

利用個人電腦學習指數函數與

對數函數之圖形的性質

陳木榮

臺北市立第一女子高級中學

在高中一年級下學期的基礎數學，有一章，要學生認識，指數函數 $y = a^x$ 及對數函數 $y = \log a^x$ 的圖形，特別是 $a > 1$ 及 $0 < a < 1$ 兩種情形中，圖形的差異，同時還要觀察指數函數及對數函數的其它特質，但是在黑板上，畫各種底數的函數圖形，既費時又費事，正好，我們可以藉助日漸普及的電腦之高速作圖能力，使學生在電腦前面自己操作，而領悟這些特性。

我們的構想是分成三個部份。

1. 讓學生不斷地輸入，指數函數 $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) 的底數，以觀察其圖形的特性，使學生領會以下各項。

甲. $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 的圖形，具有下列特性：

- (1) 圖形在 x 軸的上方。
- (2) 圖形由左而右，逐漸下降，愈往右邊，下降得愈慢，愈往右邊愈靠近 x 軸。圖形上凹。
- (3) 垂直於 y 軸，且在 x 軸上方的每一直線，都與 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 的圖形，恰有一交點。
- (4) 圖形必經過點 $(0, 1)$ 。

乙. $y = a^x$ ($1 < a$) 的圖形，具有下列性質：

- (1) 圖形在 x 軸的上方。
- (2) 圖形由左而右，逐漸上升，愈往右邊，上升得愈快，愈往左邊愈靠近 x 軸。圖形上凹。
- (3) 垂直於 y 軸，且在 x 軸上方的每一直線，都與 $y = a^x$ ($1 < a$) 的圖形，恰有一交點。
- (4) 圖形必經過點 $(0, 1)$ 。

2. 讓學生不斷地輸入對數函數 $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) 的底數，以觀察其圖形的特性，使學生了解以下各項。

甲. $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) 的圖形具有下列性質：

- (1) 圖形在 y 軸右方。

- (2) 圖形由左而右逐漸下降，愈往右邊，下降得愈慢，愈往左邊愈靠近 y 軸。圖形向上凹。
- (3) 垂直於 y 軸的每一直線，都與圖形恰有一交點。
- (4) 圖形必經過點 $(1, 0)$ 。

乙. $y = \log_a x$ ($a > 1$) 的圖形具有下列性質：

- (1) 圖形在 y 軸右方。
- (2) 圖形由左而右逐漸上升，愈往右邊，上升得愈慢，愈往左邊愈靠近 y 軸。圖形向下凹。
- (3) 垂直於 y 軸的每一直線，都與圖形恰有一交點。
- (4) 圖形必經過點 $(1, 0)$ 。

3. 讓學生不斷地輸入指數函數 $y = a^x$ 及對數函數 $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) 的底數，以領悟此二圖形對稱於直線 $y = x$ 。

於是，我們以 ETBASIC 在倚天系統下，完成如下的程式：

```

100 REM 指數函數與對數函數的圖形          by Chen
110 REM                                     03/27/1987
120 REM*****
130 CLS:KEY OFF:SCREEN 2
140 LINE(3,5)-(635,350),1,B
150 PRINT CHR$(27);"t24,180,50,2/1,s:1---指數函數的圖形"
160 PRINT CHR$(27);"t24,180,90,2/1,s:2---對數函數的圖形"
170 PRINT CHR$(27);"t24,180,130,2/1,s:3---指數函數與對數函數的圖形"
180 PRINT CHR$(27);"t24,180,170,2/1,s:4---結 束"
190 PRINT CHR$(27);"t24,180,210,2.1,s:請選一項(1,2,3或4,再按Enter)
200 PRINT CHR$(27);"t16;"
210 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 210
220 OX=320:OY=205:UX=20:UY=.7*UX
230 M%=VAL(A$):IF M%<>1 AND M%<>2 AND M%<>3 AND M%<>4 THEN BEEP:GOTO 190
240 ON M% GOTO 300,590,840,250
250 CLS:LINE(20,20)-(620,320),1,B:PRINT CHR$(27);"t24,220,126,110,2/2,s:
    再 見"
260 PRINT CHR$(27);"t16;"
270 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 270
280 END
290 '*****
300 CLS:LINE(3,5)-(635,350),1,B
310 GOSUB 1280
320 '-----
330 LOCATE 2,2:PRINT
340 LOCATE 2,2:PRINT "請輸入指數函數  $y=a^x$  的底數  $a$ ,但,  $a>0$ ,且  $a \neq 1$ ";
350 INPUT BASE
360 IF BASE<=0 OR BASE=1 THEN BEEP:LOCATE 2,1:PRINT STRING$(80," "):
    GOTO 330
370 BASE$=STR$(BASE):BASE$=RIGHT$(BASE$,LEN(BASE$)-1)
380 IF BASE<1 THEN BASE$="0"+BASE$
390 LOCATE 23,10:PRINT "畫  $y=$ ";BASE$;" $^x$  的圖形"

