平方根求單位長

陳廷圭
花蓮縣立新城國中

一、研究動機

在國中數學課本第三冊第十三頁談到「多少公分的平方是16平方公分」，即「什麼數的平方是16」，我們得到±4，又第七十八頁商高定理，已知直角△兩邊長，由列式開方，可得第三邊長，是否所有整數的平方根長（註：整數所對應數線上的長），我們均可得到？反過來，若我們知道一整數的平方根（若爲無理數）長是否能求得有理數單位長？

二、研究目的

在作圖法中能快速的由有理正整數長求得另一正整數的平方根長，且由正整數的平方根（若爲無理數）長求得有理數單位長，並能由一平方根（若爲無理數）長，求得另一平方根（可能亦爲無理數）長。

三、研究過程

問題一

已知：單位長1

求作：$\sqrt{A}$，A爲整數

研究1-1

直角△兩邊長爲有理數時，得到的第三邊長，往往爲無理數。

例 1. 已知：直角△ a , b 分別爲其一股，一斜邊

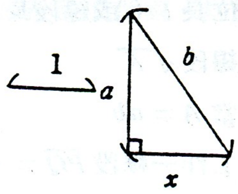
求解：第三邊長

解：由商高定理得 $x=\sqrt{b^2-a^2}$

例 2. 已知：直角△ a , b 爲兩股

求解：第三邊長

解：由商高定理得 $x=\sqrt{a^2+b^2}$



圖(一)

研究 1-2

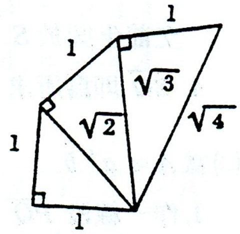
當 $a=b=1$ 爲直角△兩股時，斜邊長爲 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$

由此類推 $a=\sqrt{2}$, $b=1$ 時可得 $\sqrt{3}$ 長

$a=\sqrt{3}$, $b=1$ 時可得 $\sqrt{4}$ 長

⋮　　⋮　　⋮

$a=\sqrt{A-1}$, $b=1$ 時可得 $\sqrt{A}$ 長



圖(二)

研究 1-3

求 $\sqrt{A}$ 時，需用上述方法經過 $A-1$ 次作圖可得。

結論一

任何正整數的平方根長均可利用商高定理經過 $A-1$ 次作圖求得。

問題二

可否利用簡單代數證明求得快速作圖法？

研究 2-1

任何正整數 A，均可表示成 $A=ab$ ， a , $b\in N$

解：當 A 爲質數時，至少可表示成 $A=A\times 1$

研究 2-2

若 $A=ab$ ，由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ～ ①

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ～ ②

再由①－②，可得 $4A=4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

∴ $4A$ 必能表示成兩個有理數的平方差

研究 2-3

若 $A=ab$ ， A 亦可化爲兩數平方差

解：由上式兩邊除以 4 ， $A=ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

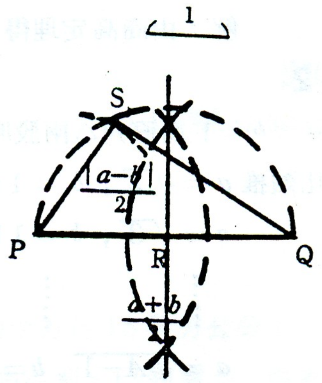
研究2－4

已知：單位長1（或線段長A） $A\in N$ 1

求作：一線段$\sqrt{A}$

作法：㈠當$A=ab$

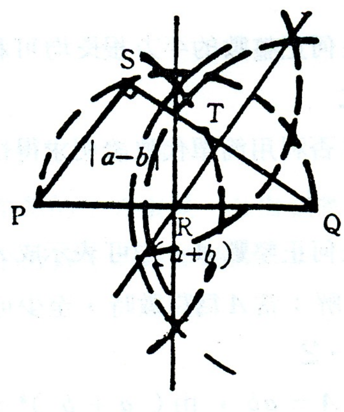
1. 作一線段$\overline{PQ}=\dfrac{a+b}{2}$，求中點$R$
2. 以R爲圓心，$\dfrac{\overline{PQ}}{2}$爲半徑畫半圓
3. 以P爲圓心，$\dfrac{|a-b|}{2}$爲半徑畫弧交前半圓於S，連接$\overline{SQ}$
4. $\overline{SQ}$即爲所求$\sqrt{A}$



