

四面體重心的探討

陳廷圭

花蓮縣立新城國中

一、研究動機

在國中數學課本第五冊第 51 頁，提到每一三角形均有一重心，且吊起重心，可將本質均勻的三角形物體平衡而不偏倚的吊起來。連想到四面體應也有重心。

但如何求出四面體的重心呢？

四面體四面都是三角形，三角形的重心有很多特性，四面體的重心是否仍具有這些特性呢？

二、預備常識

1. 三角形重心的有關性質。
2. 畢氏定理。
3. 相似形及有關性質。
4. 直角坐標系。

三、研究過程

問題一：如何找到四面體的重心？

研究一：假如平行底面來切四面體，理論上愈切愈薄，而四面體就好像是一個個的相似三角形所疊起來的。根據這個認識，我們大膽作以下之假設。

假設甲：將一層層的相似三角形之重心連接恰為一線段。

(證明)：1. 如圖(一)，四面體 $ABCD$ ，設 $\triangle A'B'C'$ 為平行 $\triangle ABC$ 切割而得之任一 $\triangle$ ，則 $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$

設 E 為 $\overline{AB}$ 中點，即 $\overline{AE} = \overline{EB}$ ，

連接 $\overline{DE}$ 交 $\overline{A'B'}$ 於 E' 。

2. $\triangle A'E'D \sim \triangle AED$ ，

$$\therefore \frac{\overline{A'E'}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DE'}}{\overline{DE}}$$

$\triangle DE'B' \sim \triangle DEB$ ，

$$\therefore \frac{\overline{DE'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'B'}}{\overline{EB}}$$

$$\therefore \frac{\overline{A'E'}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{E'B'}}{\overline{EB}} \Rightarrow \overline{A'E'} = \overline{E'B'}$$

故 E' 為 $\overline{A'B'}$ 中點。

3. 設 G 為 $\triangle ABC$ 重心，則 G 在 $\overline{EC}$ 上，且 $\frac{\overline{EG}}{\overline{GC}} = \frac{1}{2}$ (重心性質)

4. D, E, C 決定一平面，而 E', C', G 分別在 $\overline{DE}, \overline{DC}, \overline{CE}$ 上， $\therefore D, E, C, E', C', G$ 在同一平面上。連 $\overline{E'C'}$

5. $\triangle DE'B' \sim \triangle DEB$ ，

$$\therefore \frac{\overline{DE'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}}$$

$$\therefore \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC'}}{\overline{DC}}$$

$$\therefore \frac{\overline{DE'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DC'}}{\overline{DC}} \text{，得 } \triangle DEC \text{ 中 } \overline{E'C'} \parallel \overline{EC}$$

6. 連 $\overline{DG}$ 令交 $\overline{E'C'}$ 於 G' (D, G 在 $\overline{E'C'}$ 異側)

7. $\triangle E'G'D \sim \triangle EGD$ ，

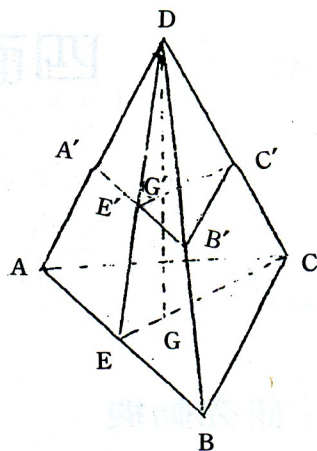
$$\therefore \frac{\overline{E'G'}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}$$

$\triangle DG'C' \sim \triangle DGC$ ，

$$\therefore \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{G'C'}}{\overline{GC}}$$

$$\text{即 } \frac{\overline{E'G'}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{G'C'}}{\overline{GC}} \text{，} \therefore \frac{\overline{E'G'}}{\overline{G'C'}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{GC}} = \frac{1}{2} \text{ (由3)}$$

8. $\therefore G'$ 為 $\triangle A'B'C'$ 的重心 (重心性質)



圖(一)