```

```

400 FOR X=-14 TO 14 STEP .1
410   Y=BASE^X
420   GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
430   IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 450
440   PSET(GX,GY):X1=(GX-OX)/UX:GOTO 460
450 NEXT X
460 FOR X=X1 TO 14 STEP .1
470   Y=BASE^X
480   GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
490   IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 510
500   LINE-(GX,GY)
510 NEXT X
520 IF GY/12-1>24 OR GY/12-1<1 OR GX/8>79 OR GX/8<1 THEN 530
530 LOCATE 23,45:PRINT "再畫一次 (y/n)?"
540 A$=INKEY$
550 IF A$="" THEN 540
560 IF A$="y" OR A$="Y" THEN LINE(5,330)-(630,345),0,BF:GOTO 330
570 IF A$="n" OR A$="N" THEN 130 ELSE 540
580 REM*****
590 CLS:LINE(3,5)-(635,350),1,B:GOSUB 1280
600 LOCATE 2,2:PRINT "
610 LOCATE 2,2:PRINT "請輸入對數函數的底數a,但.a>0,且a≠1";
620 INPUT BASE
630 IF BASE<=0 OR BASE=1 THEN BEEP:LOCATE 2,1:PRINT STRING$(80," "):
    GOTO 330
640 BASE$=STR$(BASE):BASE$=RIGHT$(BASE$,LEN(BASE$)-1)
650 IF BASE<1 THEN BASE$="0"+BASE$
660 LOCATE 23,10:PRINT "畫以":BASE$;"為底之對數函數的圖形"
670 FOR X=.02 TO 14 STEP .1
680   Y=LOG(X)/LOG(BASE)
690   GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
700   IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 720
710   PSET(GX,GY):X1=(GX-OX)/UX:GOTO 730
720 NEXT X
730 FOR X=X1 TO 14 STEP .1
740   Y=LOG(X)/LOG(BASE)
750   GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
760   IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 780
770   LINE-(GX,GY)
780 NEXT X
790 IF GY/12-1>24 OR GY/12-1<1 OR GX/8>79 OR GX/8<1 THEN 800
800 LOCATE 23,45:PRINT "再畫一次 (y/n)?"
810 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 810
820 IF A$="y" OR A$="Y" THEN LINE(5,330)-(630,345),0,BF:GOTO 600
830 IF A$="n" OR A$="N" THEN 130 ELSE 810
840 CLS:LINE(3,5)-(635,350),1,B:GOSUB 1280
850 LINE(OX+UX*-9,OY-UY*-9)-(OX+UX*12,OY-UY*12)
860 '-----
870 LOCATE 2,2:PRINT "
880 LOCATE 2,2:PRINT "請輸入底數a,但.a>0,且a≠1";
890 INPUT BASE
900 IF BASE<=0 OR BASE=1 THEN BEEP:LOCATE 2,1:PRINT STRING$(80," "):
    GOTO 890

