用軟體 SYMPHONY 協助求不定方程 $ax-by=1$ 及 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解

葉東進
科學園區實驗高中

對於互質的正整數 a 與 b，如果 (x_1, y_1) 是 $ax-by=1$ 的初始正整數解，經由 $\begin{cases} x_k = x_1 + b(k-1) \\ y_k = y_1 + a(k-1) \end{cases}$，$k \in N$，所取得的數對 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，… 便是 $ax-by=1$ 的所有正整數解。因此，找 $ax-by=1$ 的正整數解，主要便是在找它的初始解 (x_1, y_1)。

對於非完全平方的正整數 α，如果 (x_1, y_1) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解，經由 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^k = x_k + y_k\sqrt{\alpha}$，$k \in N$，所取得的數對 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，…便是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的所有正整數解，（註一）。因此，找 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解，主要便是在找它的初始解 (x_1, y_1)。

底下介紹如何利用 SYMPHONY 協助找出初始解。

一、$ax-by=1$ 的初始正整數解

分數 $\frac{205}{93}$ 表爲 $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}$ 時，我們把後式說是 $\frac{205}{93}$ 的速分數表式。

一般，如果 α 是不爲整數的正有理數，其整數部分爲 a_0，則

$$\alpha = a_0 + (\alpha - a_0)\text{；而 } 0 < \alpha - a_0 < 1$$

令 $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_0}$，則 $\alpha_1 > 1$，如果 α_1 不是整數，其整數部分爲 a_1，則

$$\alpha_1 = a_1 + (\alpha_1 - a_1)\text{；而 } 0 < \alpha_1 - a_1 < 1$$

令 $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1}$，則 $\alpha_2 > 1$，如果 α_2 不是整數，其整數部分爲 a_2，則

$$\alpha_2 = a_2 + (\alpha_2 - a_2)\text{；而 } 0 < \alpha_2 - a_2 < 1$$

如此繼續進行，經過有限次的步驟，α 可以表爲一個有限連分數：

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

我們用符號〔$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$〕表示上面的連分數，即

$$[a_0] = a_0 \quad , \quad [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \ ,$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1} \text{ 等等。}$$

由於〔$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$〕是一個分數，記爲 $\dfrac{p_k}{q_k}$，$p_k, q_k \in N$，我們有：

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad , \quad q_1 = a_1$$
$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 \quad , \quad q_2 = a_2 q_1 + q_0$$

如果令 $p_0 = a_0$，$q_0 = 1$，則我們會有一般的結論：

$$\begin{cases} (1) & p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \,,\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \,, \text{其中 } k \in N \,,\ k \geq 2 \\ (2) & p_k \text{ 與 } q_k \text{ 滿足 } p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \,,\ k \in N \quad \text{（註二）} \end{cases}$$

上面的結論(2)告訴我們：p_k 與 q_k 是互質的。

此外，如果 α 是一個正有理數，並表爲最簡分數 $\dfrac{a}{b}$（即 $a, b \in N$，a 與 b 互質），當 α 表爲連分數〔$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$〕時，則有

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$$

由於 p_n 與 q_n 互質，而 a 與 b 也互質，於是有 $a=p_n$，$b=q_n$；再由結論(2)，便得到 $a\cdot q_{n-1}-b\cdot p_{n-1}=(-1)^{n-1}$。

若 n 為奇數，此時 $a\cdot q_{n-1}-b\cdot p_{n-1}=1$，因此 (q_{n-1}, p_{n-1}) 便是 $ax-by=1$ 的初始正整數解；若 n 為偶數，此時 $a\cdot q_{n-1}-b\cdot p_{n-1}=-1$，把 $\frac{a}{b}$ 的速分數表式 $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 改寫成 $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n-1, 1]$，因而有

$$\frac{a}{b}=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 1]=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

