用軟體 SYMPHONY 協助解不等式

葉東進

科學園區實驗高中

有些不等式的求解，必須區分成各種情況分別討論，既費時也費力；有些不等式，在某些問題的處理中居於關鍵地位，而我們並不能輕易地事先知道這些不等式是否成立。藉用 symphony 的繪圖功能，可以協助我們更容易地解決上述不等式的問題。底下舉出幾個例子，讀者可以舉一反三。

例 1. 設 x 爲實數，解 $x^2-2x-3>3|x-1|$。

利用 symphony，繪出兩條曲線

$C_1: y=x^2-2x-3$ 及

$C_2: y=3|x-1|$

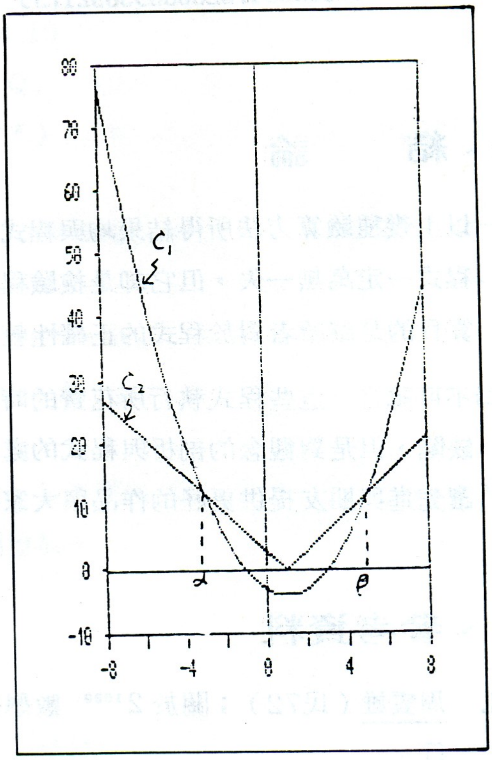
的圖形（圖一）。

求解 $x^2-2x-3>3|x-1|$ 的幾何意義便是找出 x 的範圍，使曲線 C_1 位在 C_2 的上方，由（圖一）知所求 x 的範圍是

$$x<\alpha \quad 或 \quad x>\beta$$

其中 α 是

$$\begin{cases} y=-3(x-1) \\ y=x^2-2x-3 \\ x<1 \end{cases}$$ 的 x 解；



圖一

β是

$$\begin{cases} y = 3(x-1) \\ y = x^2 - 2x - 3 \\ x > 1 \end{cases}$$ 的x解

所以，$\alpha = -3$，$\beta = 5$

故所求不等式之解為　　$x < -3$　或　$x > 5$

例 2.　設x為實數，$-5 \le x \le 5$，解 $\log_{14}(x^3 - 5x + 12) < 1$。

利用 symphony 繪出兩條曲線

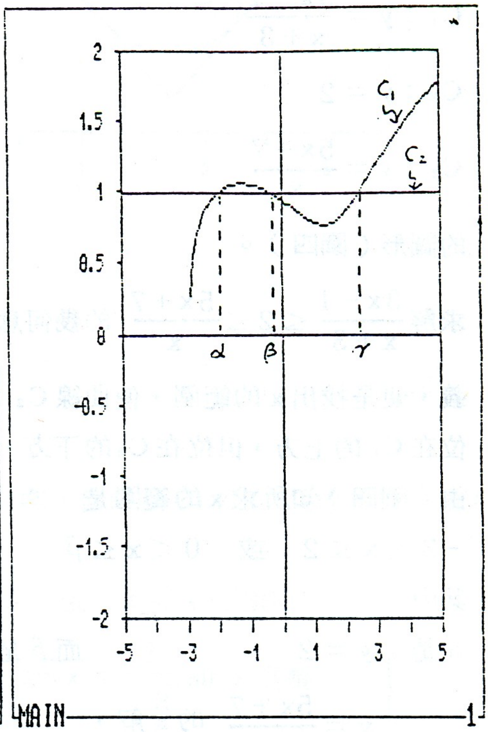
C_1：$y = \log_{14}(x^3 - 5x + 12)$　及

C_2：$y = 1$　　的圖形（圖二）。

	A	B	C
25	-2.8	0.529819	1
26	-2.7	0.667202	1
27	-2.6	0.759634	1
28	-2.5	0.827279	1
29	-2.4	0.879113	1
30	-2.3	0.919918	1
31	-2.2	0.952543	1