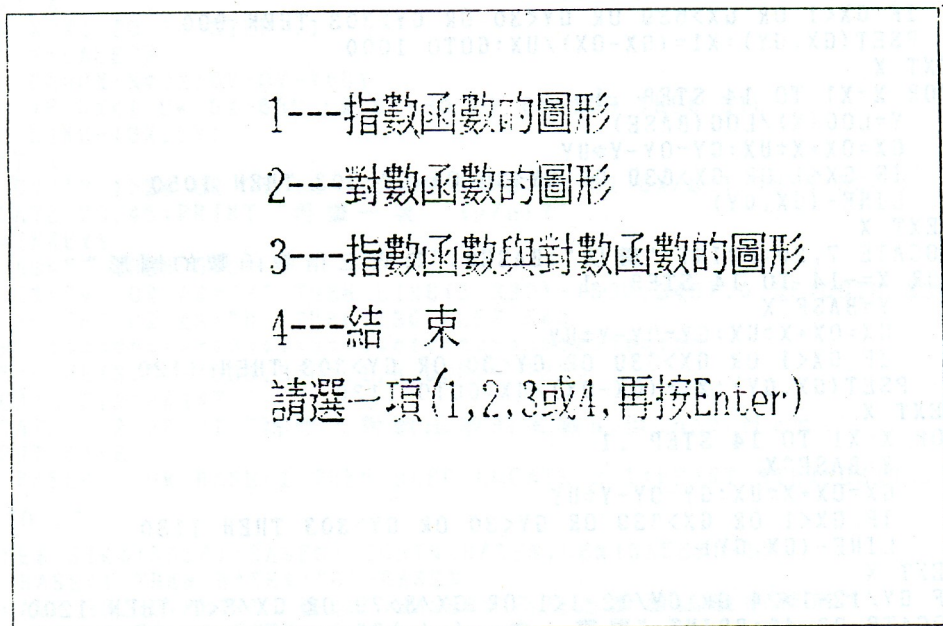
```

```

910 BASE$=STR$(BASE):BASE$=RIGHT$(BASE$,LEN(BASE$)-1)
920 IF BASE<1 THEN BASE$="0"+BASE$
930 LOCATE 14,50:PRINT "畫以";BASE$;"為底之對數函數的圖形"
940 FOR X=.02 TO 14 STEP .1
950     Y=LOG(X)/LOG(BASE)
960     GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
970     IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 990
980     PSET(GX,GY):X1=(GX-OX)/UX:GOTO 1000
990 NEXT X
1000 FOR X=X1 TO 14 STEP .1
1010     Y=LOG(X)/LOG(BASE)
1020     GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
1030     IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 1050
1040     LINE-(GX,GY)
1050 NEXT X
1060 LOCATE 7,20:PRINT "畫以";BASE$;"為底之指數函數的圖形"
1070 FOR X=-14 TO 14 STEP .1
1080     Y=BASE^X
1090     GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
1100     IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 1120
1110     PSET(GX,GY):X1=(GX-OX)/UX:GOTO 1130
1120 NEXT X
1130 FOR X=X1 TO 14 STEP .1
1140     Y=BASE^X
1150     GX=OX+X*UX:GY=OY-Y*UY
1160     IF GX<1 OR GX>639 OR GY<30 OR GY>303 THEN 1180
1170     LINE-(GX,GY)
1180 NEXT X
1190 IF GY/12-1>24 OR GY/12-1<1 OR GX/8>79 OR GX/8<1 THEN 1200
1200 LOCATE 23,45:PRINT "再畫一次 (y/n)?"
1210 AS=INKEY$
1220 IF AS="" THEN 1210
1230 IF AS="y" OR AS="Y" THEN 870
1240 IF AS="n" OR AS="N" THEN 130 ELSE 1210
1250 '=====
1260 'Subroutine for draw coordinate axis
1270 '=====
1280 LINE(OX-300,OY)-(OX+300,OY)
1290 LINE(OX,OY-170)-(OX,OY+128)
1300 LINE(OX+295,OY-2)-(OX+300,OY)
1310 LINE-(OX+295,OY+2)
1320 LINE(OX-2,OY-165)-(OX,OY-170)
1330 LINE-(OX+2,OY-165)
1340 FOR X=OX-280 TO OX+280 STEP UX
1350     LINE(X,OY+2)-(X,OY-2)
1360 NEXT X
1370 FOR Y=OY-12*UY TO OY+9*UY STEP UY
1380     LINE(OX-2,Y)-(OX+2,Y)
1390 NEXT Y
1400 FOR X=OX-280 TO OX+280 STEP UX
1410     FOR Y=OY-12*UY TO OY+9*UY STEP UY
1420         CIRCLE(X,Y),1,1,...7
1430     NEXT Y
1440 NEXT X
1450 LOCATE OY/14,OX/8-1:PRINT "0"
1460 LOCATE OY/14-1,(OX+300)/8+1:PRINT "x"
1470 LOCATE (OY-170)/14,OX/8-1:PRINT "y"
1480 RETURN