圖㈢

㈡當$A=a'b$

1. 作一線段$\overline{PQ}=a+b$，求中點R
2. 以R爲圓心，$\dfrac{\overline{PQ}}{2}$爲半徑畫半圓
3. 以P爲圓心，$|a-b|$爲半徑畫弧交前半圓於S，連接$\overline{SQ}$
4. 取$\overline{QS}$中點T
5. $\overline{QT}$即爲所求$\sqrt{A}$



圖㈣

證明：㈠ 1. 半圓圓周角必爲直角

2. 由商高定理

$$\overline{QS}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{ab}=\sqrt{A}$$

㈡ 1. 半圓圓周角必爲直角

2. 由商高定理

$$QS=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=\sqrt{4ab}=2\sqrt{A}$$

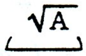
$$\therefore\ \overline{QT}=\frac{1}{2}\overline{QS}=\sqrt{A}$$

結論二

任何正整數A均可表示成$a \times b$，不管a，b各爲奇數或偶數，均能快速用上法一次完成求得$\sqrt{A}$

問題三

已知：$\sqrt{A}$，A爲正整數



求作：單位長1（或A）

研究3-1

直角△，兩股長a，b分別爲$\sqrt{A}$時，斜邊長爲$\sqrt{(1+1)A}=\sqrt{2A}$

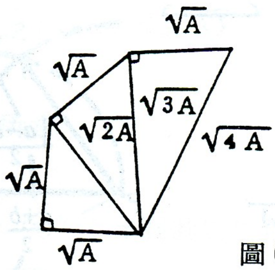
由此$a=\sqrt{2A}$，$b=\sqrt{A}$時，可得$\sqrt{(2+1)A}=\sqrt{3A}$

$a=\sqrt{3A}$，$b=\sqrt{A}$時，可得$\sqrt{(3+1)A}=\sqrt{4A}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$a=\sqrt{(A-1)A}$，$b=\sqrt{A}$時，可得$\sqrt{(A-1+1)\times A}$

$=\sqrt{A^2}=A$



圖(五)

研究3-2

求A時，要經上述方法作圖$\dfrac{A^2-A}{A}=A-1$次

研究3-3

將A分成A等分，即得單位長1

結論三

任何整數的（無理數）平方根均可用畝高定理經過$A-1$次作圖，求得有理數長A，從而取得其單位長1

問題四

可否仿照問題二，快速解決由無理數長$\sqrt{A}$（$A \in N$），求得有理數長A（或單位長1）

研究4-1

由問題二，得知任何正整數A均可表示成$A=a\times b$，a，$b\in N$

其中$A=ab=(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2$

或$4A=4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$想到

若以$\frac{a+b}{2}\sqrt{A}$，$\frac{a-b}{2}\sqrt{A}$分別爲直角△的斜邊和一股，則另一股爲

$\sqrt{(\frac{a+b}{2}\sqrt{A})^2-(\frac{a-b}{2}\sqrt{A})^2}=\sqrt{[(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2]A}$

