不用微分法求解極值問題

潘振輝

私立景文工商專校

利用微分法求解一般的極值問題是相當便捷、有效的，對於未修習微分法者要解極值問題，大多會遭遇到困難。因爲極值問題的內涵均綜合了函數的特性及次序關係的操作規則，求解此類問題必先解析函數所具有的特性，用不等式的各種性質定理來試探、推導，之後，才能尋找到正確的解題對策。本文針對不用微分法求解極值問題劃分類型，提示解題的重點與對策。然後，舉出一系列的例題，由淺入深的說明這些例題的關聯性，指出解題當中應注意的條件限制，以及各種誤導、誤解的可能性。

首先，將不用微分法求解極值的問題的類型及其解法重點分述如下：

(1) 單變元一次多項式函數且變元設定在一個閉區間內求其極值，應考慮函數的遞增、遞減性及閉區間的端點。

(2) 單變元二次多項式函數且變元設定在一個區間（開的或閉的）內，要求其極值，先作配方將二次多項式配成完全平方式與一常數之和。觀察二次函數圖形的凹向、頂點及端點，判定最高點與最低點。或利用變元的變動範圍及次序關係來推導而得。

(3) 多（二個以上）變元多項式函數以齊次式表示者，通常利用算術平均數大於或等於幾何平均數的性質或歌西不等式來求解，需考慮到等號成立的主要條件。

(4) 在(1)(2)(3)種類型中用超越函數來替代，最先考慮是各種函數的特性，定出函數變元的值變動的範圍，再依上面所舉出各類型的處理方式去試探那種解法較爲正確，即可解得答案。

其次，將以上所提出各種類型的求極值問題，以漸進的方式，更詳細的說明如何解題，要注意到所利用的定理中給予的條件限制，及可能遭到的困難與誤解，分別以舉例來細述之。

(A) 單變元一次多項式函數未考慮遞增或遞減的性質。尤其是變元用指數、對數式三角函數替代後，不知變元的值變動的範圍。另一種可能誤解是變元的值變動範圍有誤使得下面的解題步驟正確與否都不能求得該題的正確答案。

例1：設 $f(x)=-2x+\frac{1}{2}$，$-1\leq x\leq 2$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值

正解：$f(x)=-2x+\frac{1}{2}$

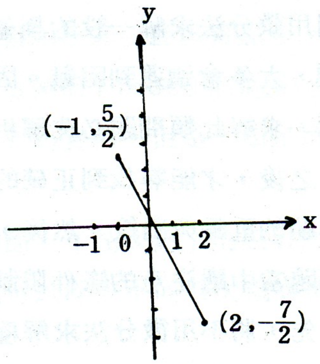
$\because -1\leq x\leq 2\Rightarrow 2\geq -2x\geq -4$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}\geq -2x+\frac{1}{2}\geq -\frac{7}{2}$$

$\therefore f(x)$ 有最大值 $\frac{5}{2}$，最小值 $-\frac{7}{2}$

另解：$f(x)=-2x+\frac{1}{2}$，$-1\leq x\leq 2$

圖解如右為一線段向右下降，二端點為 $(-1,\frac{5}{2})(2,-\frac{7}{2})$，其中一為最高點，一為最低點。



$\therefore f(x)$ 的最大值為 $\frac{5}{2}$，最小值為 $-\frac{7}{2}$。

部分學生僅由 $f(-1)=\frac{5}{2}$，$f(2)=-\frac{7}{2}$ 來說明理由，即斷言 $f(x)$ 有最大值 $\frac{5}{2}$，最小值 $-\frac{7}{2}$。這種解法對本題而言，答案為正確的，對其他題目，有誤導的缺點。

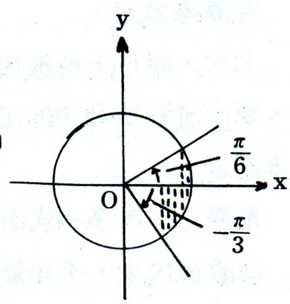
例2：設 $f(\theta)=-2\cos\theta+\frac{1}{2}$，$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$，求 $f(\theta)$ 的最大值及最小值。

正解：$\because -\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}\Rightarrow$ 右圖 θ 角度變動範圍內 x 值的變動範圍即是 $\cos\theta$ 的值所在範圍

$$\therefore \frac{1}{2}\leq\cos\theta\leq 1$$

$$\Rightarrow -1\geq -2\cos\theta\geq -2 \quad \text{（乘法律）}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\geq -2\cos\theta+\frac{1}{2}\geq -\frac{3}{2}$$



