由斜率到梯度

賴漢卿
國立清華大學數學系

一、前言

在大一微積分，談到兩（多）變數函數 $z=f(x, y, \cdots\cdots\cdots)$ 的微分時，一般學生對於梯度（*gradient*）的眞義，常會發生困惑。雖然老師都會說明，梯度是曲面 $z=f(x, y)$ 上的一點（x, y, z）之切平面的傾斜度。這與單變數函數 $y=f(x)$ 的曲線上一點（x, y）的切線斜率（*slope*）$f'(x)$ 一樣，在兩（多）變數函數的梯度，是

$$\nabla f=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots\cdots \right\rangle$$

這是平面上的一向量。那麼問題是它的幾何意義是什麼？與切平面的關係又是如何？本課題，乃是由斜率到梯度做一平凡的說明，以供有機會講述這方面之材料的同仁參考。

二、切線的斜率

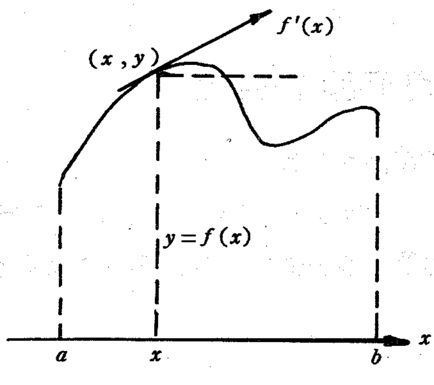
從單變數函數

(1) $\quad y=f(x) \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b$

的微分

(2) $\quad dy=f'(x)\,dx$

來說，$f'(x)$ 是(1)的函數圖形上一點（$x, f(x)$）的斜率，也就是該點的切線與 x－軸的傾斜度；如果該切線與 x－軸正向所夾的角度爲 θ 時，則



(3) $f'(x) = \tan\theta$

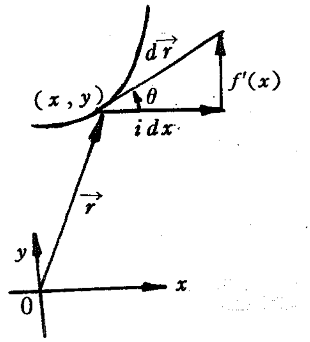
要是將(1)的曲線，用平面向量表示：

(4) $\overrightarrow{r} = \langle x, y \rangle = xi + yj$

其中 i 與 j 分別表示 x - 軸與 y - 軸上的單位向量時，則(4)的微分可表現成

(5) $d\overrightarrow{r} = \langle dx, dy \rangle = \langle dx, f'(x)dx \rangle$

$= (i + f'(x)j)\,dx$



如果將函數(1)寫成＝變數之函數方程式：

(6) $F(x, y) = y - f(x) = 0$

時，$F(x, y)$的(數學意義)梯度是

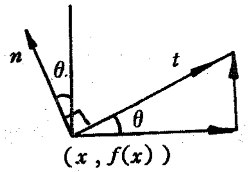
(7) $\nabla F = \langle \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y} \rangle$

$= \langle -f'(x), 1 \rangle = -f'(x)i + j = n$

這是一平面向量，與切線向量 $i + f'(x)j = t$ 相垂直，實則因

(8) $n \cdot t = 0$

向量 $\nabla F = n$ 稱爲在 $(x, f(x))$ 點的法向量。



由同角之餘角相等，或直角三角形之相似性質，我們即得 n 與 y - 軸的夾角也是 θ，即函數(6)的梯度：是與切線向量垂直的法向量。我們可以說(6)的梯度是決定了法向量與 y 軸正向的夾角 θ，此夾角就等於切線的傾斜度。

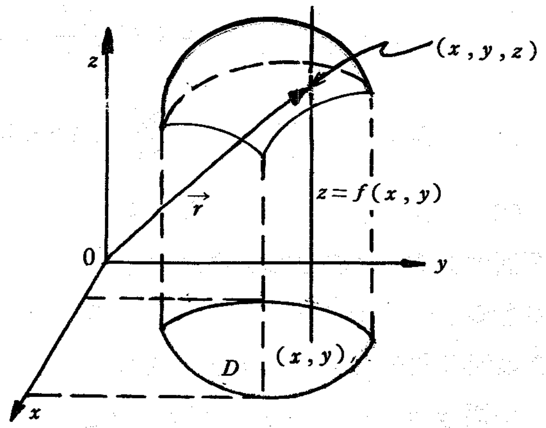
從單變數函數之切線斜率，以向量說明後，我們看如何將它推展到兩變數函數 $z = f(x, y)$上的梯度來。

