二次無理數的連分數

楊春福
國立海洋大學電子工程學系學生

一、緣起

若a_1 爲整數，a_2，a_3，…，a_{2n+1} 爲自然數，則形如

$$a_1+\cfrac{a_2}{a_3+\cfrac{a_4}{a_5+\ddots+\cfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}}}$$

稱爲**連分數**。若其中a_2，a_4，a_6，…a_{2n}皆爲1，則稱簡連分數。（以下文中連分數都是指簡連分數）連分數起源於古希臘，在1854 年，大數學家Dirichlet用（a_1，a_3 ……，a_{2n+1}）表簡連分數。Leonhard Euler（1737）發現任一個二次無理數，$a+\sqrt{b}$，a，b爲有理數，都可以表示成週期連分數。如

$$\frac{4+\sqrt{37}}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

寫成 $\frac{4+\sqrt{37}}{7}=[1,\dot{2},3,\dot{1}]$。我們說$[1,\dot{2},3,\dot{1}]$是 $\frac{4+\sqrt{37}}{7}$ 的連分數，其循環週期爲3。

於是筆者在大一時，利用電子計算機語言Pascal 來探討$\sqrt{N}$（N爲自然數）的連分數。發現$\sqrt{N}$的連分數的規則後，即給予證明，而爲了研討二次無理數的連分數之種種性質，斷斷續續在大二才完成。經過詳細反覆的推衍，並以最合理的方式編排行文的

順序，擬成初稿。又在大三時，修正許多嚴重的錯誤，並刪掉不必要的內容，這篇數論才能出爐。

二、表一實數爲連分數的辦法

我們知道欲表一分數爲連分數最有效的辦法是Euclid 輾轉相除法（Euclidaen algorithm）。基本原理相同，可是寫法不一：

【例1】 表$\frac{177}{83}$ 爲連分數。

解：方法一：

$$177=2\times 83+11$$
$$83=7\times 11+6$$
$$11=1\times 6+5$$
$$6=1\times 5+1$$
$$5=5\times 1$$

方法二：

$$\frac{177}{83}=2+\frac{11}{83}$$
$$=2+\cfrac{1}{7+\cfrac{6}{11}}$$
$$=2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{6}}}$$
$$=2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

答： $\frac{177}{83}=[2,7,1,1,5]$

方法一表達上容易混淆，方法二過於冗長且著墨太多，我想到一種方法：

方法三：

$$\begin{array}{ccccc} \frac{177}{83} & \frac{83}{11} & \frac{11}{6} & \frac{6}{5} & 5 \\ \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 5 \\ \\ \frac{11}{83} & \frac{6}{11} & \frac{5}{6} & \frac{1}{5} & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

簡單地解釋為：將第一列的高斯值寫在第二列，第一列減去第二列的差置於第三列，第三列的倒數置於下一行第一列。為避免方法三的行列與線性代數的矩陣的行列之定義相混淆，我們稱方法三為三線譜。第一、二、三列分別稱為第一、二、三線。方法三中，$\frac{11}{6}$ 稱為第一線第三項，餘者類推。方便起見，方法三稱為$\frac{177}{83}$ 的三線譜。無疑地，第三列任一項都介於 0，1 之間，充其量，第三線會出現 0，我們知道會出現 0 時，此三線譜為有理數的三線譜。現在給予三線譜的種種定義：

【定義 1 】 α 為實數，對 α 做第一次三線譜運算即

$\alpha = 0$ 時，停止運算。否則 $\alpha_0 = \alpha - [\alpha]$。

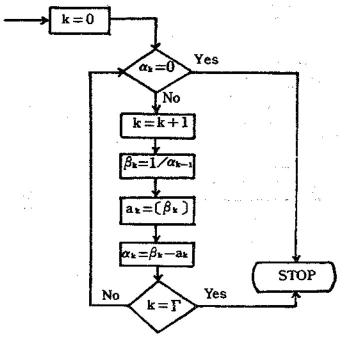
$\alpha_0 = 0$ 時，停止運算。否則 $a_0 = [\alpha]$

$$\begin{array}{cc} & \beta_1 \\ a_0 & a_1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{array} \quad \cdots\cdots\cdots \text{框 I}$$