$\therefore f(x)$ 的最大值為 $-\frac{1}{2}$，最小值為 $-\frac{3}{2}$

誤解：(1) 未依$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$，求 $\cos\theta$ 的值的範圍，即設定$-1\leq\cos\theta\leq 1$。

(2) 依$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$，求 $\cos\theta$ 的值的範圍有誤。

(3) 未注意遞減性。除以負數時，不等式的不等符號的方向要改變，在解題中常被忽略。

由教學經驗知道；例 2 錯解的學生甚多，其錯誤所在大都是不會由$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$定出 $\cos\theta$ 的變動範圍。

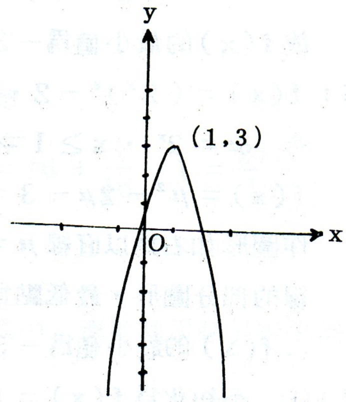
(B) 單變元二次多項式函數求極值常錯在配方法及利用變元的值來判定函數值的範圍。如果畫出二次函數圓形來觀察，並注意最高點或最低點及兩端點的高低位置，可得正確的答案。

例 3：求解函數 $f(x)=-2x^2+4x+1$，x 爲實數的極值

正解：$f(x)=-2(x-1)^2+3$

其圖形爲以直線 $x=1$ 爲對稱軸，最高點爲 $(1,3)$，開口向下的拋物線。

故 $f(x)$ 有極大值3。



誤解：(1) 配成完成平方式有誤，如：

$f(x)=(x-1)^2+1$，$(x-2)^2+5$，$-2(x+1)^2+1$，$-2(x-1)^2+1$。

(2) 畫出圖形有誤。

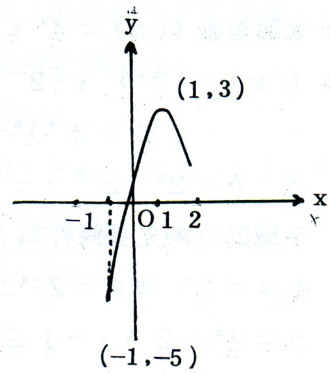
例 4：求解函數 $f(x)=-2x^2+4x+1$，$-1\leq x\leq 2$ 的最大值與最小值

正解：$f(x)=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$

其圖形爲以直線 $x=1$ 爲對稱軸，最高點爲 $(1,3)$；開口向下的拋物線的部分圖形且最低端點爲 $(-1,-5)$。

$\therefore -5\leq f(x)\leq 3$

最大值爲 3，最小值爲 -5。



誤解：(1) 配成完全平方式有誤，如：

$f(x)=(x-1)^2+1$，$(x-\ )^2+5$，

$-2(x+1)^2+1$。

(2) 未考慮 $-1\leq x\leq 2$，在端點 $x=-1$，$x=2$ 有可能出現最大值或最小值。

(3) 畫出圖形有誤。

上列例3、例4解題中，以配成完全平方式的錯誤佔大多數。其次是考慮端點，有的沒有考慮到，有的僅求出 $f(-1)$、$f(2)$ 的值與 $f(1)$ 的值比較，未曾寫出推導過程即斷言最大值與最小值。此種代入求 $f(-1)$、$f(2)$、$f(1)$ 值的作法，在下面的例子中可能引導出誤解。

例5：設函數 $f(x)=4^x-2^{x+1}-3$，$x\geq 1$ 試求 $f(x)$ 的最小值

正解：$f(x)=(2^x)^2-2\cdot 2^x-3=(2^x-1)^2-4$

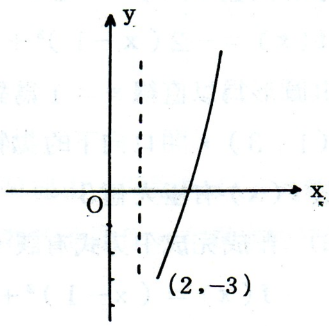
$\because x\geq 1\Rightarrow 2^x\geq 2$ （$\because 2^x$ 為遞增函數）