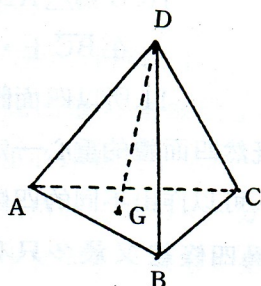
9. $\triangle A'B'C'$ 之重心在 $\overline{DG}$ 上。

10. 同理所有依此法分割得到之三角形重心皆在 $\overline{DG}$ 上。

假設乙：四面體「頂點與所對底面重心連線」與非底面上的稜邊構成的平面必平分四面體。

(證明)：1. 如圖(二)，令 $\triangle ABC$ 的重心為 G ，令過 $\overline{DG}$, $\overline{DC}$ 的平面為 L_1 ，

2. L_1 經過 $\overline{DG}$, $\overline{DC}$ ， $\therefore$ 在每一層三角形中可看出在與 L_1 交集的線段必為中線，必平分每一層三角形，故總和來說 L_1 平分四面體 $ABCD$ ，即在四面體 $ABCD$ 內， L_1 兩側小四面體體積相等。



圖(二)

由“三角形三中線交點叫做重心”，再由我們所知“三角形任一中線平分三角形”我們可換個方式來說明三角形重心位置的定義：“三角形重心位置在三角形內部並在經三角形一頂點且平分此三角形的直線上”，由此，我們代嘗試定義四面體重心的位置為：“在四面體內部並在經四面體一稜邊且平分四面體的平面上”。

假設丙：四面體的重心必落在頂點與所對底面重心的連線上。

(證明)：1. 如圖(三)，令 $\triangle ABC$ 的重心為 G ，四面體 $ABCD$ 的重心為 E ，設 E 不在 $\overline{DG}$ 上即 $\overline{DE} \neq \overline{DG}$ ， $\therefore \overline{DE}, \overline{DG}$ 決定一平面 P 。

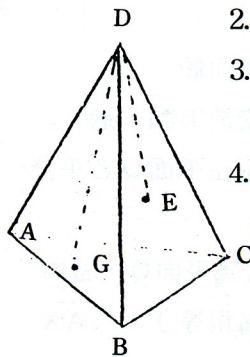
2. 令過 $\overline{DG}$, $\overline{DC}$ 的平面為 L_1 ，過 $\overline{DE}$, $\overline{DC}$ 的平面為 L_2 。

3. 由假設乙觀之， L_1 平分四面體 $ABCD$ ，即在四面體 $ABCD$ 內， L_1 兩側小四面體體積相等。

4. L_2 經 $\overline{DE}$, $\overline{DC}$ ，即重心 E 在經稜邊 $\overline{DC}$ 的平面 L_2 上，而由定義知 E 必在經稜邊且平分四面體 $ABCD$ 的平面 K （令為 K ）上，而 E 和稜邊 $\overline{DC}$ 恰決定一平面，故 $L_2 = K$ ，即 L_2 平分四面體 $ABCD$ 成兩側體積相等的四面體。

5. 由 3，4 得在四面體 $ABCD$ 內，共同以 $\overline{DC}$ 為軸的平面 L_1, L_2 間所來的空間體積為零， $\therefore L_1 = L_2$ ，即 $\overline{DE}, \overline{DG}, \overline{DC}$ 在同一平面 $L_1 = L_2 = P$ 上（由 1）

6. 同理令過 $\overline{DE}, \overline{DB}$ 的平面為 M_1 ， $\overline{DG}, \overline{DB}$ 的平面為 M_2 ，則 $M_1 = M_2$ ，



圖(三)

即 $\overline{DE}, \overline{DG}, \overline{DB}$ 在同一平面, $M_1 = M_2 = P$ 上 (由 1)

7. $\therefore \overline{DE}, \overline{DG}, \overline{DC}, \overline{DB}$ 在平面 $L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = P$ 上 (由 5, 6)

8. $\overline{DC} \neq \overline{DB}$ ($\because$ 各為四面體的兩稜邊) 令其構成平面 Q 。

9. $\therefore \overline{DE}, \overline{DG}$ 在 $L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = P$ 上且在平面 Q 上 (由 7, 8)。