$=\sqrt{A^2}=A$

若以$(a+b)\sqrt{A}$，$(a-b)\sqrt{A}$分別爲直角△的斜邊和一股，則另一股爲

$\sqrt{[(a+b)\sqrt{A}]^2-[(a-b)\sqrt{A}]^2}=\sqrt{[(a+b)^2-(a-b)^2]A}$

$=\sqrt{4}\ A=2A$

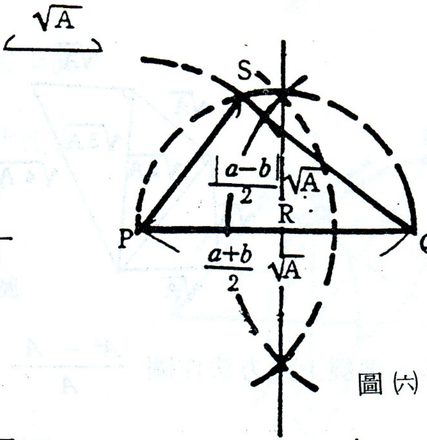
研究4-2

已知：一線段長$\sqrt{A}$，$A\in N$

求作：線段長A

作法：(一)$A=ab$

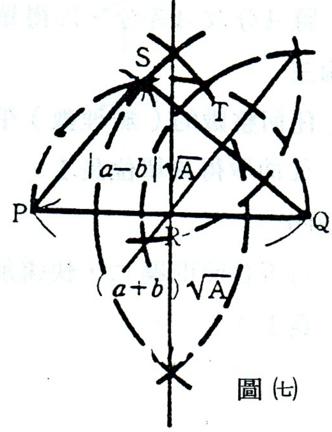
1. 依一線段$\overline{PQ}=\frac{a+b}{2}\sqrt{A}$
求中點R
2. 以R爲圓心，$\frac{\overline{PQ}}{2}$爲半徑
畫半圓
3. 以P爲圓心，$\frac{|a-b|}{2}\sqrt{A}$
爲半徑畫弧交前半圓於S，連接$\overline{SQ}$
4. $\overline{SQ}$即爲所求



圖(六)

(二)$A=ab$

1. 作一線段$\overline{PQ}=(a+b)\sqrt{A}$，
取中點R，
2. 以R爲圓心，$\frac{\overline{PQ}}{2}$爲半徑
畫半圓



圖(七)

3.以 P 爲圓心，$|a-b|\sqrt{A}$ 爲半徑畫弧交前半圓於 S，連接 $\overline{SQ}$

4.取 $\overline{QS}$ 中點 T

5. $\overline{QT}$ 即爲所求

證明：由研究 4－1

研究4－3

已知：一線段長 $\sqrt{A}$（$A\in N$）

求作：單位長 1

作法：由研究 4－2 所得 A 長配合如下作法：

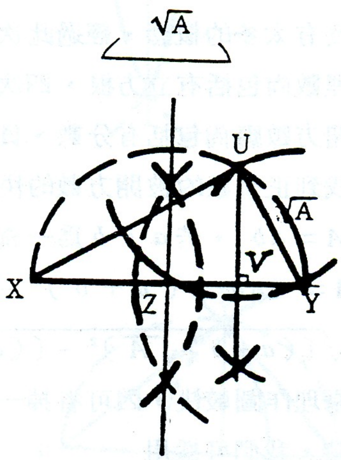
1.作一線段長 $\overline{XY}=A$，取中點 Z

2.以 Z 爲圓心，$\dfrac{\overline{XY}}{2}$ 爲半徑畫半圓

3.以 Y 爲圓心，$\sqrt{A}$ 爲半徑畫弧交前半圓於U

4.過 U 作 $\overline{XY}$ 的垂直線交 $\overline{XY}$ 於 V

5. $\overline{VY}$ 即爲所求



圖(六)

證明：1.連接 $\overline{XU}$

2. $\angle XUY=90°$（半圓圓周角必爲直角）

3. $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{UY}}=\dfrac{\overline{UY}}{\overline{VY}}$（直角△母子相似性質）

4. $\dfrac{A}{\sqrt{A}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\overline{VY}}$，即 $\overline{VY}=\dfrac{A}{A}=1$

結論四

任意正整數的平方根（可能爲無理數）長，均可利用上述方法一次完成，求得此整數長及單位長 1

問題五

已知：一線段長 $\sqrt{A}$，$A\in N$

求作：另一線段長 $\sqrt{B}$，$B\in N$

作法：設 $B=c\times d$ 用圓規量取由問題五所得單位長 1，在兩直線上各作出 c，d

次弧，即得 c ，d 長，再由問題二的方法求得 $\sqrt{B}$ 長

結論五

任意正整數的平方根（可能爲無理數）長，可利用上述方法迅速求得另一平方根（亦可能爲無理數）長

四、討　　論

1. 實數系中分爲有理數系和無理數系，學生們普遍對日常生活中所存在的無理數，並沒有太多的概念，經過此次研究，學生們更清楚了無理數長的具體存在。
2. 無理數尚包括有立方根，四次方根，………容待日後深入討論。
3. 被開方數應尚包括有分數、負數，但因討論下來甚爲繁複，且超越範圍太多，況已找到正整數的被開方數的快速作圖法，已能暫成一獨立單元。
4. 當 $A=ab$ ，若 a ，b 爲一奇數，一偶數時，我們採用