$\Rightarrow 2^x-1\geq 1$

$\Rightarrow (2^x-1)^2\geq 1$

$\therefore (2^x-1)^2-4\geq -3$

故 $f(x)$ 的最小值為 -3。



另解：$f(x)=(2^x)^2-2\cdot 2^x-3$

令 $\mu=2^x$，$x\geq 1\Rightarrow\mu\geq 2$

$f(x)=\mu^2-2\mu-3=(\mu-1)^2-4$

作圖形如右為以直線 $\mu=1$ 為對稱軸之拋物線的部分圖形，最低點為 $(2,-3)$。

$\therefore f(x)$ 的最小值為 -3。

誤解：(1) 不知化為 $f(x)=(2^x)^2-2\cdot 2^x-3$

(2) 由 $f(x)=(2^x-1)^2-4$ 斷言最小值為 -4，未考慮 $x=1$ 的條件限制。

例6：求解函數 $f(x)=4^x+4^{-x}-1$，$-1\leq x\leq 2$ 的最大值、最小值

正解：$f(x)=(2^x)^2+(2^{-x})^2-1=$

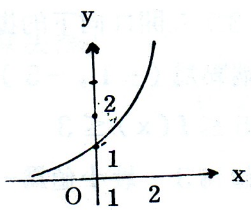
$(2^x+2^{-x})^2-3$

令 $\mu=2^x+2^{-x}$，$-1\leq\mu\leq 2$

等號成立的先要條件為 $2^x=2^{-x}$，即 $x=0$，

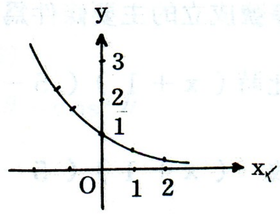
由 $\mu=2^x$ 與 $\mu=2^{-x}$ 二圖形可複合得 μ

$\mu=2^x+2^{-x}$，$-1\leq x\leq 2$ 的圖形



$\therefore 2 \leq \mu \leq \dfrac{17}{4}$

此時 $f(x)=\mu^2-3$　且 $2 \leq \mu \leq \dfrac{17}{4}$

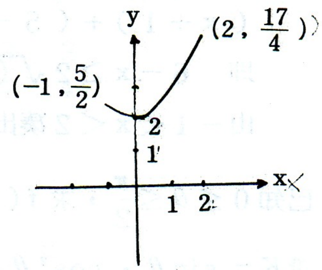


$4 \leq \mu^2 \leq \dfrac{289}{16} \Rightarrow 1 \leq \mu^2-3 \leq \dfrac{241}{16}$

誤解：(1)　$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \leq 4^x \leq 16$，

$$\frac{1}{16} \leq 4^x \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{5}{16} \leq 4^x+4^{-x} \leq 20$$



(2)　不知應用配方法。

(3)　$f(x)=(2^x+2^{-x})^2-3$

但不會求 2^x+2^{-x} 的變動範圍。

(4)　未考慮端點 $x=-1$，與 $x=2$ 可能出現極值。

(5)　逕由 $f(-1)=4+\dfrac{1}{4}-1=\dfrac{13}{4}$，$f(2)=16+\dfrac{1}{16}-1=\dfrac{241}{16}$，斷言 $f(x)$ 的最小值爲 $\dfrac{13}{4}$，最大值爲 $\dfrac{241}{16}$。

例5的難度甚高，要套用兩遍的不同函數的變化，其中，還要利用到算術平均數大於或等於幾何平均數的性質。

(C)　利用正數的算術平均數大於或等於其幾何平均數來求一個函數的最大值或最小值，應在某些變元的和或其乘積爲定值，且要滿足等號成立的條件下才能求得。通常變元的和或其乘積爲定值與不等式的等號成立的條件是同時滿足的。

例7：已知 $-1<x<2$ 求 $(x+1)(5-2x)$ 的最大值

正解：$\because -1<x<2 \Rightarrow x+1>0$，$5-2x>4-2x=2(2-x)>0$

$\therefore 2(x+1)+(5-2x) \geq 2\sqrt{2(x+1)(5-2x)}$

$$7 \geqq 2\sqrt{2(x+1)(5-2x)}$$

$$\frac{49}{4} \geq 2(x+1)(5-2x)$$

$$\frac{49}{8} \geq (x+1)(5-2x)$$

等號成立的主要條件爲 $2(x+1)=5-2x \Rightarrow x=\frac{3}{4}$

此時 $(x+1)(5-2x)=\frac{7}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{8}$