三、切平面的梯度

考慮兩變數函數

(9) $z = f(x, y)$，$(x, y) \in D$（平面上的一區域）

此函數的圖形是一曲面。函數(9)的梯度（*gradient*）就像(1)的微分(2)那樣爲：



(10) $\nabla f=<\dfrac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}>$

這是曲面(9)上一點（ x,y,z ）的切平面上兩向量在（ $z=0$ ）xy-平面上的投影。

(10)之 ∇f 雖然與(2)之 $f'(x)$ 相對應，但實際意義與求法均未交代清楚。我們回塑到單變數函數，用向量表示的情形，如(4)同樣地將曲面(9)用向量表示如下。

(11) $\vec{R}=<x,y,z>=xi+yj+zk$

其中 i ，j 與 k 分別表示 x ，y ，z 軸上的單位向量，則(11)的微分

(12) $$d\vec{R}=<dx,dy,\frac{\partial f}{\partial x}\ dx+\frac{\partial f}{\partial y}\ dy>$$

$$=dxi+dyj+(\frac{\partial f}{\partial x}\ dx+\frac{\partial f}{\partial y}\ dy)\ k$$

$d\vec{R}$ 在平面 $y=0$ 上的分向量為：

(13) $$U_x=dxi+0j+(\frac{\partial f}{\partial x}\ dx)\ k=<1\ ,0\ ,\frac{\partial f}{\partial x}>\ dx$$

$d\vec{R}$ 在平面 $x=0$ 上的分向量為：

(14) $$V=0i+dyj+(\frac{\partial f}{\partial y}\ dy)\ k=<1\ ,0\ ,\frac{\partial f}{\partial y}>\ dy$$

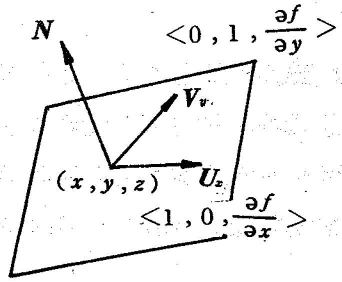
U_x 與 V 兩向量都位於切平面 $d\vec{R}$ 上，由此兩向量的叉積（即向量積）乃決定了該切平面的法線向量，即

$$U_x\times V\ =\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}\ dx \\ 0 & dy & \dfrac{\partial f}{\partial y}\ dy \end{vmatrix}$$

$$=(-\frac{\partial f}{\partial x}\ i-\frac{\partial f}{\partial y}\ j+\ k\ )\ dxdy$$

令 (15) $N=<-\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial f}{\partial y}\ ,1>=-\frac{\partial f}{\partial x}i-\frac{\partial f}{\partial y}j+k,$

則 (16) $N\perp U_x$ 且 $N\perp V_y$



一平面的方向是由其法線方向而決定。

(13)式所表示的向量是函數 $f(x,y)$ 定義在區域 D 內一點 (a,b)，在

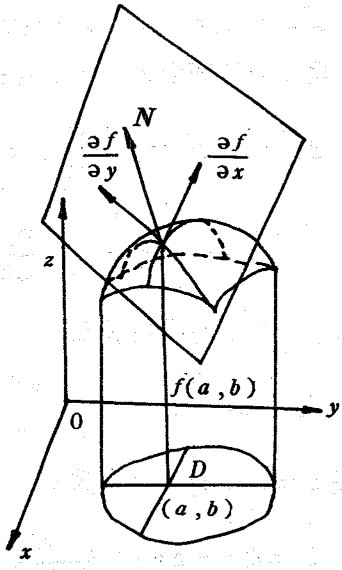
平面 $y=b$ 與曲面 $z=f(x,y)$ 之

交線，於 $x=a$ 時切線的方向 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 所定。

(14)式表示的向量是函數 $f(x,y)$ 定義在區域 D 內一點 (a,b)，於

平面 $x=a$ 與曲面 $z=f(x,y)$ 之

交線，在 $y=b$ 時切線的方向 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 所定。



此時切平面方程式爲

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-b)+z-f(a,b)=0$$

或 (17) $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=z-f(a,b)$

要是上述情況，將(9)式寫成三變數函數的方程式：

(18) $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$

（參照(6)式，在單變數函數的情形），則數 $F(x,y,z)$ 的梯度爲

(19) $$\nabla F=<\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}>$$

$$=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>\ =N$$ （(15)式相同）

這是一個三維空間的向量，此向量表示曲面 $z=f(x,y)$ 在點 (x,y,z) 的切平面的法線向量。這個梯度 $\nabla F=\boldsymbol{N}$ 是表示法線向量與 z 軸之交角 γ ，就是切平面與 $z=0$ 的平面（即 xy 平面）的交角。