隨之而有 $a=p_{n+1}$，$b=q_{n+1}$；但是 $p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n=1$，便得到 $a\cdot q_n-b\cdot p_n=1$，因此 (q_n, p_n) 便是 $ax-by=1$ 的初始正整數解。

運用SYMPHONY的COPY功能，我們先造出數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，（註三），再利用結論(1)的兩個遞迴式：$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2}$ 及 $q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}$ 造出數對 $(q_1, p_1), (q_2, p_2), \cdots$，在WORKSHEET上，我們就可以清楚地找到 $ax-by=1$ 的初始正整數解。附表1，我們取 $a=123$，$b=199$ 為例，找到的初始解為（144，89）；附表二中，我們取 $a=123$，$b=44$ 為例，找到的初始解為（39，109）。

二、$x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解

對於非完全平方的正整數 α，$\sqrt{\alpha}$ 是一個無理數，它可以表為一個無限的循環連分數：$\sqrt{\alpha}=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$

令 $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]=\frac{p_n}{q_n}$，則我們有下面的結論：

(1) $\frac{p_n}{q_n}$ 是 $\sqrt{\alpha}$ 的漸近分數，且 $p_n<p_{n+1}$，$q_n<q_{n+1}$，$n\in N$

(2) 存在一正整數 n，使數對 (p_n, q_n) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的一組正整數解（註四）。

因此，在前一節的WORKSHEET中，我們以 $\sqrt{\alpha}$ 取代 a 值，以 1 取代 b 值，便得到一

連串的$\sqrt{\alpha}$的漸近分數$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$，…，把數對（p_1，q_1），（p_2，q_2），…經由COPY功能逐一代入$x^2-\alpha y^2=1$中驗算，結論(2)告訴我們一定可以從數對（p_1，q_1），(p_2，q_2)，… 中找到$x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解。附表3中，我們以$\alpha=7$為例，找到初始解為（8，3）；附表四中，以$\alpha=13$為例，找到的初始解為（649，180）；附表五則列出了α從2開始直到99的$x^2-\alpha y^2=1$的初始解。

三、從WORKSHEET上看到的現象

考慮$\frac{a}{b}$的連分數〔a_0，a_1，a_2，…，a_n〕所得到的兩個數列$\langle p_k\rangle$與$\langle q_k\rangle$，我們可以從電腦的SHEET上看到下列諸現象：

(1) 如果所取的a與b是Fibonacci數列中相鄰的兩項或是間隔兩項時，$\langle p_k\rangle$與$\langle q_k\rangle$也都是Fibonacci數列。

(2) 令點p_k的坐標是（q_k，p_k），$k=0$，1，2，…，則$\triangle OP_kP_{k+1}$的面積恆為$\frac{1}{2}$。

(3) 承(2)，點p_k隨着整數k的接續遞增，相應地在直線$ax-by=1$ 的兩側間隔躍動，且逐漸趨近直線$ax-by=1$，直到取得初始解相應之整數點落在直線$ax-by=1$上而後止。

對於以上諸現象，底下給出它們的證明。

現象(1)的證明：

對於Fibonacci數列$\langle A_k\rangle$，有

$$A_k=A_{k-1}+A_{k-2}$$

$$\Rightarrow \frac{A_k}{A_{k-1}}=1+\frac{A_{k-2}}{A_{k-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{A_{k-1}}{A_{k-2}}}$$

因此，$$\frac{A_k}{A_{k-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{A_{k-2}}{A_{k-3}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{A_{k-3}}{A_{k-4}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots+\cfrac{1}{1}}}$$

