自然對數之旅

吳家怡 譯
臺北市師範學院

我是個高三的學生，才學完多項式的微分和積分，自認沒什麼微積分問題可以難倒我了，我非常喜歡釣魚，這天早上，趁著假日，租了條小船出去海釣。我正為自己這次的成果沾沾自喜，突然一場狂風巨浪吹翻了我的船，我就失去知覺了，等我醒來，只知道自己被一陣大浪沖到一個叫卡摩拉的奇怪小島上。

這個島國的居民和外界毫無連絡。他們正為找出了求面積的方法，十分興奮。

國王成立了一個微分和積分公司，為人民服務。

“現在我們幾乎可以做任何事情了！”紀陸遠吹牛道“我們會求面積；也能由位置求速度；由速度求位置或求切線斜率”。

以後幾天，生意十分興隆。直到有一天早晨，當我和紀陸遠在微分和積分公司辦公室時，卻第一次遇到了意想不到的麻煩。一位高高的，穿著高雅的男士走進來，紀陸遠在我身邊小聲地說：“這是我的鄰居，Q伯爵。等我們解決了他的問題，他大概會送我們一份大禮，足以維持公司好幾年的開銷。”

“我們能為您效勞嗎？”紀陸遠問，努力地想給伯爵一個好印象。

“我有個可怕的問題”伯爵說“我的女兒想要建一座實物大小的黑山，完全用珠子做的。我已經說服她改成原物的十分之一，但是還是需要大量珠子—四億克。”

紀陸遠大吃一驚，說：“四億克的珠子！”

“我建了一個大桶來裝它們。但是，你或許可以預料到，今早我女兒踢倒了桶子，現在那些珠子散落滿地。幸好你的小狗阿魯覺得撿珠子是件有趣的事，它今早開始玩這遊戲，它的精力可真不小，做得非常快”。

“問題是什麼呢？”紀陸遠緊張地問。

“我需要知道要多久牠才能把珠子撿完。起先那些珠子很容易撿，牠每分鐘可以撿

起許多珠子。珠子愈來愈少，很難撿到，牠就沒法再做得那麼快了，我算了一下撿的速度，我發現每小時可以撿起當時院中珠子的$\frac{1}{4}$。你覺得你能算出要多少時間才能做完嗎？”

“當然”紀陸遠驕傲地說“我們發明了積分，用一個這樣的符號：$\int$。假如你告訴我 dx/dt（也就是某一變數 x 對另一變數 t 的變率）。像你這情形 x 就表示某一時間院中剩下的珠子數。

如果你告訴我們 $dx/dt = f(t)$，其中 $f(t)$ 表示時間的函數，那麼我們很容易就可以求出 x 是什麼樣的 t 函數。”

$$dx = f(t)dt$$
$$\int dx = \int f(t)\,dt$$
$$x = \int f(t)\,dt$$

紀陸遠很得意能有機會炫耀一下他的知識，不過我可以看出伯爵已經不耐煩了。

“我們也可以這樣做，如果你告訴我們 $dx/dt = f(x)$”

$$dx/dt = f(x)$$
$$(1/f(x))\,dx = dt$$
$$t = \int 1/f(x)\,dx$$

“你這個情形是 $dx/dt = -(1/4)x$。所以讓我們做做看”紀陸遠說得很得意。

$$-4\,(dx/dt) = x$$
$$-4\,(1/x)\,dx = dt$$
$$\int -4\,(1/x)\,dx = \int dt$$

“然後用我們的完美積分公式 $\int dt = t + c$”紀陸遠繼續說，而且儘量讓伯爵覺得那名字有多偉大。

$$t = \int (-4)(1/x)\,dx$$

“然後根據我們的乘法公式”他繼續。

$$t = -4\int 1/x\,dx$$

“現在我們有指數公式可用了。”

$$t = -4\,(1/(-1+1))\,x^{-1+1} + C$$

當紀陸遠正要漂亮地結束這題時，他突然哽住了，臉冒冷汗，說不出話來，“正如我說的，這是很簡單，只需要代入的問題。”他突然轉身對我說“你何不告訴伯爵，爲什麼我們今天不能給他答案，要等到明天才行。”

我終於看出紀陸遠看到的了，我趕快說“我們得去吃中飯了。”

“現在吃中飯？”伯爵大叫道“才11點23分半？”