我們需要注意函數 $z=f(x,y)$ 的梯度：

$$\nabla f=<\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}>$$

是決定該曲面之切平面上的兩向量：

$$(20)\qquad \boldsymbol{U}=<1,0,\frac{\partial f}{\partial x}> \text{與 } V=<0,1,\frac{\partial f}{\partial y}>$$

由此兩向量所決定之平面（即切平面）與水平面（ xy 平面）的交角（傾斜角，傾斜度）等於該切平面的法線向量：

$\boldsymbol{N}=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>$ 與 z 軸之正方所夾之角。如若 $z=f(x,y)$ 寫成如(18)之函數 $F(x,y,z)$ 時，其梯度：

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>$$

是表示切平面的法線向量，也就是 $F(x,y,z)=C$（任意常數）所表現之曲面層（*level surface*）的法向量。以 ∇F 說明曲面 $z=f(x,y)$ 的梯度是切平面與水平面之交角，就是 ∇F 與 z 軸（即 xy 平面的法線向量）之交角。因此對一曲面上一點的梯度，以數學意義雖有不同的表示方式：

$$(21)\qquad \nabla f=<\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}>，z=f(x,y)$$

及 $$(22)\qquad \nabla F=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>,\ F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

但其實際意義相同。如果單就(21)式說明曲面 $z=f(x,y)$ 上一點的梯度，則不易得知為該點切平面與 xy 平面的傾斜度。故在談到梯度時，雖然是由單變數的斜率推展而得，却需費一番功夫說明。在數學上，n 變數函數

$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

的梯度類似可定義爲下列之 n 維向量：

$$\nabla v=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

四、曲面積

由⑬與⑭兩向量的叉積的絕對量

$$|U_x\times V_y|=dS$$

是表示曲面的微分素。即

$$\begin{aligned}(23)\qquad dS&=|U_x\times V_y|\\&=|N|\ dx\,dy\\&=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\ \ dxdy\end{aligned}$$

在曲面上的密度函數是定義在 D 上的函數 $\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}$ ，若 N 與 z 軸之夾角爲 r ，則

$$(24)\ \frac{k\cdot N}{|N|}=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

所以定義在 D 上之曲面 $z=f(x,y)$ 的曲面積爲

$$\begin{aligned}(25)\quad S&=\iint_D\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\quad dxdy\\&=\iint_D\sec\gamma\ dx\ \ dy\end{aligned}$$

特別情形，如在第2節單變數函數的情形，則曲線 $y=f(x)$ 定義在 $[a,b]$ 的曲線長，可由(5)式得

$$ds=|d\vec{r}|=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\quad\left(=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\right)$$

故曲線長爲

$$(26)\qquad s=\int ds=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \ dx$$

公式(25)與(26)，對於學生而言，大概不算陌生或難懂，唯這是由傾斜度或斜率的概念，直接或說順便獲得的結果，在此我們順便帶一筆說明而已。

五、一個例題的說明

設 $z=f(x,y)=xy^3+x^2y^2-2y$，試求在點 $P_0=(2,1)$ 的梯度（換句話說，即在曲面上之一點（2，1，4）求其切平面的梯度），並求該點之切平面方程式。

解：① $f(x,y)$ 的梯度，依定義為：

$$\nabla f=<\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}>$$

$$=<y^3+2xy^2,3xy^2+2x^2y-2>$$

所以在點 $P_0=(2,1)$ 的梯度為：

$$\nabla f(2,1)=<5,12>=5i+12j$$

② $f(2,1)=4$，所以在曲面上之點（2，1，4）的切平面法綫向量為：

$$\boldsymbol{N}=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>=<-5,-12,1>$$

故切平面方程式為：

$$-5(x-2)-12(y-1)+z-4=0$$

即 $\quad 5x+12y-z=18$

③若考慮曲面層：

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=C\quad (C\text{為任意常數})$$

即 $\quad z-(xy^3+x^2y^2-2y)=C$

則在點（2，1，4），函數 F 的梯度為：

$$\nabla F=<\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}>=<-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1>$$

$$=<-5,-12,1>=\boldsymbol{N}$$

與②中所述為該點之切平面的法線向量。