即 $\frac{A_k}{A_{k-1}}$ 表爲速分數時爲〔1，1，1，…，1〕

所以a與b爲Fibonacci 數列中相鄰兩項時，便有

$$\frac{a}{b}=〔1,1,1,\cdots,1〕$$

此時，由第一節之結論(1)得到：

$$\begin{cases} p_k=p_{k-1}+p_{k-2} \\ q_k=q_{k-1}+q_{k-2} \end{cases}$$

即 $\langle p_k\rangle$ 與 $\langle q_k\rangle$ 都是Fibonacci 數列。

至於a與b爲Fibonacci 數列中的間隔兩項時，其證明與上述相仿，略去不表。

現象(2)的證明：

點 P_k 與 P_{k+1} 的坐標分別爲 (q_k, p_k) 與 (q_{k+1}, p_{k+1})，所以

$$\triangle OP_kP_{k+1} \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{k+1} & p_{k+1} \\ q_k & p_k \end{vmatrix} \text{ 的絕對值}$$

$$=\frac{1}{2}\left|p_kq_{k+1}-p_{k+1}q_k\right|=\frac{1}{2}\left|(-1)^k\right|=\frac{1}{2}$$

現象(3)的證明：

由第一節中，我們知道 $a=p_n$，$b=q_n$，且 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=1$（或是 -1），爲方便討論，不失一般性，我們假定是 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=1$，隨之，從同一節之(2)，便得到：

$$p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}=-1$$
$$p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}=1$$
$$p_{n-3}q_{n-4}-p_{n-4}q_{n-3}=-1$$
$$\vdots$$

於是 $aq_{n-2}-bp_{n-2}$

$$=a(q_n-a_nq_{n-1})-b(p_n-a_np_{n-1})$$
$$=(aq_n-bp_n)-a_n(aq_{n-1}-bp_{n-1})$$

$= 0 - a_n$

$= -a_n < 0$

並且 $|aq_{n-1} - bp_{n-1}| = 1 \leq a_n = |aq_{n-2} - bp_{n-2}|$

其次 $aq_{n-3} - bp_{n-3}$

$= a(q_{n-1} - a_{n-1}q_{n-2}) - b(p_{n-1} - a_{n-1}p_{n-2})$

$= (aq_{n-1} - bp_{n-1}) - a_{n-1}(aq_{n-2} - bp_{n-2})$

$= 1 + a_{n-1}a_n > 0$

並且 $|aq_{n-2} - bp_{n-2}| = a_n \leq 1 + a_{n-1}a_n = |aq_{n-3} - bp_{n-3}|$

同理，我們可以由 $aq_{k-2} - bp_{k-2} = a(q_k - a_kq_{k-1}) - b(p_k - a_kp_{k-1})$ $= (aq_k - bp_k) - a_k(aq_{k-1} - bp_{k-1})$ 逐步推得

$aq_{n-4} - bp_{n-4} < 0$

$aq_{n-5} - bp_{n-5} > 0$

$aq_{n-6} - bp_{n-6} < 0$

$\vdots$

及 $|aq_{n-3} - bp_{n-3}| \leq |aq_{n-4} - bp_{n-4}| \leq |aq_{n-5} - bp_{n-5}| \leq \cdots$

所以 $aq_k - bp_k$ 的值是隨 k 的接續遞增而正負相間，隨之，$aq_k - bp_k - 1$ 的值亦相對的正負相間，直到 $aq_{n-1} - bp_{n-1} - 1 = 0$，也就是說點 $p_k(q_k, p_k)$ 是在直線 $ax - by = 1$ 的兩側間隔躍動，且逐漸接近直線 $ax - by = 1$。

上面所說的現象(2)與現象(3)，其實指出了$\frac{a}{b}$的漸近分數$\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$，…，$\frac{p_n}{q_n}$ 出現的幾何意義。因此，如果我們改取 $a = \sqrt{\alpha}$，$b = 1$，其中α是一個非完全平方的正整數時，相對所得之$\sqrt{\alpha}$的有理近似值$\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$，…，$\frac{p_n}{q_n}$，… 便呈現出明白具體的幾何意義，而且此事與以牛頓法求$\sqrt{\alpha}$之近似值有着密切的關係，有關此點，將於另文中討論說明。