框 I 中，$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_0}$，$a_1 = [\beta_1]$，$\beta_1 > 1$，$\alpha_1 = \beta_1 - a_1$。

我們稱框 I 為第一次三線譜運算。

若 $\alpha_1 = 0$，則停止運算，否則進行第二次三線譜運算。依此法經過三線譜運算 Γ 次稱為 Γ 次三線譜運算。圖一為 Γ 次三線譜運算的流程圖：



由圖一的流程圖得到數列$<\alpha_k>_0^\Gamma$，$<a_k>_0^\Gamma$，$<\beta_k>_1^\Gamma$ 寫成

$$\left.\begin{array}{lll} & \beta_1 & \beta_2 \cdots \beta_k \cdots \beta_\Gamma \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_k \cdots \beta_\Gamma \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_\Gamma \end{array}\right\} (\ast)$$

通常若$\alpha > 1$時，$\beta_0 = \alpha$ 並將β_0 置於（$\ast$）第一列第一項。（$\ast$）稱爲α的三線譜。$<\beta_k>_1^\Gamma$ 稱爲第一線，$<a_k>_0^\Gamma$稱爲第二線，且知〔a_0，a_1，a_2 …，a_Γ 〕是α的漸近連分數。$<\alpha_k>_0^\Gamma$稱爲第三線或判斷線。

爲了更了解三線譜，以下列出它的一些性質：

㈠ 我們把腦中簡捷且一貫的運算模式畫成圖形稱爲佈思圖。三線譜的佈思圖：

	倒數	（原數的倒數）
	高斯值	（倒數的高斯值）
原數	差	（倒數減高斯值）

㈡ 因爲差＝倒數－倒數的高斯值，所以（$\ast$）中

$0 < \alpha_k < 1$， $\beta_k > 1$ $k = 0, 1, \cdots\cdots, \Gamma - 1$

$0 \leq \alpha_\Gamma < 1$， $\beta_\Gamma \geq 1$

㈢ 我們知道原數決定了倒數、高斯值和差，如果（$\ast$）中

$\alpha_{L+\tau} = \alpha_L$ ，則$\alpha_{L+\tau+k} = \alpha_{L+k}$ $k = 1, 2, \cdots$ （在此$L+\tau \leq \Gamma$）

且我們知道α的連分數的週期爲τ的因數。

現在給一個例子：

【例2】 若我們知道$\sqrt{46}$ 可表成週期連分數，

求$\sqrt{46}$ 之爲連分數，並求其漸近分數至循環節末項。

解：除了作三線譜時，將二、三線對調外，另增二列，並以直式排列：

倒 數	差（原數）	高斯值	分 子	分 母
$\sqrt{46}$	$\sqrt{46}-6$	6	6	1
$\dfrac{\sqrt{46}+6}{10}$	$\dfrac{\sqrt{46}-4}{10}$	1	7	1
$\dfrac{\sqrt{46}+4}{3}$	$\dfrac{\sqrt{46}-5}{3}$	3	27	4

倒數	差（原數）	高斯値	分子	分母
$\frac{\sqrt{46}+5}{7}$	$\frac{\sqrt{46}-2}{7}$	1	34	5
$\frac{\sqrt{46}+2}{6}$	$\frac{\sqrt{46}-4}{6}$	1	61	9
$\frac{\sqrt{46}+4}{5}$	$\frac{\sqrt{46}-6}{5}$	2	156	23
$\frac{\sqrt{46}+6}{2}$	$\frac{\sqrt{46}-6}{2}$	6	997	147
$\frac{\sqrt{46}+6}{5}$	$\frac{\sqrt{46}-4}{5}$	2	2150	317
$\frac{\sqrt{46}+4}{6}$	$\frac{\sqrt{46}-2}{6}$	1	3147	464
$\frac{\sqrt{46}+2}{7}$	$\frac{\sqrt{46}-5}{7}$	1	5297	781
$\frac{\sqrt{46}+5}{3}$	$\frac{\sqrt{46}-4}{3}$	3	19038	2807
$\frac{\sqrt{46}+4}{10}$	$\frac{\sqrt{46}-6}{10}$	1	24335	3588
$\sqrt{46}+6$	$\sqrt{46}-6$	12	311058	45863