故 $(x+1)(5-2x)$ 的最大值爲 $\frac{49}{8}$

誤解：(1) 未判定 $x+1>0$，$5-2x>0$

(2) 爲了獲得 $(x+1)(5-2x)$ 的結果，直接利用：

$$(x+1)+(5-2x) \geq 2\sqrt{(x+1)(5-2x)}$$

即 $6-x \geq 2\sqrt{(x+1)(5-2x)}$

由 $-1<x<2$ 湊出一個錯誤的答案。

例8：已知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$，求 $f(\theta)=\sin\theta\cdot\cos^2\theta$ 的最大值

正解：設 $K=\sin\theta\cdot\cos^2\theta \Rightarrow K^2=\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta$

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta \geq 3\sqrt[3]{(2\sin^2\theta)\cdot\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta}$$

$$\frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2(\sin\theta\cdot\cos^2\theta)^2} \Rightarrow \frac{8}{27} \geq 2(\sin\theta\cdot\cos^2\theta)^2$$

但 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 即 $\sin\theta \geq 0$、$\cos\theta \geq 0$

$\therefore \sin\theta\cdot\cos^2\theta \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$

等號成立的主要條件爲 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{3}$，$\cos^2\theta=\frac{2}{3}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta \geq 0$， 即 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

可得 $\sin\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

故 $f(\theta)$ 有最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

誤解：(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin\theta \leq 1$，且 $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin\theta \cdot \cos^2\theta \leq 1$$

誤認為 $\sin\theta$ 與 $\cos^2\theta$ 的變動狀態是無關聯性的。

(2) 不知利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，直接湊出 $\sin\theta \cdot \cos^2\theta$

$\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta \geq 0$，$\cos^2\theta \geq 0$

$$\sin\theta + \cos^2\theta \geq 2\sqrt{\sin\theta \cdot \cos^2\theta}$$

即 $\sqrt{\sin\theta \cdot \cos^2\theta} \leq \sin\theta + \cos^2\theta = \sin\theta + 1 - \sin^2\theta$

$\because \sin\theta + 1 - \sin^2\theta = -(\sin\theta - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta + \cos^2\theta \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

即 $\sqrt{\sin\theta \cdot \cos^2\theta} \leq \frac{3}{8} \Rightarrow \sin\theta \cdot \cos^2\theta \leq \frac{9}{64}$

未利用 $a>0$，$b>0$，$a+b \geq 2\sqrt{ab}$，當 $a+b$ 為定值時，$a \cdot b$ 才有最大值，當 $a \cdot b$ 為定值時，$a+b$ 才有最小值。

例9：已知二正數 a，b 滿足 $a + 3b = 1$，求 ab^2 的最大值。

誤解：$a>0$，$b>0$，$a+3b=1$

$$a + b + 2b \geq 3\sqrt[3]{a \cdot b \cdot 2b}$$

$$\frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{2ab^2}$$

即 $\frac{1}{54} \geq ab^2$

$\frac{1}{54}$ 為 ab^2 的最大值

顯然，等號成立的主要條件為 $a = b = 2b$ 不合理。

正解：$a>0$，$b>0$，$a+3b=1$

為了使等號成立，將 $3b$ 折成 $\frac{3b}{2} + \frac{3b}{2}$

由 $a+\frac{3b}{2}+\frac{3b}{2}\geq 3\sqrt[3]{a\cdot\frac{3b}{2}\cdot\frac{3b}{2}}$

$$\frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{9}{4}ab^2}$$

$$\frac{4}{243}\geq ab^2$$

等號成立的主要條件爲 $a=\frac{3b}{2}=\frac{3b}{2}$

又 $a+3b=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{9} \Rightarrow ab^2=\frac{4}{243}$

故 ab^2 的最大值爲 $\frac{3}{243}$

例10：已知 $0<x<25$，求 $f(x)=x(80-2x)(50-2x)$ 的最小值

誤解：$\because 0<x<25 \Rightarrow x$，$80-2x$，$50-2x$ 皆爲正數

$$4f(x)=4x(80-2x)(50-2x)$$

由 $4x+(80-2x)+(50-2x)\geq 3\sqrt[3]{4x(80-2x)(50-2x)}$

$$\frac{130}{3}\geq\sqrt[3]{4f(x)}$$

$\therefore f(x)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{130}{3}\right)^3$ 爲最大值。