“我們一直在11點23分半準時吃飯”紀陸遠說。於是他迅速地拉下我們店面的簾子，結束營業，跑回宮去。

“快來幫忙呀！快來幫忙呀！立刻開會！”紀陸遠一面跑，一面喊。幾分鐘之內，我們全聚到主會議室裡。紀陸遠告訴大家發生的問題。

“指數公式在 $n=-1$ 時，不成立！”他叫道“我一輩子也沒這麼丟臉過。”

“安靜一下”教授說“我相信我們能解決這個問題。阿板，請把指數公式寫出來”

$$\int x^n dx = (1/(n+1))\,x^{n+1} + C$$

“你試試 $n=-1$ 看！”紀陸遠喊道。

“你就得到1/0乘以 x^0，等於1/0乘以1，也就是1/0”教授說。

“可是這沒有意義呀！”國王反對道“我們研究代數的時候就知道了。”

“而且我們也看得出它不對！”單角說“很明顯的，$d/dt(1/0)$ 不等於 $1/x$。”

“我們最好在指數公式上加個條件”國王說。

一、指數公式

$$\int x^n dx = (1/(n+1))\,x^{n+1} + C \quad 若\ n \neq -1$$

這表示沒有東西的微分是 x^{-1} 囉！”教授說“如果沒有 $\int x^{-1}dx$ 這樣的函數存在，我看不出爲什麼要煩惱這個問題。”

“但是一定有這函數呀！”紀陸遠告訴她。他把珠子的問題解釋一遍。他還說如果我們天黑前能找到這問題的答案，或許會收到一份大禮。

“或許我們可以用定積分來幫我們解決問題。”國王說“我們發現積分可以代表曲線下的面積，所以讓我們畫出曲線，求出下面的面積。”

阿板畫出函數 $f(q)=1/q$ 的圖形（圖9－1）。

“我知道這個定積分的意思”教授說。

$\int_a^b f(q)dq=\int_a^b (1/q)dq$ ＝介於q軸上方，$f(q)=1/q$ 下方直線 $q=b$ 左側，直線 $q=a$ 右側。

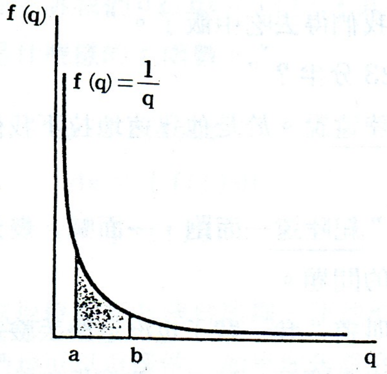


圖9－1

“它的積分函數一定存在！”紀陸遠說“那個區域的面積很明顯的是個實數，如果你要量它是可以量出來的。”

“我們所要做的是建一個神秘函數，來表示這面積，然後研究它有些什麼性質”教授說“如果我們能找到一個函數表示這部分的面積，那也就找到了反導數函數了。”

“這是根據微積分基本定理。”紀陸遠補充道。

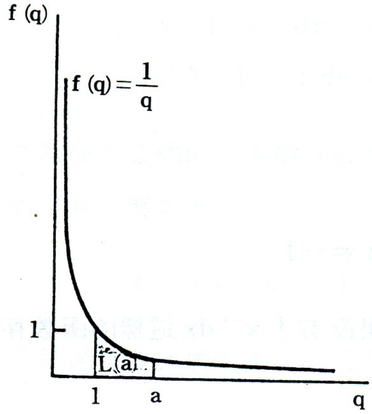


圖9－2

“我們該把左界固定”國王說“這樣面積就變成只有一個變數（只有右界變動）的函數了。”

我們決定限制左界爲 $q=1$，因爲如果把左界定爲 $q=0$，這神秘函數就會有些怪現象（圖9－2），我建議用L來代表這個神秘函數。於是我們定義：（見圖9－2）

$$L(a)=\int_1^a (1/q)\,dq$$

“我們怎麼知道它是那個函數呢？”單角問。

“我建議我們應該先找出它的性質”教授說“有誰看出這神秘函數有什麼性質嗎?”