答：$\sqrt{46}=[6,\dot{1},3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,\dot{12}]$，其漸近分數$\frac{311058}{45863}$，約為 6.782329983 ，誤差大約$\frac{1}{45863}\cdot\frac{1}{3588}=6\times 10^{-9}$ 。

說明：漸近分數的求法見高中數學統合一、秦九韶求一法。在任何數論中，只要談到連分數，就會定義數列$\langle P_n\rangle$，$\langle Q_n\rangle$，但本篇是要以三線譜貫通全文，並不想定義它們。解中把三線譜擴張成五線譜。直到最後五註，才定義我們所熟悉的$\langle P_n\rangle$，$\langle Q_n\rangle$，證明二次無理數的連分數是週期連分數。

三、二次無理數

在例二中，我們如何“事先”知道$\sqrt{46}$ 可表成週期連分數，也就是問：當我們做$\sqrt{46}$ 的三線譜運算時，判斷線上是否會重複出現相同的二次無理數？更深切地說，我們要探討判斷線的各項是否具有某種共同性質，例如具有相同的形式，而且可以求出判斷線上，具有這種形式的二次無理數的個數；或者我們說：具有判斷線各項之形式的二次無理數的個數是有限的。就例一來說，$\sqrt{46}$ 的三線譜的判斷線之形式為$\frac{\sqrt{46}-u}{d}$，u，d 為自然數且 $d \mid 46-u^2$（假設），我們可以根據三線譜的性質得：

$0<\frac{\sqrt{46}-u}{d}<1$，更進一步知：$1\leq u<\sqrt{46}$，$d<46-u^2$，即

$$1\leq u\leq 6,\ 1\leq d\leq 45$$

也就是在判斷線上，具有$\frac{\sqrt{46}-u}{d}$且 $d\mid 46-u^2$ 這樣的形式，且知其個數為280。所以$\sqrt{46}$ 連分數的週期不大於280。

由上一段分析，我們必須建立二次無理數的形式，稱為模式，或簡稱模。N為自然數，u，d為整數（$d\neq 0$），我們知道，任意二次無理數皆可化為$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$。（d，u分別來自 down, up）。

【定義2】 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$稱為不可化簡，意即

不能存在自然數N'，整數u'，d'，使

$N'<N$且$\frac{\sqrt{N'}+u'}{d'}=\frac{\sqrt{N}+u}{d}$。

由定義二知，$\frac{\sqrt{7}+6}{3}$，$\frac{\sqrt{6}+4}{2}$ 與 $\frac{\sqrt{2}-1}{7}$ 均不可化簡。我們可由N的因數分解，得到$N=p^2q$，且q不能再分解成r^2s，除非$r=1$。於是，定義二可寫成定理一：

【定理1】 若$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 不可化簡，則$(d,u,p)=1$，反之亦然。

也就是判斷一二次無理數 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 是否可化簡，只要（d，u，p）＝1，若（d，u，p）＞1，則約分化簡，於是我們討論不可化簡的二次無理數：

【定義3】 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}=\frac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$，且 $\frac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$ 不可化簡。

$g=(N_0-u_0^2,\ d_0)$，$d_1=\frac{d_0}{g}$，$\frac{\sqrt{N'}+u'}{d'}=\frac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$，其中

$N'=N_0d_1^2$，$u'=u_0d_1$，$d'=d_0d_1$ 稱 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 以N′ 爲模。

【例3】 求 $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$，$\frac{\sqrt{8}+4}{2}$，$\frac{\sqrt{7}+1}{4}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{4}{\sqrt{7}+1}$ 的模。

解：僅就 $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$，$\frac{4}{\sqrt{7}+1}$ 來看，其他相同。

$\frac{\sqrt{7}+1}{4}$ 不可化簡，$(7-1^2,4)=2$，$\frac{4}{2}=2$，$\frac{\sqrt{7}+1}{4}=\frac{\sqrt{28}+2}{8}$，故 $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$ 以28 爲模。$\frac{4}{\sqrt{7}+1}=\frac{4(\sqrt{7}-1)}{6}=\frac{\sqrt{28}-2}{3}$，$(28-2^2,3)=3$，$\frac{3}{3}=1$，故 $\frac{4}{\sqrt{7}+1}$ 以28 爲模。

