 S_2 圓系中半徑 $\sqrt{n-t}r$ 之圓相交，交點 $T_1(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2tr^2 & \dots\dots\dots (24) \\ (x-d)^2 + y^2 = (n-t)r^2 & \dots\dots\dots (25) \end{cases}$$

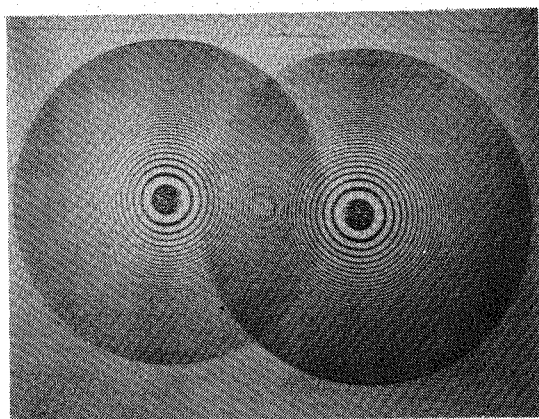
$$(24) + (25) \times 2 : 3x^2 - 4dx + 2d^2 + 3y^2 = 2nr^2$$

$$\Rightarrow (x - \frac{2}{3}d)^2 + y^2 = \frac{2}{3}nr^2 - \frac{2}{9}d^2 \dots\dots\dots (26) \quad (n \in \mathbb{N})$$

S_1 圓系中半徑 $\sqrt{t}r$ 之圓與 S_2 圓系中半徑 $\sqrt{2n-2t}r$ 之圓相交，交點 $T_2(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = tr^2 & \dots\dots\dots (27) \\ (x-d)^2 + y^2 = (2n-2t)r^2 & \dots\dots\dots (28) \end{cases}$$

$$(27) \times 2 + (28) :$$



圖十六

$$3x^2 - 2dx + d^2 + 3y^2 = 2nr^2$$

$$(x - \frac{d}{3})^2 + y^2 = \frac{2n}{3}r^2 - \frac{2}{9}d^2 \dots\dots\dots (29) \quad (n \in \mathbb{N})$$

式 ②⑥、②⑨ 分別表示以 $(\frac{2}{3}d, 0)$ 、 $(\frac{d}{3}, 0)$ 為圓心的佛瑞奈環紋，如圖十六所示。

(5)當兩片佛瑞奈環紋重疊發生干涉時，干涉條紋頗為複雜，且富變化，上列四種特殊情形，在二波源距離由0漸增時，在銀幕上首先看到式⑭所示之直線，如圖十二。當距離漸大時，於兩環紋旁出現新環紋，如圖十三。然後出現圖十四所示的三環紋並列條紋。再增大距離時，出現圖十六的條紋。

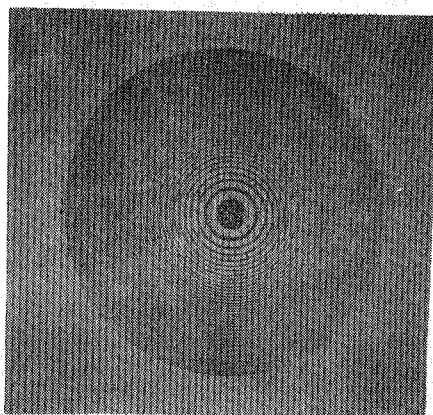
(五)平行直線和佛瑞奈環紋的干涉：

以佛瑞奈環紋的環心為原點建立坐標，平行直線 $x = d$ 為 L_0 ， $L_1 : x = d + b$ ， $L_2 : x = d + 2b$ ， $L_3 : x = d + 3b \cdots \cdots$ 環紋在半徑 $\sqrt{2n-2}r$ 及 $\sqrt{2n-1}r$ ($n \in N$) 之面積公差為 $2r^2$ 。

(1)半徑 $\sqrt{2t}r$ 之圓與 $x = d + b(t+n)$ 之直線交於 $P_1(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2tr^2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{30} \\ x = d + b(t+n) \cdots \cdots \cdots \textcircled{31} \end{cases}$$

$$\textcircled{31} \text{ 代入 } \textcircled{30} : x^2 + y^2 = 2 \frac{x-d}{b} r^2 - 2nr^2$$



圖十七

$$\Rightarrow (x - \frac{r^2}{d})^2 + y^2 = \frac{r^4}{b^2} - \frac{2d}{b} r^2 - 2nr^2 \cdots \cdots \textcircled{32} \quad (n \in Z)$$