“我看出一個明顯的性質”國王回答“看起來L(1)＝0。”

“這至少是個起步。”教授說。

“我們還可以說a大於1時，L(a)大於0”紀陸遠說。

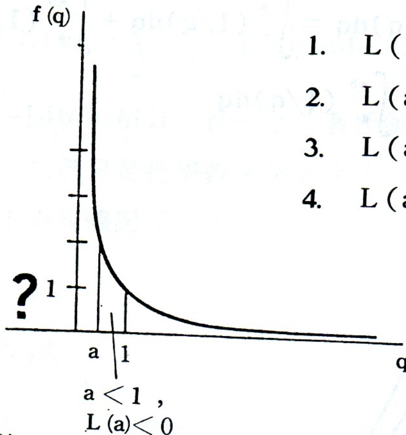
“由於我們給面積加了符號，當a小於1時，L(a)小於0”單角補充道。（見第八章習題8－22）。

“如果a小於或等於0呢？”紀陸遠問道。

“那就爆炸啦！”教授說“你沒法定義這面積。所以我們就不定義a小於0時的情況。”

我們把找出的性質列成一個表（圖9－3）。

二、L(a)的性質



1. $L(1)=0$
2. $L(a)>0$ 如果 $a>1$
3. $L(a)<0$ 如果 $0<a<1$
4. $L(a)$ 未定義，如果 $a\leq 0$

a＜0時，L(a)未定義

圖9－3

“有人認得這些性質嗎？”教授問。

“我認得！”國王說“它們看來挺眼熟的！它叫什麼來著？我怎麼一下想不出來了”

其他人都想不出什麼代數或三角函數有這些性質，不過單角想到一個方法可以算L(a)的值。

“記得我們創造我的函數—三角函數的時候嗎？我們覺得它們比一般函數複雜，所以我們建了皇家三角形，以便求任何角的sin，cos，tan值。等我們做好三角形，我們

又把那些值畫成一個函數表，這樣我們只要查表就可以求出任何三角函數值。現在我們只需要造個求L(a)的東西，然後做個函數表。我們何不請老趙造個水池，中間有個活動牆（圖9－4）。他只要把牆放在不同的a值，然後量池中水量就好了。”

老趙被喚進會議室。我們告訴他這個計劃有多緊急，他答應派最好的工匠，立刻動手做。

他走出去時，教授在他身後嚷道：“要注意那池子得很準確”

我們一面吃中飯，一面等老趙把數據拿來。過了一會，我們決定再多研究些性質。我們試著找L(a+b)，(a，b為任意二數)，但不久就放棄了。我們很快就發現L(a+b)≠L(a)+L(b)。（只要試a＝b＝1就知道了）。但卻想不出任何能成立的式子”。我們決定去找L(ab)。

$$L(ab)=\int_1^{ab}(1/q)\,dq$$

“我知道怎樣化簡這式子”國王說。

$$L(ab)=\int_1^{ab}(1/q)dq=\int_1^{a}(1/q)dq+\int_a^{ab}(1/q)dq$$
$$=L(a)+\int_a^{ab}(1/q)dq$$

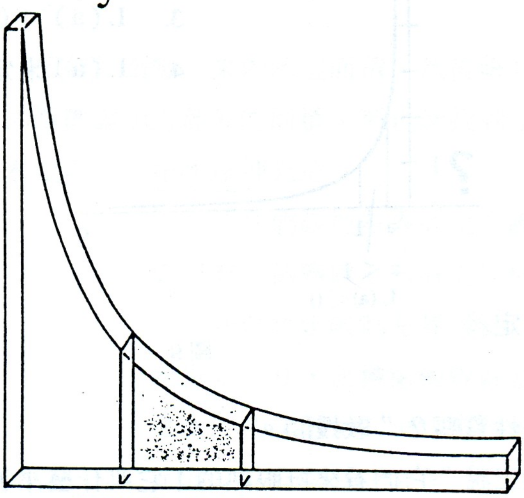


圖9－4

“這有什麼用？”教授說“我們還是不知道第二項”。

“如果我們能把下界 a 改爲 1，就好些了”紀陸遠說。

“或許可以”國王說“我們可以用代入法，不用 q 作變數而改用其他變數。”

紀陸遠建議用 $u=q/a$，$q=au$

$$L(ab)=L(a)+\int_{q=a}^{q=ab}(1/au)\,dq$$

“現在我們又麻煩了。因爲被積分的函數，變數是 u，而界值和 d- 變數，兩項都還是 q 的函數。”

