七十九學年度大學聯考
自然組數學試題的分析與檢討

許燦煌（新竹高中）
朱標宗（臺中一中）
鄭國勲（新化高中）
蔡總湖（臺南一中）
陳明章（岡山高中）

壹、前　　言

七十九學年度大學聯考雖然已經落幕了，但它還會深深影響高中數學的教學，所謂考試領導教學，其餘音當會繞樑三年還不止，我們五位來自不同高中的教師深感關切，在某一場合聚集研討此事，特將心得分析於后，提供關心大學聯考數學命題及高中教育的人士參考。

貳、試題解析

第一部分：單一選擇題（共佔 20 分）

【子】設 $P(a,b,c)$ 爲球面 $x^2+y^2+z^2+2x+3y+4z+5=0$ 上距離平面 π：$2x+3y+6z=7$ 最近之一點，則

1. $a=$ (A) $-\frac{23}{7}$ (B) $-\frac{15}{7}$ (C) $-\frac{10}{7}$ (D) $-\frac{6}{7}$ (E) $-\frac{4}{7}$ （2分）

2. $b=$ (A) $-\frac{23}{7}$ (B) $-\frac{15}{7}$ (C) $-\frac{6}{7}$ (D) $-\frac{5}{7}$ (E) $-\frac{4}{7}$ （2分）

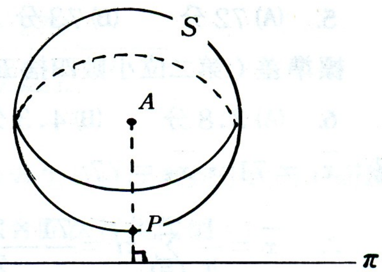
3. $c=$ (A) $-\frac{23}{7}$ (B) $-\frac{15}{7}$ (C) $-\frac{10}{7}$ (D) $-\frac{5}{7}$ (E) $-\frac{4}{7}$ （2分）

又，此點 P 與平面 π 之距離爲

4. (A) $\frac{10}{7}$ (B) $\frac{15}{7}$ (C) $\frac{23}{7}$ (D) $\frac{30}{7}$ (E) $\frac{36}{7}$ （4分）

解：球面 S：$(x+1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z+2)^2=1+\frac{9}{4}+4-5=\frac{9}{4}$

∴　球心 $A(-1,\frac{-3}{2},-2)$，



半徑 $r=\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\pm(2,3,6)/7$

$=\pm(\frac{3}{7},\frac{9}{14},\frac{9}{7})$

∴　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(-1,\frac{-3}{2},-2)\pm(\frac{3}{7},\frac{9}{14},\frac{9}{7})$

$=(\frac{-4}{7},\frac{-6}{7},\frac{-5}{7})$ 或 $(\frac{-10}{7},\frac{-15}{7},\frac{-23}{7})$

而 $(\frac{-4}{7},\frac{-6}{7},\frac{-5}{7})$ 與平面 π 之距 $=\dfrac{\left|\frac{-8}{7}-\frac{18}{7}-\frac{30}{7}-7\right|}{7}=\frac{15}{7}<\frac{51}{14}$

$=d(A,\pi)$

故所求的 P 點坐標為 $(a,b,c)=(\frac{-4}{7},\frac{-6}{7},\frac{-5}{7})$，且 $d(P,\pi)=\frac{15}{7}$

分析：這一題並不適合作為選擇題，同為考生無法得分可能是計算錯誤，但方法是正確的，其與方法錯誤而無法得分者並無分別，但認知的層次顯然是不同的。再者，本題的選項拆成三小題，分別選 a,b,c 三者，若有考生算出 P 點坐標為 $(\frac{-4}{7},\frac{4}{7},\frac{-3}{7})$ 或 $(\frac{-2}{7},\frac{-6}{7},\frac{-5}{7})$，那麼他可得 2 分或 4 分，但 P 點的位置與要求者相去甚遠，就好像答案要求“天山”你答“天池”也可得 $\frac{1}{2}$ 題分一樣的沒有道理。這種命題方式已經出現三次（74 年將空間坐標拆成三小題，77 年將機率拆成二小題，連今年共三次），希望往後能改進。