32	-2.1	0.978821	1
33	-2	1	1
34	-1.9	1.016963	1
35	-1.8	1.030363	1
36	-1.7	1.040688	1
37	-1.6	1.048317	1
38	-1.5	1.053546	1
39	-1.4	1.056612	1
40	-1.3	1.057706	1
41	-1.2	1.056985	1
42	-1.1	1.054579	1
43	-1	1.050598	1
44	-0.9	1.045135	1

MAIN

圖三



圖二

求解 $\log_{14}(x^3 - 5x + 12) > 1$ 的幾何意義便是找出x的範圍，使曲線 C_1 位在 C_2 的上方，由（圖二）知所求x的範圍是

$$\alpha < x < \beta \quad 或 \quad \gamma < x \le 5$$

其中 α, β, γ 則是

$$\log_{14}(x^3 - 5x + 12) = 1 的解（或是 x^3 - 5x + 12 = 14 的解）$$

但是由檔案數據（圖三）知 $\alpha=-2$

因此，$x^3-5x-2=(x+2)(x^2-2x-1)$

所以，$\beta=1-\sqrt{2}$，而 $\gamma=1+\sqrt{2}$

故不等式之解為

$$-2<x<1-\sqrt{2} \quad \text{或} \quad 1+\sqrt{2}<x\leq 5$$

例 3.　設 x 為實數，解 $\dfrac{3x-1}{x+3}\leq 2\leq\dfrac{5x+7}{x}$

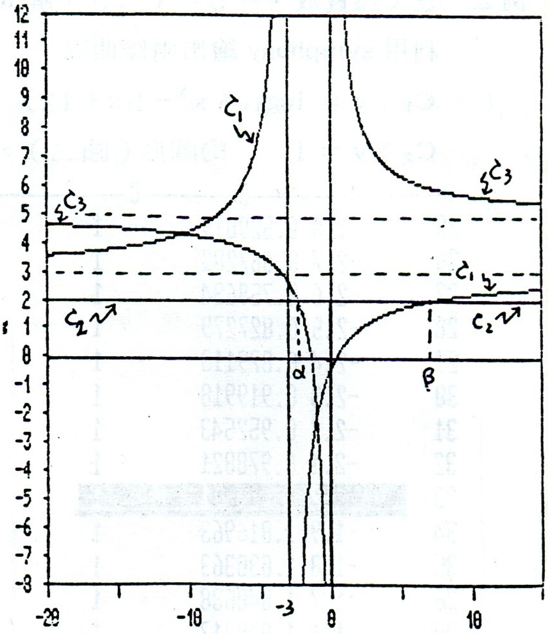
利用 symphony 繪出三條曲線

C_1 ： $y=\dfrac{3x-1}{x+3}$

C_2 ： $y=2$

C_3 ： $y=\dfrac{5x+7}{x}$

的圖形（圖四）。



圖四

求解 $\dfrac{3x-1}{x+3}\leq 2\leq\dfrac{5x+7}{x}$ 的幾何意義，便是找出 x 的範圍，使曲線 C_2 位在 C_1 的上方，但位在 C_3 的下方，由（圖四）知所求 x 的範圍是