最後，我們附列兩個圖。（圖一）呈現出：在 a 與 b 是 Fibonacci 數列中的相鄰兩項 89 與 55 時，$\langle p_k \rangle$及$\langle q_k \rangle$都是 Fibonacci 數列。（圖二）則呈現出：點 p_k在直線 $ax - by = 1$ 的兩側間隔躍動。

（表一）

a	b				k		p (k)	q (k)	a*q(k)－b*p(k)
123	199	0.6180	0	1.6178	0		0	1	123
		1.6178	1	1.6184	1		1	0	－199
		1.6184	1	1.6170	2	0	0	1	123
		1.6170	1	1.6206	3	1	1	1	－76
		1.6206	1	1.6111	4	1	1	2	47
		1.6111	1	1.6363	5	1	2	3	－29
		1.6363	1	1.5714	6	1	3	5	18
		1.5714	1	1.75	7	1	5	8	－11
		1.75	1	1.3333	8	1	8	13	7
		1.3333	1	3	9	1	13	21	－4
		3	2	1	10	1	21	34	3
		1	1	9E+11	11	1	34	55	－1
		9E+11	9E+11	1.2890	12	2	89	144	1
		1.2890	1	3.4594	13	1	123	199	0

（表二）

a	b				k		p (k)	q (k)	a*q(k)－b*p(k)
123	44	2.7954	2	1.2571	0		0	1	123
		1.2571	1	3.8888	1		1	0	－44
		3.8888	3	1.125	2	2	2	1	35
		1.125	1	8	3	1	3	1	－9
		8	8	4E+13	4	3	11	4	8
					5	1	14	5	－1
					6	7	109	39	1
					7	1	123	44	0

（表三）

					k		p(k)	q(k)	x^2-a*y^2 =	
2.645	1	2.645	2	1.548	0		0	1	−7	
		1.548	1	1.822	1		1	0	1	
		1.822	1	1.215	2	2	2	1	−3	7
		1.215	1	4.645	3	1	3	1	2	
		4.645	4	1.548	4	1	5	2	−3	
		1.548	1	1.822	5	1	8	3	1	
		1.822	1	1.215	6	4	37	14	−3	
		1.215	1	4.645	7	1	45	17	2	
		4.645	4	1.548	8	1	82	31	−3	
		1.548	1	1.822	9	1	127	48	1	
		1.822	1	1.215	10	4	590	223	−3	
		1.215	1	4.645	11	1	717	271	2	
		4.645	4	1.548	12	1	1307	494	−3	
		1.548	1	1.822	13	1	2024	765	1	
		1.822	1	1.215	14	4	9403	3554	−3	
		1.215	1	4.645	15	1	11427	4319	2	

（表四）

					k		p(k)	q(k)	x^2-a*y^2 =	
3.605	1	3.605	3	1.651	0		0	1	−13	
		1.651	1	1.535	1		1	0	1	
		1.535	1	1.868	2	3	3	1	−4	13
		1.868	1	1.151	3	1	4	1	3	
		1.151	1	6.605	4	1	7	2	−3	
		6.605	6	1.651	5	1	11	3	4	
		1.651	1	1.535	6	1	18	5	−1	
		1.535	1	1.868	7	6	119	33	4	
		1.868	1	1.151	8	1	137	38	−3	
		1.151	1	6.605	9	1	256	71	3	
		6.605	6	1.651	10	1	393	109	−4	
		1.651	1	1.535	11	1	649	180	1	
		1.535	1	1.868	12	6	4287	1189	−4	
		1.868	1	1.151	13	1	4936	1369	3	
		1.151	1	6.605	14	1	9223	2558	−3	
		6.605	6	1.651	15	1	14159	3927	4	