【丑】某校某次模擬考試，自然組數學一科，第二類組學生 200 人之平均成績為 71 分，

標準差為4分，第三類組學生100人之平均成績為77分，標準差為5分，則這兩類組學生300人之平均成績為

5. (A) 72分　(B) 73分　(C) 74分　(D) 75分　(E) 76分　（5分）

標準差（第二位小數四捨五入）為

6. (A) 3.8分　(B) 4.3分　(C) 4.5分　(D) 4.7分　(E) 5.2分　（5分）

解：$\overline{x}_1 = 71$，$\overline{x}_2 = 77$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi = \frac{71\times200+77\times100}{200+100} = 73\text{（分）}$$

$$\text{又}\begin{cases} 4^2 = S_1^2 = \dfrac{1}{200}\displaystyle\sum_{i=1}^{200} xi^2 - 71^2 \\ 5^2 = S_2^2 = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} yi^2 - 77^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{200} xi^2 = 1011400, \quad \sum_{i=1}^{100} yi^2 = 595400$$

$$\therefore \quad S^2 = \frac{1}{300}\left(\sum_{i=1}^{200} xi^2 + \sum_{i=1}^{100} yi^2\right) - 73^2$$

$$= 5356 - 5329$$

$$= 27$$

$$\therefore \quad S = \sqrt{27} \doteqdot 5.2\text{（分）}$$

分析：算術平均數與標準差是敍述統計的重點，自實施新教材以來未曾考過，今年考了10分，可以引起考生的注意，主意甚好。但此題仍然不適合作為選擇題。算術平均數較不容易錯誤，而標準差較不容易算對，其錯誤可能是不了解 $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi-\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi^2 - (\overline{X})^2$，或計算太繁，經不起考驗。

第二部分：非選擇題（共佔80分）

一、塡充題

1. 設 $f(x) = 1250x^6 - 2790x^5 - 3125x^4 + 707x^3 + 100x^2 + 45x - 62$，則 $f(3) =$ ___(A)___ 。

解：由餘式定理，多項式 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 $f(3)$，故可將3代入求值，但計

算甚煩，所以考慮利用綜合除法：將 $x-3$ 除 $f(x)$ 求餘式。

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1250 & -2790 & -3125 & +707 & +100 & +45 & -62 & 3 \\ & 3750 & +2880 & -735 & -84 & +48 & +279 & \\ \hline 1250 & +960 & -245 & -28 & +16 & +93 & 217 & \end{array}$$

$\therefore\quad f(3)=217$

分析：這是課本中的例題，也是考古題，相信夠細心的考生是可以拿到分數的。而錯誤的原因可能是數目大，計算錯誤，或不知使用綜合除法替代代值。

2. 設 $P(x)$ 爲一5次多項式，$P'(x)$ 爲其導函數。
若 $P(1)=P(2)=P(3)=P'(2)=P'(3)=0$，$P'(0)=1$，則 $P(0)=$ ___(B)___，$P'(1)=$ ___(C)___。

解：由重根定理，設

$P(x)=a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$\therefore\quad P'(x)=a[(x-2)^2(x-3)^2+(x-1)\cdot 2(x-2)(x-3)^2+(x-1)\cdot(x-2)\cdot 2(x-3)]$

$\therefore\quad 1=P'(0)=a(36+36+24)=96a$

$\therefore\quad a=\dfrac{1}{96}$

故 $\quad P(x)=\dfrac{1}{96}(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$\therefore\quad P(0)=\dfrac{-36}{96}=\dfrac{-3}{8}$

$P'(1)=\dfrac{4}{96}=\dfrac{1}{24}$

分析：這一題在考多項式、重根定理及微分，共 10 分，計算不煩，有概念的考生應可拿到分數，而錯誤的原因可能是不知使用重根定理或微分計算錯誤所致。

3. 設 $H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 爲一雙曲線，其中 a，b 皆爲正數。設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，則 H 上以 $(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ 爲切點之切線，其斜率爲 ___(D)___。此切線與 H 之兩