答：依序分別以7，2，28，2，28 爲模。

【定理2】 若 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 以N爲模，則 $d\mid N-u^2$。反之未然。

證：跟著定義三，因 $N'=N$，故 $u'=u$，$d'=d$。

$N-u^2=(N_0-u_0^2)d_1^2=\frac{(N_0-u_0^2)}{g}\cdot\frac{d_0^2}{g}=\frac{(N_0-u_0^2)}{g}d$，故 $d\mid N-u^2$

而 $2\mid 8-4^2$，但 $\frac{\sqrt{8}+4}{2}$ 以2爲模，故其逆未必眞。

【定理3】 α 以N爲模，a爲整數，則 $\alpha\pm a$ 亦以N爲模。

證：僅須證明 $\alpha+a$ 則足矣，因 $\alpha-a=\alpha+(-a)$。

設$\alpha=\dfrac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$，且$\dfrac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$不可化簡，$\alpha+a=\dfrac{\sqrt{N_0}+u_0+ad_0}{d_0}$

由Euclid輾轉相除法知$(N_0-(u_0+ad_0)^2,d_0)=(N_0-u_0{}^2,d_0)$

跟著定義三知，$\alpha+a$亦以N爲模。

在證明定理四時，我們需要引理一：

【引理1】 W，V，Z 爲整數且$W\mid VZ$，則$\left(Z,\dfrac{VZ}{W}\right)=\dfrac{(V,W)Z}{W}$

證：設$(V,W)=d$，$V=V'd$，$W=W'd$，又$W\mid VZ$，故$W'\mid Z$，設

$Z=W'd'$，左式$=(W'd',V'd')=d'=\dfrac{W'd'd}{W'd}=$右式。

故$\left(Z,\dfrac{VZ}{W}\right)=\dfrac{(V,W)Z}{W}$。

【定理4】 α以N爲模，則$\dfrac{1}{\alpha}$亦以N爲模。

證：設$\alpha=\dfrac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$ 且$\dfrac{\sqrt{N_0}+u_0}{d_0}$ 不可化簡，設$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{N_0d_0^2}-u_0d_0}{N_0-u_0^2}=$

$\dfrac{\sqrt{M_0}-V_0}{e_0}$ 且$\dfrac{\sqrt{M_0}-V_0}{e_0}$不可化簡，$N_0=p^2q$，$N_0d_0^2=r^2s$，其中

$\sqrt{q}$，$\sqrt{s}$爲最簡根式

$(r,u_0d_0,N_0-u_0^2)=W_0$

則$M_0=\dfrac{N_0d_0^2}{W_0^2}$，$V_0=\dfrac{u_0d_0}{W_0}$，$e_0=\dfrac{N_0-u_0^2}{W_0}$

得$M_0-V_0^2=\dfrac{d_0^2e_0}{W_0}$，$g'=(M_0-V_0^2,e_0)=\left(\dfrac{d_0^2e_0}{W_0},e_0\right)=\dfrac{(d_0^2,W_0)}{W_0}e_0$

設$\dfrac{1}{\alpha}$以M爲模

$$M=M_0\left(\frac{e_0}{g}\right)^2=M_0\frac{W_0^2}{(W_0,d_0^2)^2}=N_0\frac{d_0^2}{(W_0,d_0^2)^2}$$