但 $f(x)$ 有最大值要在 $4x=80-2x=50-2x$ 成立時才可求得，顯然 $80-2x=50-2x$ 爲矛盾。

正解：要利用 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ 求 abc 之最大值，必需在 $a+b+c$ 爲定值且 $a=b=c$ 三個條件同時成立才有可能。

將 $f(x)=x(80-2x)(50-2x)$ 變型爲

$$k(2k+2)f(x)=[(2k+2)x](80-2x)(50k-2kx)$$

由 $(2k+2)x+(80-2x)+(50k-2kx)\geq$

$$3\sqrt[3]{[(2k+2)x](80-2x)(50k-2kx)}$$

$$\frac{80+50k}{3}\geq\sqrt[3]{[(2k+2)x](80-2x)(50k-2x)}$$

即　$k(2k+2)f(x) \leq \left[\dfrac{80+50k}{3}\right]^3 \Rightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{k(2k+2)}\left[\dfrac{80+50k}{3}\right]^3$

此時，等號成立的條件爲

$(2k+2)x = 80-2x = 50k-2kx$

$\Rightarrow \begin{cases}(2k+2)x = 80-2x \\ (2k+2)x = 50k-2kx\end{cases} \Rightarrow \dfrac{80}{2k+4} = \dfrac{50k}{4k+2}$

$k = 2$ 或 $\dfrac{-4}{5}$

又　$(2k+2)x$，$80-2x$，$50k-2kx$ 皆正 $\Rightarrow k > 0$

$\therefore k = 2$

故　$f(x) \leq \dfrac{1}{12}(60)^3 = 18000$ 爲所求最大值

(D) 利用歌西不等式求一個函數的極值，在型如 $A \cdot B \geq C$ 中 A、B、C 三者要有二者爲定值且滿足等式成立的主要條件，才可以求得第三者的最小值與最大值。

例11：球面 S，$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 4$ 上任一點 (x_0, y_0, z_0)，求 $2x_0-2y_0+z_0$ 的最大值及最小值。

正解：$\because (x_0, y_0, z_0)$ 爲球面 S 上任一點

$(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2 = 4$ ………①

由歌西不等式

$[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2](2^2+(-2)^2+1^2) \geq$
$[2(x_0-1)-2(y_0-2)+1(z_0+2)]^2$

即　$4 \cdot 9 \geq (2x_0-2y_0+z_0+4)^2$

$\therefore -6 \leq 2x_0-2y_0+z_0+4 \leq 6$

$-10 \leq 2x_0-2y_0+z_0 \leq 2$

$\therefore 2x_0-2y_0+z_0$ 的最大值爲 2、最小值爲 -10。

等號成立的先要條件爲 $\dfrac{x_0-1}{2} = \dfrac{y_0-2}{-2} = \dfrac{z_0+2}{1} = t$

即　$x_0 = 1+2t$，$y_0 = 2-2t$，$z_0 = -2+t$ ………②

②代入①得　$t=\pm\frac{2}{3}$

當　$t=\frac{2}{3}$，　$x_0=\frac{7}{3}$，　$y_0=\frac{2}{3}$，　$z_0=\frac{-4}{3}\Rightarrow 2x_0-2y_0+z_0=2$

當　$t=-\frac{2}{3}$，　$x_0=-\frac{1}{3}$，　$y_0=\frac{10}{3}$，　$z_0=-\frac{8}{3}\Rightarrow 2x_0-2y_0+z_0=-10$

誤解：(1)　不會應用 $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2=4$

(2)　利用歌西不等式的方法有誤，不會寫出

$$[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+2)^2][2^2+(-2)^2+1^2]\geq$$
$$[2(x_0-1)-2(y_0-2)+1(z_0+2)]^2$$

想不出 $2x_0-2y_0+z_0$ 與 $2(x_0-1)-2(y_0-2)+1(z_0-2)$ 的關聯性。

例12：已知二正數 a、b 滿足 $a+b=1$，試求 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值

誤解：a，b 表二正數

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2，\quad b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2$$

$\therefore (a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq 2^2+2^2=8$　為最小值

顯然有誤，$\because a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}$，$b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}$ 二式同時等號成立的主要條件為 $a=\frac{1}{a}$，$b=\frac{1}{b}$ 即 $a=1$，$b=1$ 與原設 $a+b=1$ 不合。

正解：$a>0$，$b>0$，$a+b=1$　………①

$$[(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2][1^2+1^2]\geq(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2$$