（表五）

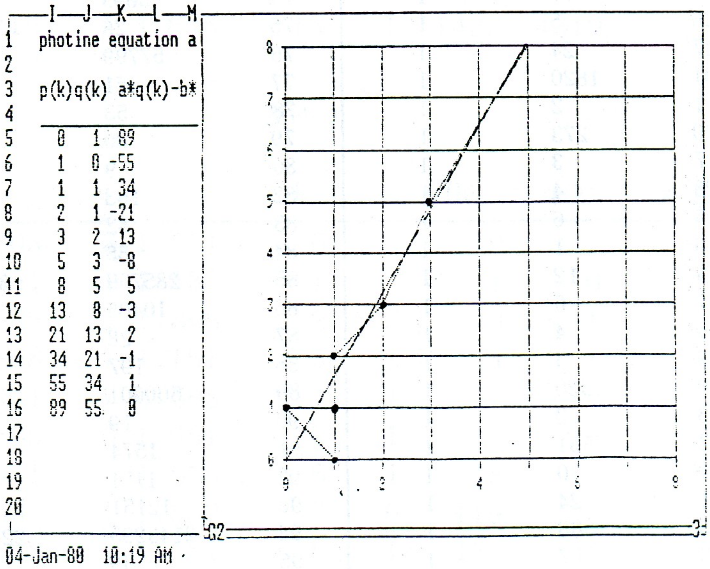
a	x	y	x^2-a*y^2=
2	3	2	1
3	2	1	1
5	9	4	1
6	5	2	1
7	8	3	1
8	3	1	1
10	19	6	1
11	10	3	1
12	7	2	1
13	649	180	1
14	15	4	1
15	4	1	1
17	33	8	1
18	17	4	1
19	170	39	1
20	9	2	1
21	55	12	1
22	197	42	1
23	24	5	1
24	5	1	1
26	51	10	1
26	26	5	1
28	127	24	1
29	9801	1820	1
30	11	2	1
31	1520	273	1
32	17	3	1
33	23	4	1
34	35	6	1
35	6	1	1
37	73	12	1
38	37	6	1
39	25	4	1
40	19	3	1
41	2049	320	1
42	13	2	1
43	3482	531	1
44	199	30	1
45	161	24	1
46	24335	3588	1
47	48	7	1
48	7	1	1
50	99	14	1
51	50	7	1
52	649	90	1
53	66249	9100	1
54	485	66	1
55	89	12	1
56	15	2	1
57	151	20	1
58	19603	2574	1
59	530	69	1
60	31	4	1
61	1766319049	226153980	1
62	63	8	1
63	8	1	1
65	129	16	1
66	65	8	1
67	48842	5967	1
68	33	4	1
69	7775	936	1
70	251	30	1
71	3480	413	1
72	17	2	1
73	2281249	267000	1
74	3699	430	1
75	26	3	1
76	57799	6630	1
77	351	40	1
78	53	6	1
79	80	9	1
80	9	1	1
82	163	18	1
83	82	9	1
84	55	6	1
85	285769	30996	1
86	10405	1122	1
87	28	3	1
88	197	21	1
89	500001	53000	1
90	19	2	1
91	1574	165	1
92	1151	120	1
93	12151	1260	1
94	2143295	221064	1
95	39	4	1
96	49	5	1
97	62809633	6377352	1
98	99	10	1
99	10	1	1

附註：從表五中可以發現：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \alpha = n^2-1\text{ 時，初始解為 }(n, 1)\\ (2) & \alpha = n^2-2\text{ 時，初始解為 }(n^2-1, n)\\ (3) & \alpha = n^2+n\text{ 時，初始解為 }(2n+1, 2)\end{array}\right\}\text{，其中 } n \geq 2\text{，}n \in N$$

a	b				k		p(k)	q(k)
89	55	1.618	1	1.617	0		0	1
		1.617	1	1.619	1		1	0
		1.619	1	1.615	2	1	1	1
		1.615	1	1.625	3	1	2	1
		1.625	1	1.6	4	1	3	2
		1.6	1	1.666	5	1	5	3
		1.666	1	1.5	6	1	8	5
		1.5	1	2	7	1	13	8
		2	1	1	8	1	21	13
		1	1	*****	9	1	34	21
					10	1	55	34
					11	1	89	55