漸近線相交，而圍成一三角形，其面積為 ___(E)___ 。((E)的答案中不得含有α)

解：雙曲線H：$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，過其上一點($a\sec\alpha$，$b\tan\alpha$)的切線方程式為：

$$b^2(a\sec x)x-a^2(b\tan\alpha)y=a^2b^2$$

即

$$b\sec\alpha\ x-a\tan\alpha\ y=ab$$

其斜率$=\dfrac{b\sec\alpha}{a\tan\alpha}=\dfrac{b}{a\sin x}\quad(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$

又雙曲線H的漸近線方程式為　$bx\pm ay=0$

解 $\begin{cases} b\sec\alpha\,x-a\tan\alpha\,y=ab \\ bx-ay=0 \end{cases}$

得交點$P(a(\sec\alpha+\tan\alpha),b(\sec\alpha+\tan\alpha))$

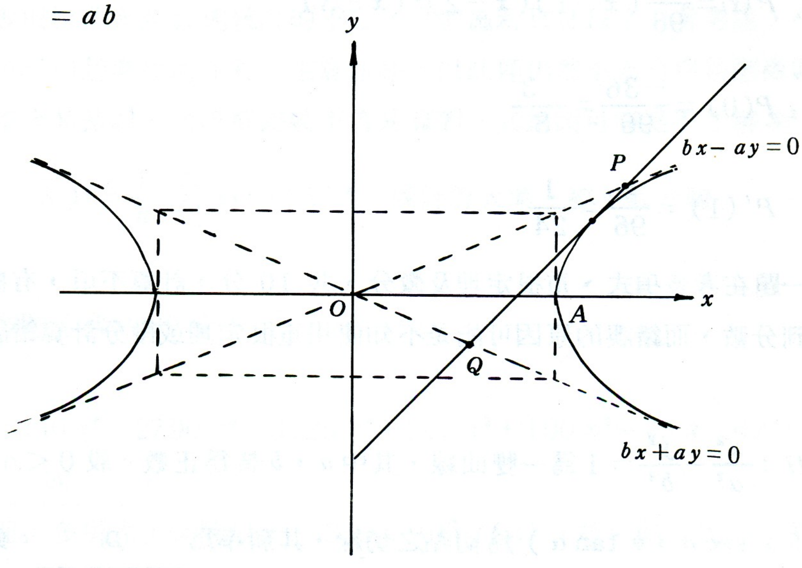
及 $\begin{cases} b\sec\alpha-a\tan\alpha\ y=ab \\ bx+ay=0 \end{cases}$

得交點$Q(a(\sec\alpha-\tan\alpha),-(b\sec\alpha-\tan\alpha))$

$$\therefore\quad \triangle OPQ=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a(\sec\alpha+\tan\alpha) & b(\sec\alpha+\tan\alpha) \\ a(\sec\alpha-\tan\alpha) & -b(\sec\alpha-\tan\alpha)\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2ab(\sec^2\alpha-\tan^2\alpha)$$

$$=ab$$



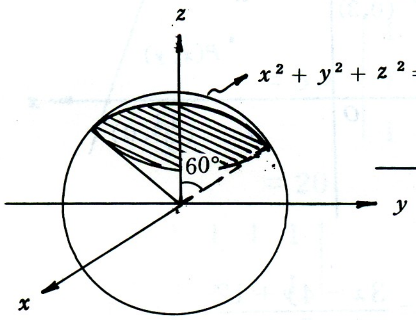
分析：(1) 過圓錐曲線上一點，求切線方程式屬於記憶“代公式”的題目。

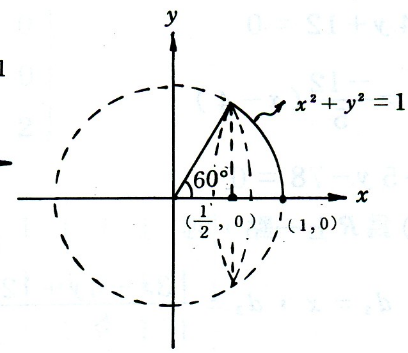
(2) 求切線與漸近線所圍三角形的面積是一個定值（在題目中已提及或作過的考生應有印象），故可取頂點 $A(a, 0)$ 去求三角形的面積，能掌握住這個特殊情況的考生，占了相當大的便宜。所以本題的命題型式，改為計算題才合理。