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{ab})^2$$

等號成立 $\Leftrightarrow a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\Leftrightarrow a=b$　………②

又　$a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}\geq 4$

等號成立 $\Leftrightarrow$　$a=b$　………③

由①②③知　$a=b=\dfrac{1}{2}$

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \text{ 有最小值 } \frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

例12：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，試求 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 的極小值

誤解：$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin\theta}，\dfrac{3}{\cos\theta}$ 皆爲正數

於是　$\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}\cdot\dfrac{3}{\cos\theta}}=2\sqrt{\dfrac{12}{\sin 2\theta}}$

又　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0<2\theta<\pi \Rightarrow 0<\sin 2\theta\leq 1$

$\dfrac{1}{\sin 2\theta}\geq 1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{12}{\sin 2\theta}}\geq\sqrt{12}$

故　$\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geq 4\sqrt{3}$

此時，考慮到等號成立的主要條件

$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\cos\theta}$

但 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　且　$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

可得　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

於是　$\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}=2\sqrt{13}>4\sqrt{3}$　不合理

正解：$0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{3}{\cos\theta}>0$

由歌西不等式，$a>0$，$b>0$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{a\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{b\cos\theta}\right)^2\right]\geq \left[\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right]^2$$

即 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}\geq\dfrac{(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2}{a\sin\theta+b\cos\theta}$

等號成立的主要條件為

$$\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{a\sin\theta}=\frac{\frac{3}{\cos\theta}}{b\cos\theta}\text{ 即 }\frac{2}{a\sin^2\theta}=\frac{3}{b\cos^2\theta}\quad\cdots\cdots①$$

又 $\dfrac{1}{a\sin\theta+b\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+4)}\geq\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ($\because a>0$、$b>0$)

等號成立的主要條件為 $\sin(\theta+\varphi)=1$ $\cdots\cdots②$

$\because\theta$ 與 φ 皆為正銳角 $\Rightarrow$ $0<\theta+\varphi<\pi$

可取 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots\cdots③$

由①③ $\sin\theta=\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\theta=\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cdots\cdots④$

由①④得 $\dfrac{2}{a^3}=\dfrac{3}{b^2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt[3]{2}}{a}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{b}$

取 $a=\sqrt[3]{2}\,t$， $b=\sqrt[3]{3}\,t$， $t>0$

得 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2}}$ ，

$\cos\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2}}$

故 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 的極小值為

$$\frac{2\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{3\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2}}{\sqrt[3]{3}}=[(\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{3})^2]^{\frac{3}{2}}$$

〔註〕

要增強求解極值問題的能力，應先徹底瞭解不等式的各基本性質，如遞移性、加法性、乘法性皆能運用自如及各函數的特性判定無誤。先從簡易的單變元的一次、二次多項式函數的例子做起，再演算含超越函數的問題，且多借用圖解的方法來觀察，將會對這類型的問題設定正確的解題方向，提高自信心；至於多變元的極值問題要利用到算術平均大於或等於其幾何平均數或利用到歌西不等式者，除了要瞭解如何套用公式及兩者有所區別之處外，請注意前面所例舉的各種謬誤。如此，有助於求解難度高的題目。

〔註〕一般形式P＞0，q＞0，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求$\frac{p}{\sin\theta}+\frac{q}{\cos\theta}$ 的極小值，求法請參考數學傳播第七卷第三期（72年9月）拙作「從一個聯考試題談起」。

第二屆亞太數學奧林匹亞

李虎雄譯

一、時　　間：一九九〇年三月

二、參加國家：墨西哥、加拿大、韓國、香港、泰國、新加坡、菲律賓、紐西蘭及澳洲

三、試　　題：

1. 時間分配：4小時。
2. 配　　分：每題7分，總計35分。
3. 不可使用計算器。

問題1

在△ABC中，設D，E，F分別為BC，AC，AB的中點，且G為重心。給予∠BAC的一個值時，有多少種不相似的三角形而AEGF為循環的四邊形？（AEGF為循環四邊形的意思為：A，E，G，F四點共圓）

問題2

設a_1，a_2，……，a_n是正數，且S_k為所有由a_1，a_2，……，a_n取k個乘積後的和。

證明：

$$S_k S_{n-k}\geq\binom{n}{k}^2 a_1 a_2\cdots\cdots a_n,\quad k=1,2,\cdots\cdots,n-1$$

均成立。

（下接70頁）