“我們就必須把它們也改爲 u 的函數”國王說“由 $q=au$，我們知道 $dq=a\,du$”

“我看不出如果我們把界值也改成 u 有什麼不對。”紀陸遠接著說“如果 $u=q/a$，那 $q=b$ 時 $u=b$，$q=a$ 時 $u=1$”。

我們將這些值代入

$$\begin{aligned}L(ab)&=L(a)+\int_{q=a}^{q=ab}(1/au)\,dq\\&=L(a)+\int_{u=1}^{u=a}(1/au)\,a\,du\end{aligned}$$

“你確定這和我們一開始的積分一樣嗎？”教授懷疑地問。

“應該是”國王說“我們只是把變數換個名字”。

我們把定積分代換法的步驟記了下來。

三、定積分代換法

有些積分可以用 u 代替原有的變數，使積分簡化些。

下面三個地方必須代換：

1. 被積分函數應以新變數 u 表示。
2. 微分的 d- 變數，必須寫成新變數 du 。
3. 兩個上下界值必須由 q 值換成 u 值。

“我們現在做到那了？”紀陸遠問。

$$L(ab)=L(a)+\int_{1}^{b}(a/au)\,du$$

“我們可以消去a”教授建議道。

$$L(ab)=L(a)+\int_1^b (1/u)du$$

“我們知道第二項是什麼了！”她突然說“就是L(b)的定義呀！”

$$L(ab)=L(a)+L(b)$$

“這函數竟然有這麼簡單的性質。”教授說。

“我們以前沒見過這性質嗎？”紀陸遠一面說，一面翻他的老代數書。

“我認出它了！”國王開心地拍手道“記得對數函數嗎？”

“對數函數！”教授很恭敬地說。

“對數函數！”紀陸遠也驚訝地說“什麼是對數函數呀？”

“你不記得啦！”教授帶著責備的口氣說“我們曾經說，若 $y^x=a$ 則 $x=\log_y a$（這表示x是以y為底，a的對數）”教授翻出書中講對數函數的部分。

“喲！現在我記起來了”紀陸遠說。（卡摩拉的人曾經整理了一套很完整的對數函數性質。如果你也忘了，可以找出高一課本看看）。

“而對數函數正具有這神秘函數需要的所有性質”國王指出。

$$\log 1=0$$

$$\log a>0 \quad 若\ a>1$$

$$\log a<0 \quad 若\ 0<a<1$$

$$\log a\ 未定義 \quad 若\ a\leq 0$$

$$\log(ab)=\log a+\log b$$

“但是對數函數還有些其他性質”紀陸遠說“我們必須給它一個底數。我們還說，如果只寫 log a，未註明底數，表示以10為底，稱為常用對數。但是我們可以選任何底：$\log_2 a$；$\log_{100} a$；或其他底都可以。”

“除了1以外。”教授補充道。

“對！”紀陸遠說“我們發現沒有所謂以1為底的對數 $\log_1 a$，但是我們還是不知道L(a)該以什麼為底。”

“我們得等到老趙把數據拿來”國王說“那樣我們就能確定它的底數了。”

“我希望是個容易的數，像2呀，3呀”紀陸遠說“在找到這個底數之前，我們得

先想個符號代表它。”

他們又看著我，我只好建議叫它 e！

“我們還得檢查一下”教授說“你說把 1/x 函數積分得到一個對數函數。如果這是對的，那把對數函數微分就會得到 1/x ”。

於是我們開始微分對數函數：

$$y = \log_e x$$
$$y + \Delta y = \log_e (x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \log_e (x + \Delta x) - \log_e x$$

“我們老早就該這樣做了。”紀陸遠評論道“我以為我們已經把每個可能的函數都微分了。我竟然忘了對數函數。”

“這兒我們可用對數的性質”國王說“記得 $\log a - \log b = \log (a/b)$ 嗎？”

$$\Delta y = \log_e((x + \Delta x)/x)$$

“我們最好兩邊除以 Δx ”教授說“那似乎是微分這種情況的基本作法”。

$$\Delta y/\Delta x = \log_e(1 + \Delta x/x)/\Delta x$$

“現在我們被卡住了”紀陸遠說。

我們被困了幾分鐘，突然我有了個想法“我們既然希望答案是 1/x，我們何不分子分母同乘以 x？這樣我們至少有個 x 在分母。”