10. G 為 $\triangle ABC$ 重心, 必在 $\triangle ABC$ 的平面上, 又由 9 G 在平面 Q 上, $\therefore G$ 在 $\overline{BC}$ 上, 與三角形重心必在三角形內部矛盾。

11. 所以四面體重心 E 必落於頂點與所對底面重心之連線上。

既然四面體的重心一定落在頂點與所對底面重心之連線上, 那麼四面體分別以四個底面, 可以作出不同的四條「頂點—底面重心」連線, 這四條線都包括有四面體的重心, 而相異四條線又最多只有一個共同的交點, 所以四面體四條「頂點—底面重心」連線交於一點, 這一點就是此四面體的重心。

假設丁: 四條「頂點與所對底面重心連線」交於一點

(證明): 1. 如圖 (四), 令 E 為 BC 中點, 則 $\triangle ABC$ 重心 K 在 $\overline{AE}$ 上, $\triangle BCD$ 重心 H 在 $\overline{DE}$ 上

2. 令 $\overline{KD}, \overline{AD}$ 構成 L_1 平面, $\overline{AH}, \overline{AD}$ 構成 L_2 平面, 由假設乙知, L_1, L_2 各平分四面體, 而 L_1, L_2 共用轉軸 AD , $\therefore L_1, L_2$ 間所夾的空間體積為零, 故 $L_1 = L_2$; 即 $\overline{KD}, \overline{AD}, \overline{AH}$ 構成同一平面 P 。

3. 又 $\overline{KD}, \overline{AH}$ 均在四面體內, $\therefore$ 必在 $\triangle AED$ 內, 而 $\angle ADK + \angle HAD < \angle EDA + \angle DAE < 180^\circ$, $\therefore \overline{KD}, \overline{AH}$ 必有一交點 M 。

4. 連接 $\overline{BM}$ 交 $\triangle ACD$ 於 N

5. 令 $\overline{AH}, \overline{AB}$ 構成平面 R , 則由假設乙知, R 平分整個四面體

6. $\therefore \overline{BN}, \overline{AH}$ 交於 M 點, $\overline{AH}, \overline{AB}$ 交於 A 點, $\overline{BN}, \overline{AB}$ 交於 B 點, 過 A, B, M 決定一平面 Q , 又由 5 得 $Q = R$, $\therefore \overline{BN}, \overline{AB}$ 所在平面 Q 必平分四面體

7. 連接 $\overline{AN}$ 交 $\overline{CD}$ 於 X , 則 $\overline{AB}, \overline{BN}, \overline{AN}$ 共用一平面, 恰為平面 Q , 故由 6 知被平面 Q 所平分的兩個小四面體底面積相等 ($\because$ 高相等), $\therefore \overline{AX}$ 必平分 $\triangle ACD$, 即 $\overline{AX}$ 為 $\triangle ACD$ 中線

8. 同理可證 $\overline{DW}$ 必平分 $\triangle ACD$, 即 $\overline{DW}$ 亦為 $\triangle ACD$ 中線

9. 連接 $\overline{CN}$, 在 $\overline{NC}$ 的相反射線上, 取一點 Y , 使得 $\overline{CN} = \overline{NY}$

10. 連接 $\overline{AY}, \overline{YD}$

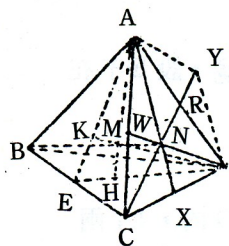


圖 (四)

$$11. \because \overline{AW} = \overline{WC}, \overline{NY} = \overline{YC}, \therefore \overline{AY} \parallel \overline{WD}$$

$$12. \because \overline{XD} = \overline{XC}, \overline{NY} = \overline{YC}, \therefore \overline{AX} \parallel \overline{YD}$$

13. 由 11, 12 知, 四邊形 ANDY 為平行四邊形

$\therefore \overline{AR} = \overline{RD}$ (平行四邊形對角線互相平分), $\therefore R$ 為 $\overline{AD}$ 中點,