   $$4A=4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$$

   及 $\sqrt{[(a+b)\sqrt{A}]^2-[(a-b)\sqrt{A}]^2}=\sqrt{4A^2}=2A$

   的原理作圖較快，因可省掉一開始分數處理的麻煩。若 a ，b 同爲奇數或同爲偶數時，我們可採用

   $$A=ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

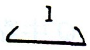
   及 $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\sqrt{A}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\sqrt{A}\right)^2}=\sqrt{A^2}=A$

   的原理作圖即可

五、參考資料

國民中學數學課本第三册，第五册

例1. 已知：單位長



求作：一線段長$\sqrt{7}$

分析：$7=7\times1$

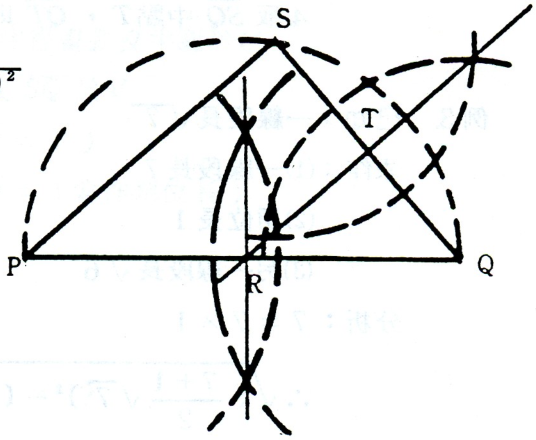
① $\therefore\sqrt{(7+1)^2-(7-1)^2}$

$=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}$

$=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$

或② $\sqrt{(\frac{7+1}{2})^2-(\frac{7-1}{2})^2}$

$=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$



作法：㈠1.作 $\overline{PQ}=7+1$

2.取P，Q中點R作半圓過P，Q

3.以P爲圓心，$(7-1)$爲半徑畫弧，交半圓於S

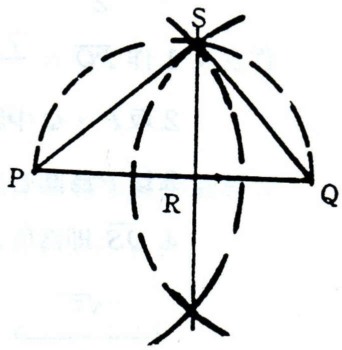
4.取$\overline{SQ}$中點T，$\overline{QT}$即爲所求