又由假設知$r=pd_0$，$(d_0,p,u_0)=1$ （由定理一）

$(d_0^2,W_0)=(d_0^2,r,u_0d_0,N_0-u_0^2)=(d_0(d_0,u_0,p),N_0-u_0^2)$

$=(d_0,N_0-u_0^2)$

跟著定義三，$\dfrac{1}{\alpha}$亦以N爲模。

下面給予二個不給予證明的引理：

【引理2】 α以N爲模，則$-\alpha$亦以N爲模。

【引理3】 若a，b，c，d爲整數且$ad-bc=\pm 1$，

α以N爲模，則$\dfrac{c\alpha+d}{a\alpha+b}$亦以N爲模。

我們化簡一二次無理數後，再依定義三求出它的模，所以任意一二次無理數，其模唯一。定理三、四，及引理二指出一二次無理數加一整數，或其倒數，或其相反數，其模不變。

【例3】 α以N爲模，

$$\beta=2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\alpha}}}$$

則β亦以N爲模，這是定理三，四及引理二反覆推論的結果。

當我們得到一二次無理數α時，首先簡化它，找到它的模N，化成$\dfrac{\sqrt{N}+u}{d}$，然後依三線譜運算的定義（D1.）

$a_0=[\alpha]$，$\alpha_0=\alpha-a_0$，α_0亦以N爲模（定理3）

$$\begin{array}{llll} & \beta_1\cdots\cdots & \beta_k\cdots\cdots & \\ a_0 & a_1\cdots\cdots & a_k\cdots\cdots & \\ \alpha_0 & \alpha_1\cdots\cdots & \alpha_k\cdots\cdots & \end{array}$$

由流程圖一，α_0 以N爲模，$\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_0}$，又由定理三，$\beta_1$ 亦以N爲模，如此一步一步往下推，得

【定理5】 α以N爲模，則α三線譜的第一、三線各項皆以N爲模。

於是可將α的三線譜改爲：

$\alpha=\dfrac{\sqrt{N}+u}{d}$ 以N爲模（定義3），$d_0=d$，$a_0=[\alpha]$，$u_0=a_0d-u$

$$\left.\begin{array}{cccccc} & \dfrac{\sqrt{N}+u_0}{d_1} \quad \cdots\cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k-1}}{d_{k-1}} & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k-1}}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}} & \cdots \\ a_0 & a_1 \quad \cdots\cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots \\ \dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0} & \dfrac{\sqrt{N}-u_1}{d_1} \quad \cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k-1}}{d_{k-1}} & \dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}} & \cdots \end{array}\right\}(\divideontimes\divideontimes)$$

由三線譜定義知：

$$d_{k+1}=\frac{N-u_k^2}{d_k}，a_{k+1}=\left[\frac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}}\right]，u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k$$

$k=0，1，2\cdots$，且$\langle d_i\rangle_0^n$，$\langle u_i\rangle_0^n$皆是整數數列，並滿足

$0<\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<1$。

因為還要經其他的處理，才能建立完整的表二次無理數為週期連分數，所以暫不繪部分的流程圖。

由三線譜的性質知：若$u_L=u_{L+\tau}$，$d_L=d_{L+\tau}$，則

$u_{L+K}=u_{L+\tau+K}$，$d_{L+K}=d_{L+\tau+K}$，且我們知道α的連分數的週期為τ的因數。

【例4】 表 $\dfrac{-\sqrt{44}+2}{6}$ 為連分數

解：1° 化簡 $\dfrac{-\sqrt{44}+2}{6}=\dfrac{-\sqrt{11}+1}{3}$

2° $\dfrac{-\sqrt{11}+1}{3}$的模為99（定義3），且 $\dfrac{-\sqrt{11}+1}{3}=\dfrac{\sqrt{99}-3}{-9}$

3° 作三線譜運算：

$\frac{\sqrt{99}-3}{-9}$	$\frac{\sqrt{99}+12}{5}$	$\frac{\sqrt{99}+8}{7}$	$\frac{\sqrt{99}+6}{9}$	$\frac{\sqrt{99}+3}{10}$	$\frac{\sqrt{99}+7}{5}$
-1	4	2	1	1	3
$\frac{\sqrt{99}-12}{-9}$	$\frac{\sqrt{99}-8}{5}$	$\frac{\sqrt{99}-6}{7}$	$\frac{\sqrt{99}-3}{9}$	$\frac{\sqrt{99}-7}{10}$	$\frac{\sqrt{99}-8}{5}$

答：$\dfrac{-\sqrt{44}+2}{6}=[-1，4，\dot{2}，1，1，\dot{3}]$

比較 $\dfrac{\sqrt{99}-3}{-9}=[-1，4，\dot{2}，1，1，\dot{3}]$與$\sqrt{99}=[9，\dot{1}，\dot{1}\dot{8}]$