(3) 這一題在坊間參考書都可以找到，作過甚至記憶起來，可以省下不少時間，相對於沒有作過或沒記起來的考生似乎並不怎麼公平。故建議與其從參考書取材不如自教科書取材，這樣每一位考生都看過應該較為公平。

4. 將一實心地球儀浸入水中，令其北極朝上，而北緯 30° 緯線恰與水面齊，則浮出水面部分之體積，佔全球體體積之 ___(F)___ 。（註：赤道緯度為 0° ，北極為北緯 90° ）

解：將下左圖轉換成下右圖再繞 x 軸旋轉，其旋轉體體積即為所求。





$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(\sqrt{1-x^2})^2dx=\pi\cdot(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{24}\pi$$

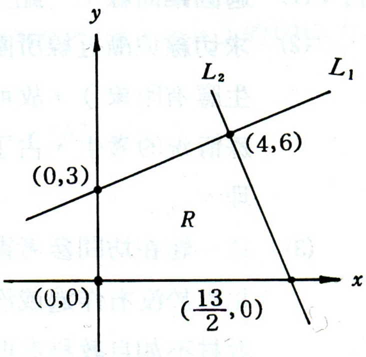
$$\frac{V}{\text{球的體積}}=\frac{\frac{5}{24}\pi}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{5}{32}$$

分析：利用圓弧繞 x 軸（或 y 軸）旋轉，求旋轉體體積，題目很靈活，可以鑑別程度的高下，但此題概念（或解題方向）重於計算，萬一考生的概念正確但積分錯誤致無法得分，所以擺在計算題應較為妥當。而不能得分的原因，可能是：

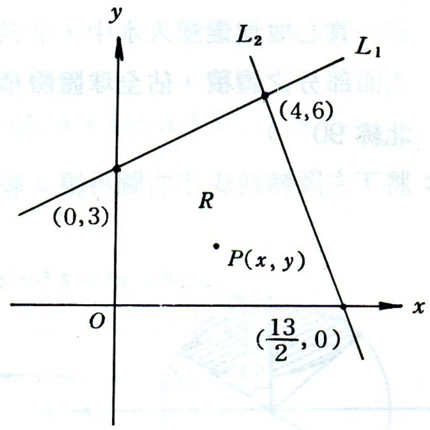
(1) 不知緯度的意義。

(2) 不知轉換成圓弧繞 x 軸旋轉去求旋轉體體積。

(3) 計算錯誤。



5. 如右圖，令 R 表示由 x 軸，y 軸及 L_1，L_2 兩直線所圍成之四邊形區域（含邊界及內部）。若點 P 屬於 R，令 d_1, d_2, d_3 及 d_4 分別表示 P 至 x 軸，y 軸，L_1 及 L_2 之距離，則 $d_1+d_2+d_3+d_4$ 之最大值為 ___(G)___，最小值為 ___(H)___。