故 $\overline{CR}$ 亦為 $\triangle ACD$ 中線, 即 N 為 $\triangle ACD$ 的重心

14. 由上知通過 M 點的 $\overline{BN}$ 亦為「頂點與所對底面重心連線段」

15. 同理可得通過 M 點的 $\overline{CS}$ 亦為「頂點與所對底面重心連線段」

16. 綜上所述, 得四面體四條「頂點與所對底面重心連線段」交於一點 M 。

問題二：在平面坐標系中（或在三度空間坐標系中），三角形三頂點 x - 分量與 y - 分量（ z - 分量）之各自平均值恰為重心之坐標與 y 坐標（ z 坐標），那麼四面體四頂點各分量的平均值是否恰為重心的坐標？

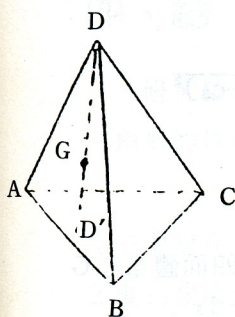
研究二：如圖(五)，四面體 $ABCD$ ，設各頂點坐標 $A(a_1, a_2, a_3)$ ， $B(b_1, b_2, b_3)$ ，

$C(c_1, c_2, c_3)$ ， $D(d_1, d_2, d_3)$ ，設一點 $G(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}$ ，

$\frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}$ ， $\frac{a_3 + b_3 + c_3 + d_3}{4})$ 令 $\triangle BCD$ ， $\triangle ACD$ ， $\triangle ABD$ ，

$\triangle ABC$ 之重心分別為 A' ， B' ， C' ， D'

$\therefore D'$ 坐標 $(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3})$



圖(五)

希望證得 G 點同時為 $\overline{AA'}$ ， $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$ ， $\overline{DD'}$ 上的點，也就是說 $\overline{AA'}$ ， $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$ ， $\overline{DD'}$ 交於 G 點，在我們所學的有限知識中，如何證明 G 點在 $\overline{DD'}$ 上？

同理推論到 G 點在 $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$ ， $\overline{AA'}$ 上？首先我們以平面坐標來了解，若 G 點在線段 $\overline{DD'}$ 上，則 $\overline{DG} + \overline{GD'} = \overline{DD'}$ 。反之，若 G 點不在 $\overline{DD'}$ 上，則 $\overline{DD'} < \overline{DG} + \overline{GD'}$ ，這個觀念不難由三角形兩邊長和大於第三邊長而得知，又由畢氏定理及平面坐標系的知識中，我們知道空間中兩點 $x(x_1, x_2, x_3)$ $y(y_1, y_2, y_3)$ ，線段 $\overline{xy}$ 長度之求法為 $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

如此我們可得以下各線段之長度：

$$\overline{DD'} = \sqrt{(d_1 - \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3})^2 + (d_2 - \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3})^2 + (d_3 - \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3d_1 - a_1 - b_1 - c_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3d_2 - a_2 - b_2 - c_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3d_3 - a_3 - b_3 - c_3}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(3d_1 - a_1 - b_1 - c_1)^2 + (3d_2 - a_2 - b_2 - c_2)^2 + (3d_3 - a_3 - b_3 - c_3)^2}$$

$$\overline{DG} = \sqrt{\left(d_1 - \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}\right)^2 + \left(d_2 - \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)^2 + \left(d_3 - \frac{a_3 + b_3 + c_3 + d_3}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3d_1 - a_1 - b_1 - c_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3d_2 - a_2 - b_2 - c_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3d_3 - a_3 - b_3 - c_3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(3d_1 - a_1 - b_1 - c_1)^2 + (3d_2 - a_2 - b_2 - c_2)^2 + (3d_3 - a_3 - b_3 - c_3)^2}$$

$$\begin{aligned} \overline{GD'} &= \sqrt{\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4} - \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4} - \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)^2} \\ &\quad + \left(\frac{a_3 + b_3 + c_3 + d_3}{4} - \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3d_1 - a_1 - b_1 - c_1}{12}\right)^2 + \left(\frac{3d_2 - a_2 - b_2 - c_2}{12}\right)^2 + \left(\frac{3d_3 - a_3 - b_3 - c_3}{12}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{(3d_1 - a_1 - b_1 - c_1)^2 + (3d_2 - a_2 - b_2 - c_2)^2 + (3d_3 - a_3 - b_3 - c_3)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \quad \therefore \overline{DD'} = \overline{DG} + \overline{GD'}$$