“反正沒什麼壞處”紀陸遠說。

$$\Delta y/\Delta x = (x \log_e(1 + \Delta x/x))/x\,\Delta x$$
$$= (1/x)(x/\Delta x)\log_e(1 + \Delta x/x)$$

“現在我們該在兩邊加個 lim，讓 Δx 趨於 0 ”紀陸遠說。

$$\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0}(1/x)(x/\Delta x)\log_e(1 + \Delta x/x)$$

紀陸遠希望有簡單點的寫法，所以我們讓 $w = \Delta x/x$，所以微分式子就變成

$$dy/dx = (1/x)\lim_{w \to 0}(1/w)\log_e(1 + w)$$

“我想起對數的另一個性質”教授說“我們曾發現 $n\ \log_e x = \log_e x^n$”

$$dy/dx = (1/x) \lim_{w\to 0} (\log_e (1+w)^{1/w})$$

$$= (1/x) \log_e (\lim_{w\to 0} (1+w)^{1/w})$$

“我有個想法”紀陸遠說“如果我們可以讓這項古怪的 $\log_e \lim_{w\to 0} (1+w)^{1/w}$ 等於 1，那麼我們就得到我們要的答案 $dy/dx = 1/x$ 了。”

“當然”教授說“可是我們不能就這樣說它是1呀！”

“他有點道理”國王喊道“我們或許能用這式子找出那神秘數e呢！記得 $\log_{\text{某數}}$（某數）= 1 永遠成立嗎？如 $\log_2 2 = 1$；$\log_{10} 10 = 1$；$\log_{17} 17 = 1$，因為 $2^1 = 2$；$10^1 = 10$；$17^1 = 17$，所以我們可以說 $\log_e e = 1$。而我們又要 $\log_e \lim_{w\to 0} (1+w)^{1/w} = 11$，也就是說 $\lim_{w\to 0} (1+w)^{1/w} = e$ 呢！”

“當然！”紀陸遠說“這個神秘的老e被極限用詭計給抓住啦！”

“我們能算出它嗎？”教授問。

“這只是算術的問題”國王說“如果 $w = 0$，我們無法求e。那樣 $e = 1^{\infty}$，一點用也沒有。但是我們可以當w值離0很近時，求e之值。”

阿板和紀陸遠很快就弄出一張表（表9－1）。

表9－1

w	$(1+w)^{1/w}$
0.5	2.25
－0.1	2.5937
0.01	2.7048
0.0001	2.7181
－0.001	2.7196
－0.01	2.7320
－0.1	2.8680

“正如我所擔心的！”紀陸遠傷心地說“你看，e結果是介於2.7181和2.7196之間的數。”

“可是為什麼呢？”國王問“2.718附近有什麼特別的數嗎？我想不出什麼原因。”

“它一定是個無理數”單角評論道“我不覺得你能夠找到它的正確值。就像大部分的三角函數值一樣。”

“還有什麼其他像這樣的數嗎？”國王煩惱地問。他一直相信他該做個公正的統治者，所以他比別人更擔心要選那一個數來做L(x)函數的底數。

“我只能想到另外一個情形”教授鄭重地說“當我們求圓周時，我們發現圓周為

2 π r （ r 爲半徑），有一個特別的數，我們叫它 π。它似乎在每個圓中都出現。”

“我記得求 π 的小數近似值時”紀陸遠補充道“我們得到 π ＝ 3.141592654 。教授說如果我們願意，我們可以求幾千位。不過我可先說好，除非有幾千個好理由，我絕不算到幾千位。”

“我們當時還說我們找到一個重要的無理數”教授說“我以爲 π 是唯一的，現在我們得添上 e 了。”

紀陸遠在他的大書中加上 e ＝ 2.178 …

“別扯到旁邊去了”單角警告我們“別忘了我們還得等老趙把 L(x)函數的數據拿來呢。照你們的說法，那 $L(x) = \log_e x = \log_{2.178} x$ ，則 L(e)＝L（2.718）必爲 1 。如果老趙拿來的是另一個數，我們就完了。”

我們緊張地等著老趙送的數據。但是沒有人催他，因爲我們知道他要做的是件很精確的工作。終於聽到敲門聲，老趙喘著氣走進來說：“這張數據大概是你們能得到的所有數值了”。他顯然累得半死。