```

在倚天中文系統下，執行此程式時出現如下的畫面（圖一）。



【英數】【字形】

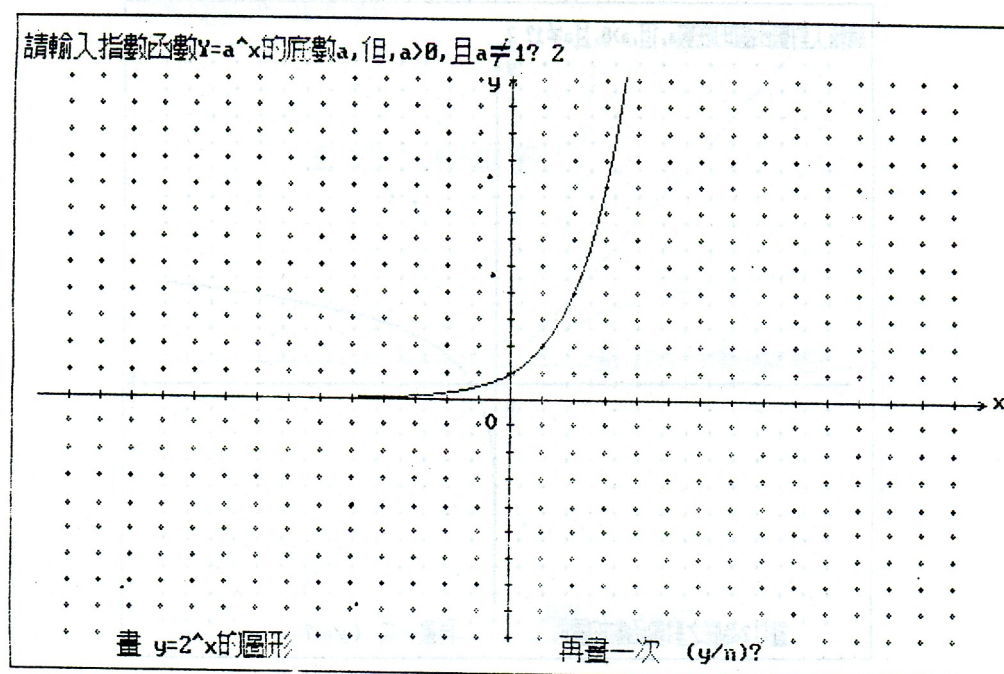
倚天

圖一

當使用者選擇第1項時，出現另一畫面（如圖二），輸入2之後即得圖二之 $y = 2^x$ 的圖形。如果想要改變底數，再畫時，只要按「y」，即可重新輸入另一數，圖三是輸入0.5之後所出現的畫面，圖中的兩個曲線是 $y = 2^x$ 及 $y = 0.5^x$ 兩個函數的圖形。如果按「n」即可回到圖一之畫面。

當使用者選擇第2項時，按照畫面上的提示，逐步按鍵，即可得圖四、圖五之類的畫面。如果按「n」即可回到圖一之畫面。

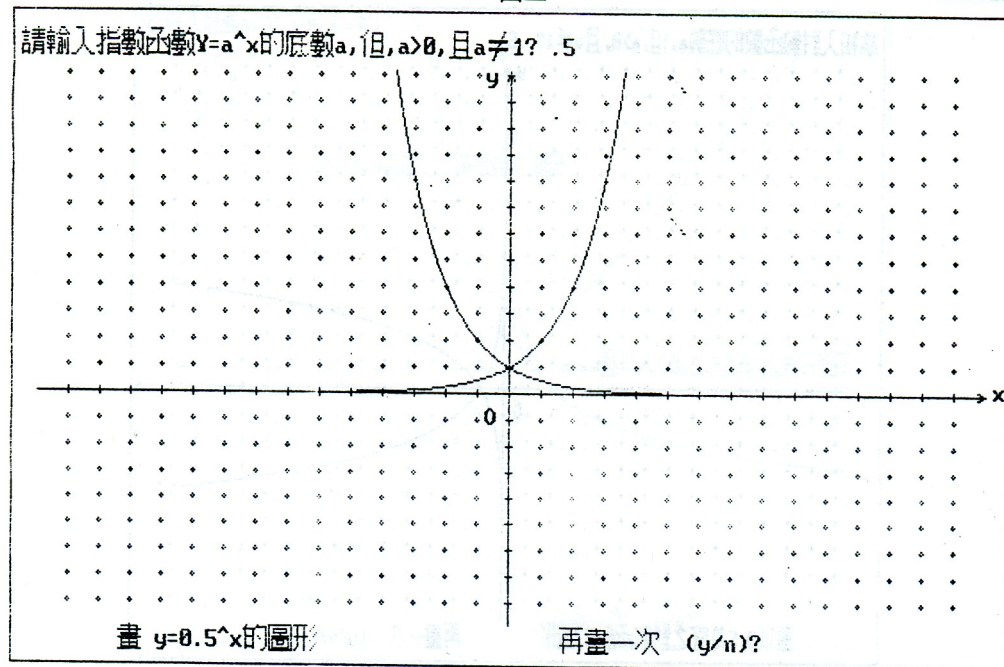
當使用者選擇第3項時，按照畫面上的提示，逐步按鍵，即可得圖六、圖七之類的畫面。如果按「n」即可回到圖一之畫面。