得知G點落在 $\overline{DD'}$ 上，同理G點亦落於 $\overline{AA'}$ ， $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$ 上，至此確定此四面體重心G之坐標為 $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}, \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}, \frac{a_3 + b_3 + c_3 + d_3}{4}\right)$

問題三：三角形重心到頂點之距離為該中線長之 $\frac{2}{3}$ ，那麼四面體重心到頂點的距離

與該「頂點・底面重心」線段長之比是否為一定值？該定值為多少？

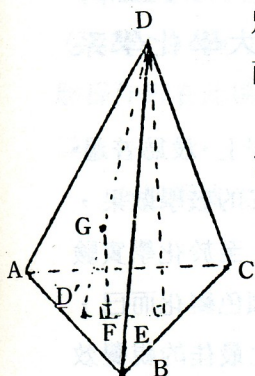
研究三：根據研究二之所得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DG}}{\overline{DD'}} &= \frac{\frac{1}{4} \sqrt{(3d_1 - a_1 - b_1 - c_1)^2 + (3d_2 - a_2 - b_2 - c_2)^2 + (3d_3 - a_3 - b_3 - c_3)^2}}{\frac{1}{3} \sqrt{(3d_1 - a_1 - b_1 - c_1)^2 + (3d_2 - a_2 - b_2 - c_2)^2 + (3d_3 - a_3 - b_3 - c_3)^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

故可知四面體重心到頂點的距離與該「頂點 - 底面重心」線段長之比恒為定值 $\frac{3}{4}$ 。

問題四：三角形重心與三頂點連線段，恰把三角形三等分。四面體之重心與四頂點連線段各兩兩所在的三角形面所切得的四個小四面體體積是否皆為原四面體之 $\frac{1}{4}$ ？

研究四：如圖(六)，四面體 $ABCD$ ，重心 G ； D' 為 $\triangle ABC$ 重心，四個小四面體分別為 $GABC$ ， $GABD$ ， $GBCD$ ， $GACD$ ，其中 $GABC$ 與 $DABC$ 有共同的底面 $\triangle ABC$ 。分別自 D ， G 引 $\triangle ABC$ 之垂直線交 $\triangle ABC$ 所在的平面於 E ， F ，則如左圖， $\overline{DE}$ ， $\overline{GF}$ 皆垂直 $\overline{EF}$ （直線垂直平面的意義）： $\therefore \overline{DE} \parallel \overline{GF}$ ；故 $\triangle D'FG \sim \triangle D'ED$ ，而 $\overline{D'G} : \overline{D'D} = 1 : 4$ ，所以 $\overline{GF} : \overline{DE} = 1 : 4$ ，（四面體 $GABC$ 體積）：（四面體 $ABCD$ 體積）= $\overline{GF} : \overline{DE} = 1 : 4$ ，同理四面體 $GABD$ ， $GBCD$ ， $GACD$ 體積皆為四面體 $ABCD$ 體積的 $\frac{1}{4}$ 。



圖(六)

四、結 論

研究結果，縱使我們用的方法不是最簡捷有效的方法，但總讓我們熟練了坐標系，三角形的性質，距離的求法……等，以及歸納出三角形與四面體重心性質比較如下：

三 角 形

1. 三中線交於一點。
2. 重心坐標恰為三頂點各分量分別的平均值。
3. 重心到頂點距離為該中線線段長之 $\frac{2}{3}$ 。
4. 重心與三頂點連線段恰把三角形三等分。

四 面 體

2. 重心坐標恰為四頂點各分量分別的平均值。
3. 重心到頂點距離為該「頂點 - 底面重心」連線段長之 $\frac{3}{4}$ 。
4. 重心與四頂點連線段各兩兩所在的三角形面把四面體四等分。

三角形在平面上是最簡單的多邊形，同樣的四面體在三度空間中亦為最簡單的多面體，故僅以四面體為討論中心。