解：L_1：$y-3=\dfrac{3}{4}x$

即 $3x-4y+12=0$

L_2：$y-6=\dfrac{-12}{5}(x-4)$

即 $12x+5y-78=0$

設 $P(x, y)$ 為 R 上一點，則

$$d_1=y\ ,\ d_2=x\ ,\ d_3=\frac{|3x-4y+12|}{5}=\frac{3x-4y+12}{5}$$

$$d_4=\frac{|12x+5y-78|}{13}=\frac{-(12x+5y-78)}{13}$$

$$\therefore\quad d_1+d_2+d_3+d_4=y+x+\frac{3x-4y+12}{5}-\frac{12x+5y-78}{13}$$

$$=\frac{44x-12y+546}{65}$$

上式一次函數在 R 中的極值，可用四邊形的四個頂點決定其最大及最小值。

當 $x=\dfrac{13}{2}$，$y=0$ 時，$\text{Max}=\dfrac{832}{65}=\dfrac{64}{5}$

當 $x=0$，$y=3$ 時，$\text{Min}=\dfrac{510}{65}=\dfrac{102}{13}$

分析：這一題是自行找到一次函數，利用線性規劃尋求最大及最小值。但不知究裏的考生，直接由四頂點代入四直線分別求其距離和也可得出正確答案。設計題目的人是否已考慮過？至於不能得分的原因可能是不知如何去 d_3、d_4 的絕對值，或 L_1，L_2 直線方程式算錯或代頂點的函數值錯誤。

6. 求下列各行列式之值：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\quad(\mathrm{I})\quad}$，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\quad(\mathrm{J})\quad}$。

解：(1)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 20$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

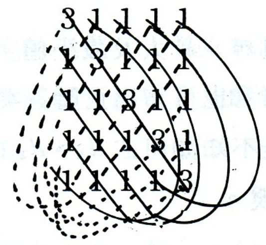
$$= 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \times 2^4$$

$$= 112$$

分析：三階行列式求值屬簡易題，而五階行列式需要降階才能求值，若仿三階行列式展

開，即



得 $3^5+1+1+1+1-3-3-3-3-3=232$。

二、1. 試證 $n^2 \leq 2^n$ 對所有大於3之自然數 n 均成立。（5分）

2. 試證 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n'}{2^n}=0$ 。（5分）

1. **證**：設 $f(x)=2^x-x^2$ ，$x\in R$

$f'(x)=\ell n\, 2\cdot 2^x-2x$

當 $x\geq 4$ 時 $f'(4)=\ell n\, 2\cdot 2^4-8>16\times 0.69-8>0$

$\therefore$ $x\geq 4$ 時，$f(x)$為遞增函數且 $f(4)\geq 0$

特別當 $n\geq 4$（$n\in N$）時 $f(n)=2^n-n^2\geq 0$

即 $2^n\geq n^2$

另證：數學歸納法：

當 $n=4$ 時，$2^4=16\geq 4^2$

設 $n=k$（$k\geq 4$）時，$2^k\geq k^2$

則當 $n=k+1$ 時，$2^{k+1}=2\cdot 2^k\geq 2k^2$

而 $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2\geq(4-1)^2-2=7$

$\therefore$ $2^{k+1}\geq 2k^2\geq(k+1)^2$

2. **證**： $\dfrac{n}{2^n}\leq\dfrac{1}{n}$

又 $\dfrac{n}{2^n}>0$

$\therefore$ $0<\dfrac{n}{2^n}\leq\dfrac{1}{n}$

由夾擠定理得 $\lim\limits_{n+\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$

分析：這一題在測驗數學歸納法（或導函數）及夾擠定理，屬簡易題。無法得分的原因

可能是不知使用數學歸納法（或導函數）或不知如何利用1小題去證2小題。

三、擲三粒均勻骰子，計其點數總和。試求總和為5的倍數之機率。

解：設三粒骰子出現的點數依次為 x, y, z 則欲求者為

$$\begin{cases} x+y+z=5,10\text{或}15 \\ 1\leq x, y, z\leq 6 \\ x, y, z\in N \end{cases}$$

其解為：

x	3	2	6	6	5	5	4	4	6	6	5
y	1	2	3	2	4	3	4	3	6	5	5
z	1	1	1	2	1	2	2	3	3	4	5

共有：$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!+\dfrac{3!}{2!}+3!+3!+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!+1=43$

$\therefore$ 所求機率 $=\dfrac{43}{6^3}=\dfrac{43}{216}$

另解：利用重複組合，

$$\begin{cases} x+y+z=5,10\text{或}15 \\ 1\leq x, y, z\leq 6 \\ x, y, z\in N \end{cases}$$