【英數】 【半形】

圖二

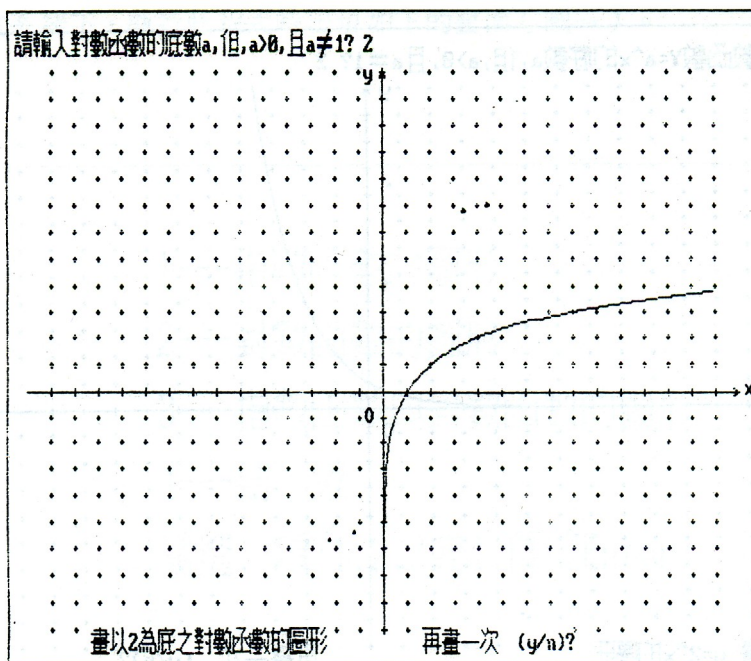
倚天



【英數】 【半形】

圖三

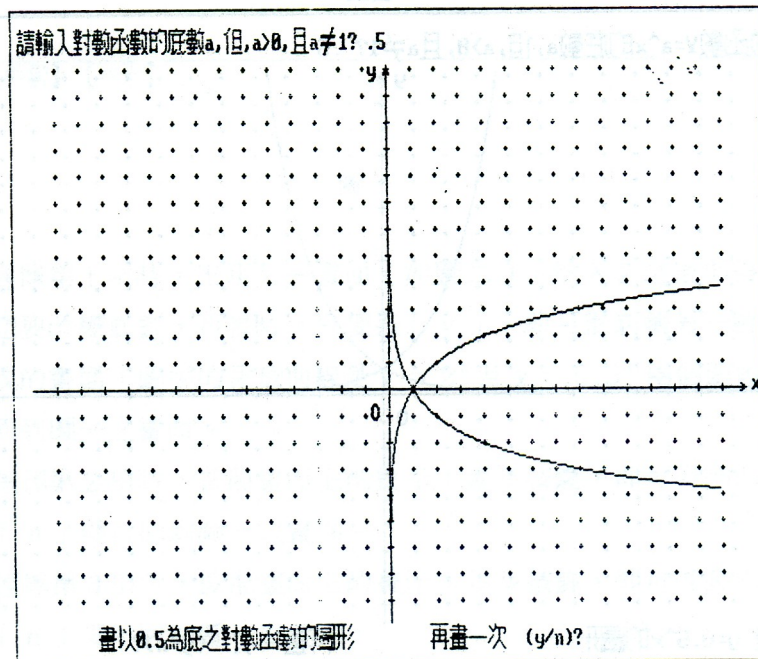
倚天



【英數】【半形】

倚天

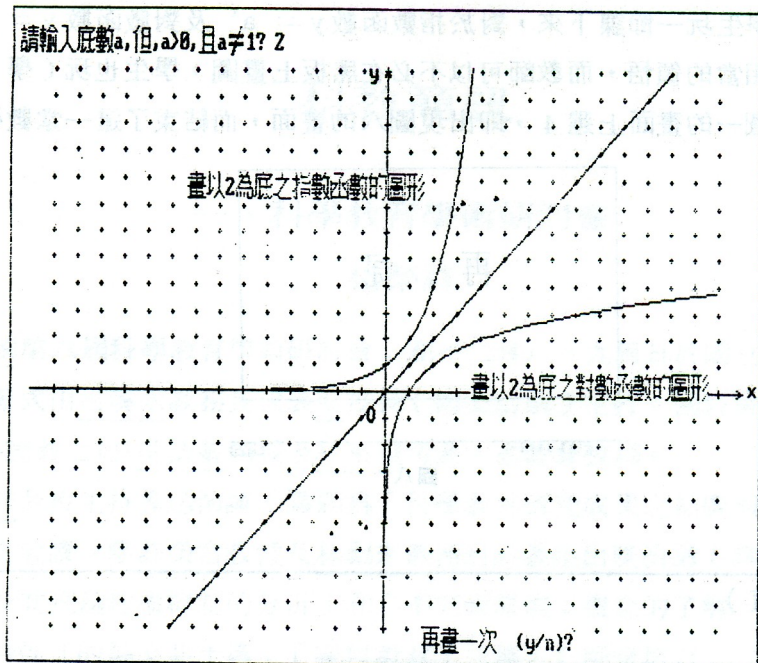
圖四



【英數】【半形】

倚天

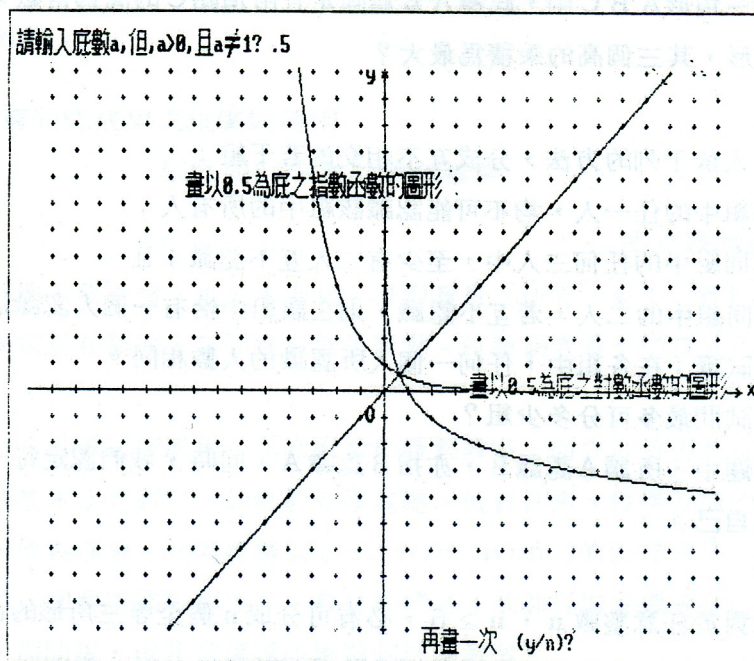
圖五



【英數】【半形】

倚天

圖六



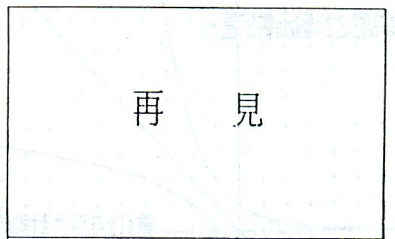
【英數】【半形】

倚天

圖七

如此，讓學生玩一節課下來，對於指數函數 $y = a^x$ 及對數函數 $y = \log_a x$ 之圖形的情形，有了相當的領悟，而教師可以不必在黑板上畫圖，學生也玩（學）得很愉快。

最後，在圖一的畫面上選 4，即出現圖八的畫面，而結束了這一堂數學課。



【圖八】

【圖八】

圖八

（上承 61 頁）

問題 3

在所有三角形 ABC 中，底邊 AB 為固定且由頂點 C 的高為常數 h ，試問那一個三角形，其三個高的乘積為最大？

問題 4

1990 人依下列的方法，分成互不相交的若干組：

- (a) 每組中的任一人，均不可能認識該組中的所有人；
- (b) 在同組中的任何三人中，至少有二人互不認識；且
- (c) 在同組中的二人，若互不認識，則在該組中恰有一個人認識這二人。
 - (i) 試證：在各組中，任何一個人所認識的人數相同。
 - (ii) 試問最多可分多少組？

註：本題中，所謂 A 認識 B ，亦指 B 認識 A ，同時，我們認定每一個人均認識他自己。

問題 5

試證：對於任意整數 n ， $n \geq 6$ ，必有可分成 n 個全等三角形的凸六邊形。

（譯自：Mathematics Competitions, Vol. 3, No. 1, April, 1990, Page 79, 80.）