㈡1.作 $\overline{PQ}=\frac{7+1}{2}$

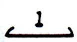
2.取P，Q中點R作半圓過P，Q

3.以P爲圓心，$(\frac{7-1}{2})$爲半徑畫弧，交半圓於S

4.$\overline{QS}$即爲所求



例2. 已知：單位長



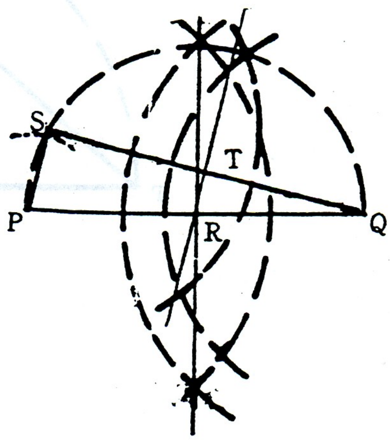
求作：一線段長爲$\sqrt{6}$

分析：$6=2\times3$

$\therefore\sqrt{(2+3)^2-(2-3)^2}$

$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

作法：1.作 $\overline{PQ}=3+2$



2. 取 P，Q 中點 R，作半圓過 P，Q

3. 以 P 爲圓心，（ 3 － 2 ）爲半徑畫弧，交半圓於 S

4. 取 $\overline{SQ}$ 中點 T， $\overline{QT}$ 即爲所求

例 3.　已知：一線段長 $\sqrt{7}$

求作：(1)一線段長 7

(2)單位長 1

(3)另一線段長 $\sqrt{6}$

分析：$7 = 7 \times 1$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{7+1}{2}\sqrt{7}\right)^2-\left(\frac{7-1}{2}\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{\left[\left(\frac{7+1}{2}\right)^2-\left(\frac{7-1}{2}\right)^2\right]\times 7}$$

$$=\sqrt{(4^2-3^2)\times 7}=\sqrt{7^2}=7$$

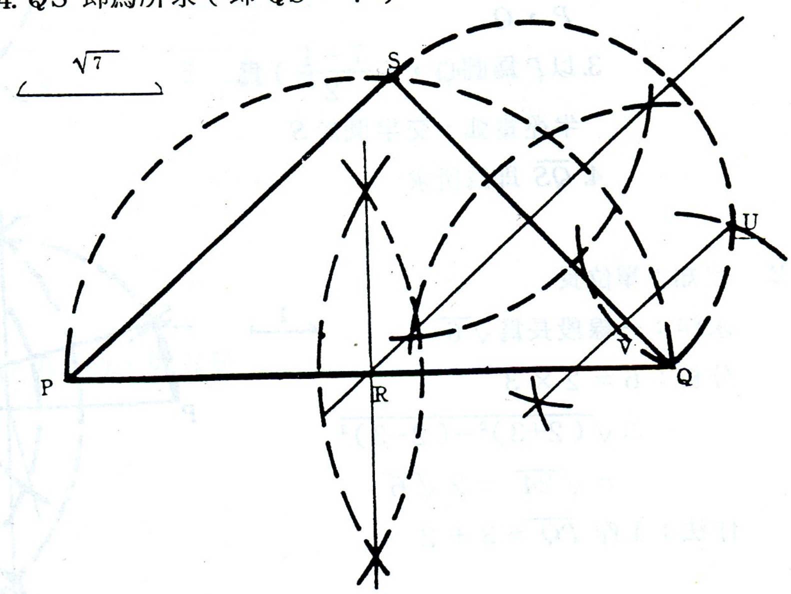
而 $\frac{7+1}{2}\sqrt{7}=4\sqrt{7}$，$\frac{7-1}{2}\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

作法：1. 作 $\overline{PQ}=\frac{7+1}{2}\sqrt{7}$

2. 取 P，Q 中點 R，作半圓過 P，Q

3. 以 P 爲圓心，（$\frac{7-1}{2}\sqrt{7}$）爲半徑畫弧交半圓於 S

4. $\overline{QS}$ 即爲所求（即 $\overline{QS}=7$ ）



作法：續上

1.取 $\overline{SQ}$ 中點 T，作半圓過 S，Q

2.以 Q 爲圓心，$\sqrt{7}$ 爲半徑畫弧交半圓於 U

3.過 U 作 $\overline{SQ}$ 的垂直成交 $\overline{SQ}$ 於 V

4.$\overline{VQ}$ 即爲所求（即 $\overline{VQ}=1$）

作法：續上（同例 2.，但由 $\overline{VQ}=1$ 當作單位長）

例 4. 已知：一線段長 $\sqrt{12}$

求作：一線段長 12

分析：$12=2\times6=3\times4=1\times12$

$$\because \left.\begin{array}{l} 2+6=8 \\ 3+4=7 \\ 1+12=13 \end{array}\right\}$$ 三者取分段數最少的 3，4

作法：1.作 $\overline{PQ}=\dfrac{3+4}{2}\sqrt{12}$

2.取 P，Q 中點 R，作半圓過 P，Q

3.以 P 爲圓心，（$\dfrac{4-3}{2}\sqrt{12}$）爲半徑畫弧交半圓於 S

4.$\overline{QS}$ 即爲所求（即 $\overline{QS}=12$）

※註：參前頁圖形