$-3<x\leq 2$　或　$0<x\leq\beta$

其中

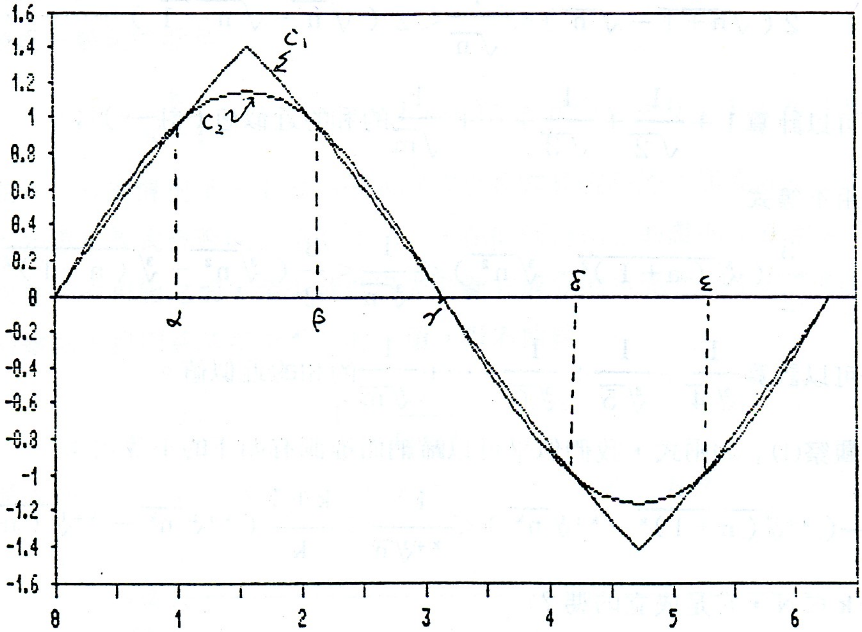
α 是 $\begin{cases} y=2 \\ y=\dfrac{5x+7}{x} \end{cases}$ 的 x 解，　而 β 是 $\begin{cases} y=2 \\ y=\dfrac{3x-1}{x+3} \end{cases}$ 的 x 解

所以，$\alpha=-\dfrac{7}{3}$，$\beta=7$

故不等式之解為

$$-3<x\leq-\frac{7}{3} \quad \text{或} \quad 0<x<7$$

例 4. 設 $0 \leq x \leq 360°$，解 $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}>\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x$。



圖五

利用 symphony 繪出兩條曲線

C_1：$y=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$

C_2：$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x$

的圖形（圖 5）。

求解原不等式的幾何意義便是找出 x 的範圍，使曲線 C_1 位在 C_2 的上方，由（圖五）知所求 x 的範圍是

$$\alpha < x < \beta \quad \text{或} \quad \gamma < x < \delta \quad \text{或} \quad \varepsilon < x < 360°$$

其中 $\alpha < 90°$ 且是 $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x$ 之解

由檔案資料可以看出 $\alpha=60°$，並由圖形的對稱性知

$$\beta=120°,\ \gamma=180°,\ \delta=240°,\ \varepsilon=300°$$

故不等式之解為

$$60° < x < 120° \quad \text{或} \quad 180° < x < 240° \quad \text{或} \quad 300° < x < 360°$$

例5.　設n爲正整數，利用不等式

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

我們可以計算$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}$的和的近似值（註一）；

而利用不等式

$$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2})<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\cdots\cdots(2)$$

我們可以計算$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$的和的近似值。

細心觀察(1)，(2)兩式，我們似乎可以歸納而推測有如下的不等式：

$$\frac{k+1}{k}(\sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k})<\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\frac{k+1}{k}(\sqrt[k+1]{n^k}-\sqrt[k+1]{(n-1)^k},$$

其中$k\in N$，它是成立的嗎？

把上面不等式作如下的分析：

$$\frac{k+1}{k}(\sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k})<\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\frac{k+1}{k}(\sqrt[k+1]{n^k}-\sqrt[k+1]{(n-1)^k})$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[k+1]{(n+1)^k}-\sqrt[k+1]{n^k}<\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}<\sqrt[k+1]{n^k}-\sqrt[k+1]{(n-1)^k}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\sqrt[k+1]{n^k}+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}>\sqrt[k+1]{(n+1)^k}\\ \sqrt[k+1]{n^k}-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[k+1]{n}}>\sqrt[k+1]{(n-1)^k}\end{cases}$$

（兩邊除以$\sqrt[k+1]{n^k}$）

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\frac{k}{k+1}}\\ 1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n}>(1-\frac{1}{n})^{\frac{k}{k+1}}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n})^{k+1}>(1+\frac{1}{n})^{k}\\ (1-\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{n})^{k+1}>(1-\frac{1}{n})^{k}\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因此，原不等式是否成立便等價於不等式(3)是否成立。