（圖一）



（圖二）

註一、 關於此一事實，底下兩個定理給出了證明。

定理1：設 α 是非完全平方的正整數，且正整數對 (x_1, y_1) 滿足 $x_1^2-\alpha y_1^2=1$，若正整數對 (x_n, y_n) 滿足 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$，$n\in N$，則 $x_n^2-\alpha y_n^2=1$。

證　明：由 $\qquad x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$

可得到 $\quad x_n-y_n\sqrt{\alpha}=(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n$

上面二式相乘，得

$$x_n^2-\alpha y_n^2=(x_1^2-\alpha y_1^2)^n$$

已知 $\qquad x_1^2-\alpha y_1^2=1$

故 $\qquad x_n^2-\alpha y_n^2=1$

定理2：設 α 是非完全平方的正整數，若數對 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_k, y_k), \cdots$ 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的所有正整數解，其中，

$x_1<x_2<\cdots<x_k<\cdots;\quad y_1<y_2<\cdots<y_k<\cdots,$

則對任意正整數 n，恆有 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$。

證　明：(1) $\quad (x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n$

$=(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

$=[(x_nx_1-\alpha y_ny_1)+(y_nx_1-x_ny_1)\sqrt{\alpha}](x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

$=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

$$\left(\text{取}\begin{cases} x_nx_1-\alpha y_ny_1=a_1 \\ y_nx_1-x_ny_1=b_1 \end{cases}\right)$$

$=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2}$

$=[(a_1x_1-\alpha b_1y_1)+(b_1x_1-a_1y_1)^{n-2}$

$=(a_2+b_2\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2}$

$\vdots$

$$\left(\text{取}\begin{cases} a_1x_1-\alpha b_1y_1=a_2 \\ b_1x_1-a_1y_1=b_2 \end{cases}\right)$$

$=(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})$

$$\left(\text{取}\begin{cases} a_{n-2}x_1-\alpha b_{n-2}y_1=a_{n-1} \\ b_{n-2}x_1-a_{n-2}y_1=b_{n-1} \end{cases}\right)$$

我們得到整數對列 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_{n-1}, b_{n-1})$。

(2) $\quad a_1^2-\alpha b_1^2=(x_nx_1-\alpha y_ny_1)^2-\alpha(y_nx_1-x_ny_1)^2$

$$= (x_n^2 - \alpha y_n^2)(x_1^2 - \alpha y_1^2)$$
$$= 1$$

$$a_2^2 - \alpha b_2^2 = (a_1x_1 - \alpha b_1y_1)^2 - \alpha (b_1x_1 - a_1y_1)^2$$
$$= (a_1^2 - \alpha b_1^2)(x_1^2 - \alpha y_1^2)$$
$$= 1$$

同理，我們得到 $a_3^2 - \alpha b_3^2 = a_4^2 - \alpha b_4^2 = \cdots = a_{n-1}^2 - \alpha b_{n-1}^2 = 1$

(3) 由　$x_1^2 - \alpha y_1^2 = 1 = (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$

知　$x_1 - y_1\sqrt{\alpha} < 1$

隨之，由　$(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha}) = a_1 + b_1\sqrt{\alpha}$

知　$x_n + y_n\sqrt{\alpha} > a_1 + b_1\sqrt{\alpha}$ ……………… ①

另外，由　$x_n^2 - \alpha y_n^2 = 1 = a_1^2 - \alpha b_1^2$

$$\Rightarrow (x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_n - y_n\sqrt{\alpha})$$
$$= (a_1 + b_1\sqrt{\alpha})(a_1 - b_1\sqrt{\alpha})$$