【例5】 以N為模的數有多少個？

答：無限多個，舉例來說：a為整數，$\dfrac{\sqrt{2}-a}{a^2-2}$以2為模，而與a無關，所以以2為模的數有無限多個。

在例五，可想到「模」不足以解決所有的二次無理數。我們現在來分析二次無理數 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$（以N爲模）的三線譜，並使我們能縮小具有相同模的二次無理數之範圍。例如：我們希望只要探討 $\sqrt{2}$ 的連分數之循環節，便可知 $\frac{\sqrt{2}-a}{a^2-2}$ 連分數的循環節。

我們知道 $\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 的下一項爲 $\frac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}}$，便可定義：

【定義 4】 $\frac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}}$ 稱爲 $\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 的轉換，因模相同（T3、T4）

簡記爲（u_{k+1}，d_{k+1}）是（u_k，d_k）的轉換，以

（u_k，d_k）→（u_{k+1}，d_{k+1}）表示。

例如在例四中，（+12，−9）→（+8，+5）→（+6，+7）→……，我們僅討論 $\langle u_k \rangle$，$\langle d_k \rangle$ 各項的正負，即例四可表示爲（+，−）→（+，+）→（+，+）→……，於是就一般形式 $\frac{\sqrt{N}-u}{d}$ 而言，我們定義

【定義5】 $u>0$，$d>0$，（u，d）簡記爲（+，+）

$u>0$，$d<0$，（u，d）簡記爲（+，−）

$u<0$，$d>0$，（u，d）簡記爲（−，+）

$u<0$，$d<0$，（u，d）簡記爲（−，−）

$u=0$，$d>0$，（u，d）簡記爲（0，+）

$u=0$，$d<0$，（u，d）簡記爲（0，−）

因 $d\neq 0$，故 $d=0$ 不必討論。

【定理6】 三線譜的判斷線上，可能（+，+），（0，+），（+，−），（−，+）。

證：由判斷線的性質知：$0<\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<1$

於是，當（−，−）時，即 $u_k<0$，$d_k<0$，則 $\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<0$ 不合，同理可知（0，−）亦不合，則三線譜的判斷線上，可能的情形只能是定義五的另外四種：（+，+），（0，+），（+，−），（−，+）。

【定理7】 (1) $(+,+)\to(+,+)$

(2) $(0,+)\to(+,+)$

(3) $(+,-)\to(-,+)$（若 $|u_{k+1}|<|u_k|$ ）

或 $(+,-)\to(+,+)$ 或 $(0,+)$

(4) $(-,+)\to(+,-)$（若 $|u_{k+1}|<|u_k|$ ）

或 $(-,+)\to(+,+)$

證：(1) $(+,+)\to(+,+)$ 意即 $u_k>0$，$d_k>0$，則

$u_{k+1}>0$，$d_{k+1}>0$，$u_k>0$，$d_k>0$，又 $0<\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<1$，

$\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 以N爲模，得

$d_k \mid N-u_k^2 \mid$ （T2），於是

$1\le u_k\le[\sqrt{N}]$，$1\le d_k\le N-1$ ……………………………①

$d_{k+1}=\dfrac{N-u_k^2}{d_k}>0$，可知 $d_{k+1}\ge 1$

因 $d_{k+1}\ne\sqrt{N}$，我們分二種情形

1° 設 $d_{k+1}<\sqrt{N}$，由歸謬法，假設 $u_{k+1}\le 0$ ，則

$\dfrac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}}\ge\dfrac{\sqrt{N}}{d_{k+1}}>1$，與判斷線的性質不合，故 $u_{k+1}>0$

2° 設 $d_{k+1}>\sqrt{N}$，又 $\sqrt{N}>u_k$ （由式①）

$u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k\ge d_{k+1}-u_k>0$，故 $u_{k+1}\ge 1$

(2) $(0,+)\to(+,+)$ 意即 $\dfrac{\sqrt{N}}{d_k}$ 轉換成 $\dfrac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}}$