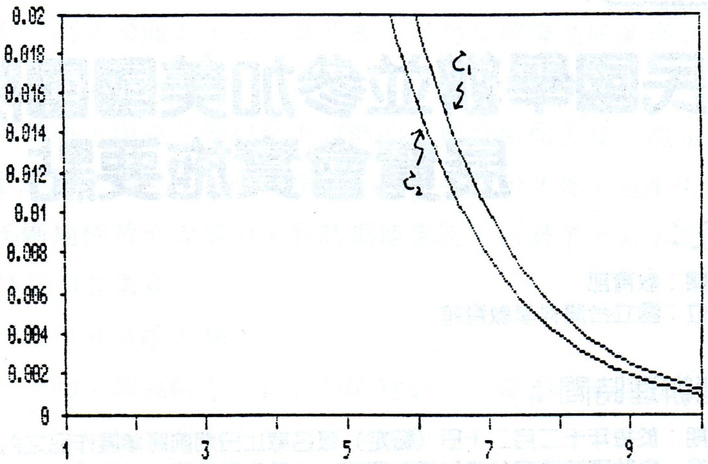
較為一般化的話是：

$$\left(1+\frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1}>(1+\alpha)^{k}\text{，其中 }\alpha\neq 0\text{，}1+\alpha>0\text{，}k\in N\text{，}$$

在 $\alpha>0$ 的情況下，上面不等式的成立是容易證明的；而在 $\alpha<0$ 時，我們甚至不知道不等式會否成立？（註二），在能夠提出它的證明（在本文中，這是另一回事）的可能之前，至少我們得先判斷它成立的可能性大不大？利用 symphony 的繪圖，我們嘗試幾個不同的 α 值，看看曲線

$$C_1：y=\left(1+\frac{x}{x+1}\alpha\right)^{x+1}$$

是否在 $C_2：y=(1+\alpha)^{x}$ 的上方？



圖六

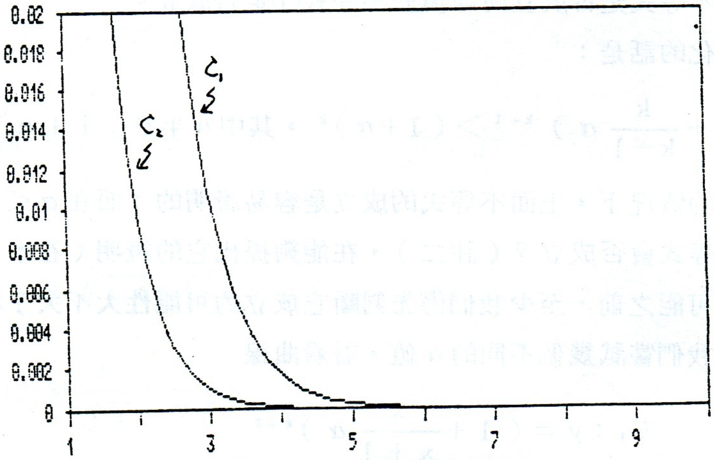
在（圖六）中，所取 $\alpha=-0.5$，（圖七）中，則取 $\alpha=-0.9$

從兩個圖形中，我們看出 C_1 總是在 C_2 的上方，這就帶給了我們認為不等式可能成立的信心，以此信心為基礎再設法去找出它的論理證明。

最後所舉的這個例子所顯示的探索過程應該也是一種數學實驗吧。

註一　數學趣味問題競試集，吳英格，徐氏基金會。

註二　高中數學的教與學，葉東進，九章。



圖七

科教簡訊

中華民國舉辦並參加美國國際科技展覽會實施要點

壹、辦理單位：

一、指導機關：教育部
二、主辦單位：國立台灣科學教育館

貳、國內展覽辦理時間：

一、報名日期：於每年十二月二十日（暫定）報名截止日期前將參展作品之內容摘要正本一份及影印本五份，掛號寄達國立台灣科學教育館。作品內容摘要之格式備索。
二、書面審查（第一階段評審）：於次年一月十日公佈審查結果。
三、國內展覽評審日期：1.第二階段評審：二月九日（暫定）。
2.第三階段評審：二月十日（暫定）。

叁、辦理時間及地點：由國立台灣科學教育館於報名前兩個月公佈。

肆、參展對象：

一、國中三年級學生。
二、高級中學一年級至三年級學生。
三、高級職業學校一年級至三年級學生。
四、高級進修補習學校一年級至三年級學生：年齡未超過二十一歲者。

（下轉 60 頁）