

數學定理、公式的證明

石厚高

臺北市立建國高級中學

數學老師都以爲學數學證明公式或定理是天經地義的，筆者自不例外，我要學生證明內切圓半徑、外接圓半徑、三角形面積、和差化積、積化和差等等都是一塌糊塗，常會心灰意冷沒有成就感，唉！不管它〔宰相有沒有權能割地〕，數學老師真的是〔孤臣無力可回天〕。

若干年前我終於想通了，公式與定理的證明是數學老師的事，是數學家的事，不是學生的事，那麼老師講了半天，學生還是不會證明，講了又有甚麼用呢？只要叫學生背下來不就完了嗎？其實不然。

在教分解因式這一章時，很多學生會覺得困擾，所以不必急著多作分解因式的題目，多複習複習乘法公式是有必要的，就以 $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 這兩個公式來說用三種方法證明。

橫式證明：

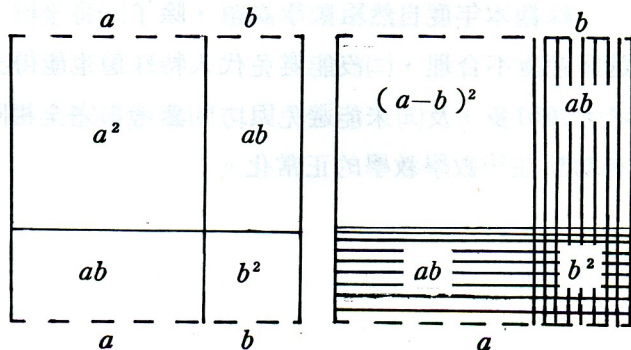
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

直式證明：

幾何證明：

$a+b$	$a-b$
$\times) a+b$	$\times) a-b$
-----	-----
a^2+ab	a^2-ab
$ab+b^2$	$-ab+b^2$
-----	-----
$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$



資深有經驗的老師證明這些公式，反反覆覆的說明；沒有經驗的老師叫學生背，如果所教班級沒有能力分班，考出來的成績一樣。我曾聽過一位老師對學生說，背起來 a 加 b 的平方等於 a 平方加上兩個 ab 再加上 b 的平方，這不是在教數學而是在教國文。正確的作法是第一步用橫式運算證明一遍，第二步用直式乘法再作一遍，最後是用 $a+b$

為邊長作正方形，在分點作各邊平行線，就把原正方形分成了兩個長方形，面積都是 ab ；還有兩個正方形面積各為 a^2 與 b^2 ，所以原正方形的面積就是兩個小正方形與兩個長方形面積之和。所以

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

這種方法最為學生所肯定所接受，非常遺憾我問過建中高三學生，在初中時教師在教這個公式時介紹過這種方法的，每班不超過五人。

不過 $(a-b)^2$ 在用面積證明時是用 a 為邊長作正方形，在分點 $a-b$ 處作平行線，就把原正方形分成了兩個長方形，面積都是 ab ；還有兩個正方形面積各為 a^2 與 b^2 ，可是正方形 b^2 為兩個長方形 ab 所共有，所以

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

有的學生一問再問為甚麼要加上 b^2 ？我一再解釋 b^2 被減了兩次，所以要加上個 b^2 學生還是不明白，所以我又想到了正方形 $(a-b)^2$ 是大正方形 a^2 減去兩個長方形與 ab 與 $b(a-b)$ ，所以

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

這個證明學生都接受了，連帶著前面證明的方法也都接受了。

教過一兩個月之後再考考這一節，就很明顯的看出來了，如果沒有能力分班，資深有經驗的老師所教班級，比起沒有經驗要學生背公式的老師所教的班級成績要高得多。

筆者讀初二時，一接觸到平面幾何的嚴格證明，要寫出〔敘述，理由〕十分喜愛，當時用的課本是開明書局的，文字真的是簡潔優美，增一字則太多減一字則太少，班上與我同樣喜歡的還有一位葉同學，不過我們不必諱言也因為嚴格證明讓多數同學減少了對平面幾何的興趣，他們作了一首打油詩〔幾何幾何人生幾何，學了幾何又能幾何〕。

李家同教授在〔清華雙週刊〕第96期的〔多念數學以增加推理能力〕一文中說〔我在念博士學位的時候，有一位數學博士在我們電機系教書，他常在走廊裡發牢騷，說電機系同學根本不懂如何證明定理，因為他們連要證明甚麼都不知道，我雖然同意他的說法，可是我覺得一般同學不會證明定理乃是很自然的事，因為畢竟證明定理是要經過相當嚴格的訓練才能學會的。〕又說〔有些學問，畢業了以後，還來得及學習，可是嚴謹的推理技巧，是絕對需要在大學裡學的，總不可能畢業以後自修完成。〕實感深獲我心，所以把它寫下來給大家參考。

〔多念數學以增加推理能力〕一文七十九年一月號〔科學月刊〕與七十八年十二月52期〔數學傳播〕都作了轉載。