式③表示以 $(\frac{r^2}{b}, 0)$ 為圓心之佛瑞奈環紋，即在原環紋的環心右方 $\frac{r^2}{b}$ 處形成新環紋，如圖十七所示。

(2)半徑 $\sqrt{2t}r$ 的圓與 $x = d + b(n-t)$ 之直線交於點 $P_2(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2tr^2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{33} \\ x = d + b(n-t) \cdots \cdots \cdots \textcircled{34} \end{cases}$$

$$\textcircled{34} \text{ 代入 } \textcircled{33} : x^2 + y^2 = 2r^2 (n - \frac{x-d}{b})$$

$$\Rightarrow (x + \frac{r^2}{b})^2 + y^2 = \frac{r^4}{b^2} + \frac{2d}{b} r^2 + 2nr^2 \cdots \cdots \textcircled{35} \quad (n \in Z)$$

③式表示以 $(-\frac{r^2}{b}, 0)$ 為圓心之佛瑞奈環紋，即在原環紋左方 $\frac{r^2}{b}$ 處產生新環紋，如圖十七所示。

(3) 半徑 $\sqrt{2mt}r$ ($m \in \mathbb{N}$) 之圓與 $x = d + b(n \pm t)$ 之直線相交，交於 $Q(x, y)$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2mt r^2 & \dots\dots\dots ③⑥ \\ x = d + b(n \pm t) & \dots\dots\dots ③⑦ \end{cases}$$

$$③⑦ \text{ 代入 } ③⑥ : x^2 + y^2 = 2mr^2 \left(\pm \frac{x-d}{b} \mp n \right)$$

$$\Rightarrow \left(x \mp \frac{mr^2}{b} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 r^4}{d^2} \mp \frac{2m}{b} dr^2 \mp 2mnr^2 \dots\dots ③⑧$$

$$(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

③⑧表示以 $(\pm \frac{mr^2}{b}, 0)$ 為圓心之佛瑞奈環紋，如圖十七所示在原環紋左右兩邊距離原點 $\frac{mr^2}{b}$ 處均有新環紋。

四、結 論

(一) 同心圓形波列干涉形成的曲線有下列情形：

(i) 等波長的干涉：雙曲線、橢圓。

(ii) 不等波長的干涉：蚶線。

(iii) 佛瑞奈環紋：平行直線、環紋。

(二) 同心圓和平行直線的干涉曲線有：

(i) 等波長的同心圓和平行直線的干涉：雙曲線、橢圓、拋物線。

(ii) 佛瑞奈環紋和平行直線干涉形成許多新的環紋。

五、誌 謝

本件作品部份數學推導由本校高二資優生黃書健所做，並經數學老師陳獻平先生校訂，謹此致謝。

六、附 註

1. Gerald Oster and Yasunori Nishijima Moiré patterns.

Scientific American Vol. 208 No. 5 P. 54 ~ 63 .

2. T.S. Stein and L.G. Dishman Demonstration of beats as moving interference patterns. Am. J. Phys. Vol. 50 No. 2, February 1982. P. 136 ~ 145.

七、參考資料

1. 國立臺灣師範大學科學教育中心：高級中學基礎數學第三冊，國立編譯館出版，民國77年。
2. Francis A. Jenkins and Harvey E. White Fundamentals of Optics. 1967.

國立台灣師範大學 科學教育中心 出版物簡介

編輯室

- 國際科學學習成就調查研究中華民國台灣地區十四歲群測驗結果分析報告（79.1）
- 國際科學學習成就調查研究中華民國台灣地區十歲群測驗結果分析報告（79.8）

本研究為經由IEA總部同意使用其測驗工具並推荐四位專家專程來華指導，而於78年5月進行測驗之分析報告，其主要內容為：(1)了解我國不同年齡群的科學學習成就在國際上之地位。(2)了解我國科學學習成就與學校規模之關係。(3)了解我國科學學習成就與性別之相關性。(4)了解我國科學學習成就與學校地理位置之相關性。後續的研究工作正計畫進行中。

- 高級中學生物課程改進研究七十七學年度研究報告

本書是由生物研究小組，根據七十四、七十五、七十六年度綜合美、德、及日本等各先進國家的生物課程，並與我國現行生物課程加以分析比較，所作成的結論，以供教育當局日後修訂高級中學生物課程的參考。

- 中等學校數學及自然科學課程改進計畫物理科概念發展研究（79.2）
- 中等學校數學及自然科學課程改進計畫化學科概念發展研究（79.2）
- 中等學校數學及自然科學課程改進計畫生物科概念發展研究（79.2）

以上是數學、物理、化學三科針對新編教材中，探討教授的概念、每一學習階段的教學目標；以及概念與概念之間的相關性、順序的銜接等。更進而探討組織順序的配合，能否適合學生的心智能力的發展。

（下接64頁）