“把 2.65 和 2.75 之間的值唸出來”教授要求他道。老趙顯然很困惑，怎麼要這麼奇怪的數。不過他還是唸了。（表 9 － 2 ）

“對啦！”教授興奮地說“ L(x)眞的在 2.71 和 2.72 之間等於 1 。正如我們希望的。所以 L(x)一定是那個對數函數。”

我們最好把這公式寫下來”紀陸遠說“首先我們得想個簡單的方法寫這個函數。我們以 log x 代替 $\log_{10} x$ ， 讓我們也想個東西代替 $\log_e x$ ”

“我們可以寫 $\log_e x = \ln x$ ”國王建議道“我不知道爲什麼，不過看起來很漂亮。”

“反正字母少些總好”紀陸遠說“我們還得爲以 e 爲底的對數想個名字”。我建議叫它自然對數，因爲它似乎是我們研究積分時自然冒出來的。

表 9 － 2

x	L(x)
2.65	0.975
2.66	0.978
2.67	0.982
2.68	0.986
2.69	0.990
2.70	0.993
2.71	0.997
2.72	1.001
2.73	1.004
2.74	1.008
2.75	1.012

四、一個數的自然對數

$$x \text{ 的自然對數} = \ln x = \log_e x = \int_1^x (1/t)\,dt \quad (e = 2.718\cdots)$$

五、指數積分公式——第一修正公式

$$\int x^n dx = (1/(n+1))\,x^{n+1} + C \qquad 若\ n \neq -1$$
$$= \ln|x| + C \qquad 若\ n = -1$$

（我們後來研究了 x 是負時，會怎樣。負數的對數沒有定義，但我們還是取 x 的絕對值）

“我們也可以寫出定積分的公式”教授說。

$$\int_a^b x^{-1} dx = \ln b - \ln a$$

“不，我們知道不定積分和定積分的關係一直成立，所以我們不必把每一個公式用不定積分寫一遍，又用定積分寫一遍。”紀陸遠堅決地說。

我們回頭討論伯爵的問題。

$$t = -4\int x^{-1} dx$$，它的初值是 $t = 0$ 時 $x =$ 四百萬

“我們立刻就可以解出來”教授說。

$$t = -4 \ln x + C$$

“用初值代入，得到下式”

$$0 = -4 \ln(\text{四百萬}) + C$$
$$C = 4 \ln(\text{四百萬})$$

“老趙，你可以告訴我 ln（四百萬）是多少嗎？”國王問。

老趙看來十分驚訝，不過幾分鐘後他拿著答案從他的對數池子回來。

$$\ln(\text{四百萬}) = 15.2$$
$$C = 4 \times 15.2 = 60.8$$

“所以 x 等於 0 時，t 等於多少？”紀陸遠說“這就可以告訴我們阿魯要花多少時間才能把珠子都撿起來。”

$$t = -4 \ln x + 60.8$$

“等一下”教授反對道“我們說過沒有L(0)或 $\log_{\text{任何數}} 0$ 存在。這表示 ln 0不存在。”

“這表示阿魯永遠沒法撿完珠子！”單角驚慌地說。

“當然啦！”國王說“伯爵告訴我們，阿魯只能撿起地上剩下珠子的1/4。這樣，它自然永遠沒辦法撿完。即使只剩下1克珠子，它也只能撿1/4”。

“別太挑剔”紀陸遠很不禮貌地說“如果阿魯還剩1克珠子，我一定親自把剩下的撿起來。”

我們很容易地算出 x = 1時，t 的值。

$$t = -4 \ln 1 + 60.8 = 60.8 \text{ 小時。}$$

“這表示兩天半”紀陸遠說“不錯啦！想想一開始有多少珠子！”紀陸遠跑出去，把答案告訴伯爵。當然伯爵給了我們一份很好的禮物，以酬謝我們提供的答案。我們一直很詫異，這次研究竟然帶我們走了這麼奇怪的路。

“夢曉生！”突然我聽到老師叫我的名字。天呀！我不是被大浪沖上了卡摩拉，而是被睏浪沖進了夢鄉。“這個函數 1/x 的積分是什麼？”我順口答道“ ln x ”。全班同學都非常佩服地看著我，他們大概想我一定昨晚補習太累了，才睡著的。

摘譯自“ Calculus by discovery ”

By D. Downing