此爲必然，因 $\dfrac{\sqrt{N}}{d_k}$ 以N爲模，其倒數必爲 $\dfrac{\sqrt{N}}{d_{k+1}}$

且 $\dfrac{\sqrt{N}}{d_{k+1}}>1$，$d_{k+1}>0$，而 $u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k=$

$a_{k+1}d_{k+1}>0$

(3) 由定理六，我們要去除 $(+,-)\to(+,-)$ 的情形：

也就是「若 $u_k>0$，$d_k<0$ 則 $u_{k+1}>0$，$d_{k+1}<0$」是錯誤的。

因$\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 的倒數$\dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}}>1$，又$u_k>0$，故$d_{k+1}<0$ 是

不可能的。即$d_{k+1}>0$ 。

分三種情形：$u_{k+1}<0$，$u_{k+1}=0$，$u_{k+1}>0$

僅討論$d_{k+1}>0$，$u_{k+1}<0$ 的情形如下：

$u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k$ ($a_{k+1}>0$，$d_{k+1}>0$)

$-u_{k+1}=u_k-a_{k+1}d_{k+1}<u_k$

$|u_{k+1}|=-u_{k+1}<u_k=|u_k|$ 即

$|u_{k+1}|<|u_k|$ ，當(＋，－)→(－，＋)時。

(4) 現在我們要證明：

1° 若$u_k<0$，$d_k>0$ 且$d_{k+1}<0$ ，則$u_{k+1}>0$ 且

$|u_{k+1}|<|u_k|$ 。

2° 若$u_k<0$ ，$d_k>0$ 且$d_{k+1}>0$ ，則$u_{k+1}>0$ 。

於是

1° 因$d_{k+1}<0$，則$u_{k+1}\leq 0$ 是不可能，故$u_{k+1}>0$

$u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k<-u_k$ (因$a_{k+1}\geq 1$，$d_{k+1}<0$)

$|u_{k+1}|=u_{k+1}<-u_k=|u_k|$，即

$|u_{k+1}|<|u_k|$， 當(－，＋) →(＋，－)時。

2° 因$d_{k+1}>0$ ，$u_k<0$

$u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k>0$

定理七到此完全證明。

【例5】 表$\dfrac{\sqrt{2}-28}{-17}$ 爲連分數。

解：1° $\dfrac{\sqrt{2}-28}{-17}$不可化簡。

2° $\dfrac{\sqrt{2}-28}{-17}$ 以2爲模。

3° 作三線譜運算：

$\dfrac{\sqrt{2}-28}{-17}$ $\dfrac{\sqrt{2}+11}{7}$ $\dfrac{\sqrt{2}-4}{-2}$ $\sqrt{2}+2$ $\sqrt{2}+1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}-11}{-17} & \dfrac{\sqrt{2}+4}{7} & \dfrac{\sqrt{2}-2}{-2} & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \end{array}$$

答：$\dfrac{\sqrt{2}-28}{-17}=[1,1,1,3,\dot{2}]$

由例五的三線譜判斷線的轉換：

$(+11,-17)\to(-4,+7)\to(+2,-2)\to(+1,+1)\to(+1,+1)$

來分析定理七：$(+,-)\to(-,+)$，故 $|-4|<|+11|$

$(-,+)\to(+,-)$，故 $|+2|<|-4|$

【定義6】 若 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 在判斷線上出現不只一次，則稱 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 爲循環項。

【定理8】 若 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 爲循環項，則 $u_k>0$，$d_k>0$

證：由定理七，判斷線上的轉換若不出現 $(+,+)$ 則已，若出現則以後各項必爲 $(+,+)$。

現在探討不出現 $(+,+)$ 的情形：

$(-,+)\to(+,-)\to(-,+)\to\cdots\cdots$

而 $|u_k|>|u_{k+1}|>|u_{k+2}|>\cdots\cdots>|u_\Gamma|>\cdots\cdots$

於是可能 $u_\Gamma=0$，而 $(0,+)\to(+,+)$，還是出現 $(+,+)$。

若 $u_\Gamma\neq0$，而 $<|u_i|>$ 遞減，又不出現 $(+,+)$，此不可能。

於是重複出現在判斷線的項只可能

$u_k>0$，$d_k>0$

【例6】 若 $u_k>0$，$d_k>0$，是否能說 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$ 爲循環項。