便得　$x_n - y_n\sqrt{\alpha} < a_1 - b_1\sqrt{\alpha}$

即　$-x_n + y_n\sqrt{\alpha} > -a_1 + b_1\sqrt{\alpha}$ ……………… ②

①與②二式推知　$y_n > b_1$

再由　$x_n^2 - \alpha y_n^2 = 1 = a_1^2 - \alpha b_1^2$

$$\Rightarrow x_n^2 - a_1^2 = \alpha (y_n^2 - b_1^2)$$

推知　$x_n > a_1$　$\left\{\begin{array}{l} a_1 > 0 \\ b_1 > 0 \end{array}\right.$ 可從下面第(4)點得知)

同理，我們有 $\left\{\begin{array}{l} a_1 > a_2 \\ b_1 > b_2 \end{array}\right.$，$\left\{\begin{array}{l} a_2 > a_3 \\ b_2 > b_3 \end{array}\right.$，…，$\left\{\begin{array}{l} a_{n-2} > a_{n-1} \\ b_{n-2} > b_{n-1} \end{array}\right.$

(4) 點 $H_1 (x_1 , y_1)$ 及點 $H_n (x_n , y_n)$ 落在雙曲線 Γ : $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的第一象限部分，而直線 L : $x - \sqrt{\alpha}\ y = 0$ 是 Γ 的一條漸近線，因此，L 的斜率 > OH_n 的斜率 > OH_1 的斜率，即

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > \frac{y_n}{x_n} > \frac{y_1}{x_1}$$

因此， $\dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{y_n}{x_n} \cdot \dfrac{y_1}{x_1}$

$y_n x_1 - x_n y_1 > 0$

於是得到 $a_1 > 0$ ， $b_1 > 0$

但是已知 (x_1, y_1) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解

因此， $a_1 \geq x_1$ ， $b_1 \geq y_1$

同理，我們有 $\begin{cases} a_2 \geq x_1 \\ b_2 \geq y_1 \end{cases}, \begin{cases} a_3 \geq x_1 \\ b_3 \geq y_1 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} a_{n-1} \geq x_1 \\ b_{n-1} \geq y_1 \end{cases}$

綜合以上(1)、(2)、(3)及(4)點，我們得到數對 (a_{n-1}, b_{n-1}) ， (a_{n-2}, b_{n-2}) ，…， (a_1, b_1) ，它們都是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解，且滿足

$$\begin{cases} x_1 \leq a_{n-1} < a_{n-2} < a_{n-3} < \cdots\cdots < a_2 < a_1 < x_n \\ y_1 \leq b_{n-1} < b_{n-2} < b_{n-3} < \cdots\cdots < b_2 < b_1 < y_n \end{cases}$$

但是已知數對 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，…， (x_n, y_n) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的首 n 組正整數解，它們滿足

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n \\ y_1 < y_2 < y_3 < \cdots\cdots < y_{n-1} < y_n \end{cases}$$

因此而有 $(a_1, b_1) = (x_{n-1}, y_{n-1})$ ， $(a_2, b_2) = (x_{n-2}, y_{n-2})$ ，…， $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (x_1, y_1)$

從(1) $(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$

$= (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$

得 $(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$

$= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$

$= x_1^2 - \alpha y_1^2 = 1$

但是 $(x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n \cdot (x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$

$= (x_1^2 - \alpha y_1^2)^n = 1$

故得 $x_n + y_n\sqrt{\alpha} = (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n$

註二、 參見凡異出版，華羅庚著數論導引，第十章，§1。

註三、 由於Symphong本身計算的極限，如果n的取值過大，a_n的求值可能產生誤差。事實上，就分別與a、b有相同位數的兩數而言，在a與b是Fibonacci數列的相鄰兩項（其中a＞b）時，對應的n值為最大，理由是此時

$\alpha = \frac{a}{b} = [1, 1, 1, \cdots, 1]$。

註四、 同（註二），第十章，§2～§9。