之解共有 $H_2^3+(H_7^3-C_1^3\times H_1^3)+(H_{12}^3-C_1^3\times H_6^3+C_2^3\times H_0^3)$

$=6+27+10$

$=43$

$\therefore$ 所求機率 $=\dfrac{43}{216}$

分析：這是一個古典的機率問題，有些令人不敢置信，讓學生回歸課本，有助於教學正常化，命題者用心令人佩服。而無法得分的原因可能是不會列出滿足方程式（或不等式）的解，或不知如何使用重複組合求解。

四、設 z 為實係數方程式 $x^2-(2\cos\alpha)x+1=0$ 之一根。試證不論 n 為任何自然數，z 恒為方程式 $x^{2n}(2\cos n\alpha)x^n+1=0$ 之一根。

解：解 $x^2-(2\cos\alpha)x+1=0$ 得

$$x = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$$
$$= \cos\alpha \pm i\ \sin\alpha$$

(1) 設　$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$，則

$z^{2n} - (2\cos n\alpha)z^n + 1$

$= (\cos 2n\alpha + i\sin 2n\alpha) - (2\cos n\alpha)(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + 1$

$= (\cos 2n\alpha - 2\cos^2 n\alpha + 1) + (\sin 2n\alpha - 2\sin n\alpha\cos n\alpha)i$

$= 0 + 0i$

$= 0$

(2) 設　$z = \cos\alpha - i\sin\alpha$，則

$z^{2n} - (2\cos n\alpha)z^n + 1$

$= (\cos 2n\alpha - i\sin 2n\alpha) - (2\cos n\alpha)(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) + 1$

$= (\cos 2n\alpha - 2\cos^2 n\alpha + 1) - (\sin 2n\alpha - 2\sin n\alpha\cos n\alpha)i$

$= 0 - 0i$

$= 0$

$\therefore$　$z = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ 均爲 $x^{2n} - (2\cos n\alpha)x^n + 1 = 0$ 的一根

分析：這是一考古題，中等程度的考生應該可以得分。無法得分的原因可能是不會求 $x^2 - (2\cos\alpha)x + 1 = 0$ 的根；至於錯誤的原因可能是方程式 $x^2 - (2\cos\alpha)x + 1 = 0$ 的根算錯或只算出一解，所以在檢驗是否爲 $x^{2n} - (2\cos n\alpha)x^n + 1 = 0$ 的根時只檢查 $\cos\alpha + i\sin = \alpha$（或 $\cos\alpha - i\sin\alpha$）一者。

参、結　　論

再將本年度試題依册、章、節、配分，整理如下：

册	章　（　節　）	配　分
一	多項式（綜合除法）	5/2-塡-1**
*一	數學歸納法	5/2-2-1
一、二	線性規劃、點與線的距離	10/2-塡-5
二	複　數	10/2-4
三	三階行列式	5/2-塡-6-1
三	球　面	10/1-子
四	機　率	10/2-3
四	敍述統計	10/1-丑
理上	數列的極限	5/2-2-2
理上	圓錐曲線的切線	10/2-塡-3
理上	旋轉體的體積	5/2-塡-4
理下	重根定理	10/2-塡-2
理下	五階行列式	5/2-塡-6-2

註：*　此題也可歸類到理上導函數內。

**　a/b-c-d：a 表配分；b 表題型，1 爲第一部分，2 爲第二部分；c 表題次，子、丑爲選擇題，塡爲塡充題；d 表 c 題次內的小題次。

綜觀本年度自然組數學試題，除了㈠將坐標 (a,b,c) 拆成 a,b,c 三個各自獨立的選擇題極不合理，㈡沒能避免代入特殊値也能得分的情形，㈢一、二兩册佔分太少，㈣考古題稍多，及㈤未能避免與坊間參考書完全相同的情形等缺失外，試題相當平易近人，有助於往後數學教學的正常化。