答：不能。如 $\dfrac{\sqrt{99}-1}{14}$ 轉換成 $\dfrac{\sqrt{99}-6}{7}$，跟著例四知，$\dfrac{\sqrt{99}-1}{14}$ 不是循環項。

【定理9】 二次無理數必可表成週期連分數。

證：在定理八的證明中，知判斷線一定會出現 $(+,+)$

即 $u_k>0$，$d_k>0$，在判斷線上具有 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$，$u_k>0$，$d_k>0$ 的形式

$\therefore 0<\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<1$，$d_k\,|N-u_k^2|$（定理二）

即 $1\leq u_k\leq[\sqrt{N}]$，$1\leq d_k\leq N-1$

具有這種形式的個數爲 $(N-1)[\sqrt{N}]$， 所以我們知道

二次無理數必可表成週期連分數。

【引理 4 】 若 $\dfrac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}$ 爲循環項，則 $\sqrt{N}+u_m>d_m$

證：因 $\dfrac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}$ 爲循環項，我們可以取下標m使 $\dfrac{\sqrt{N}-u_{m-1}}{d_{m-1}}$ 亦爲循環項

$\therefore$ 由判斷線的性質及定理八知

$\dfrac{\sqrt{N}-u_{m-1}}{d_{m-1}}>0$，$d_{m-1}>0$，故 $\sqrt{N}>u_{m-1}$

由三線譜運算知

$\sqrt{N}+u_m=\sqrt{N}+a_md_m-u_{m-1}>a_md_m\geq d_m$，故 $\sqrt{N}+u_m>d_m$

【引理 5 】 若 $u_m>0$，$d_m>0$，則 $\sqrt{N}+u_k>d_k$，$k=m+1, m+2, \cdots\cdots\cdots$

證：由判斷線的性質知

$\dfrac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}>0$，$d_m>0$，故 $\sqrt{N}>u_m$，

由定理七知 $u_{m+1}>0$，$d_{m+1}>0$

於是 $\sqrt{N}+u_{m+1}=\sqrt{N}+a_{m+1}d_{m+1}-u_m>a_{m+1}d_{m+1}\geq d_{m+1}$

由定理七，$(+,+)\rightarrow(+,+)$

可推得

$\sqrt{N}+u_k>d_k \quad k=m+1, m+2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

符號〔 〕在本文中，除用來表示連分數外，還具有高斯符號的意義：〔 α 〕表不超過 α 之最大整數。所以

【引理 6 】 $[a+[b]]=[a]+[b]$ ，也就是，若 c 爲整數，則 $[a+c]=[a]+c$

【引理 7 】 若 $\sqrt{N}+u_k>d_k>0$，則 $a_{k+1}=\left[\dfrac{\sqrt{N}+u_{k+1}}{d_{k+1}}\right]$

證：$1>\dfrac{d_k}{\sqrt{N}+u_k}>0$，$0<\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_{k+1}}<1$

$$\left[\frac{\sqrt{N}+u_{k+1}}{d_{k+1}}\right]=\left[\frac{\sqrt{N}+a_{k+1}d_{k+1}-u_k}{d_{k+1}}\right]=a_{k+1}+\left[\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_{k+1}}\right]=a_{k+1}$$

【引理8】 若$\sqrt{N}+u_m>d_m>0$，$u_m>0$，則$\frac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}$爲循環項。

證：首先找到兩個相同的數對：

$(u_{L+\tau}, d_{L+\tau})=(u_L, d_L)$

因爲只有$(N-1)[\sqrt{N}]$個可能的數對，所以在三線譜（※※）的判斷線上一定可以找到這樣的數對(u_L, d_L)。如果命題是眞，則數對(u_m, d_m) 滿足$(u_m, d_m)=(u_{m+\tau}, d_{m+\tau})$

由$(u_L, d_L)=(u_{L+\tau}, d_{L+\tau})$很容易轉換成$(u_{L+1}, d_{L+1})=(u_{L+\tau+1}, d_{L+\tau+1})$。

但我們的目的是想證得“$(u_m, d_m)=(u_{m+\tau}, d_{m+\tau})$”

也就是要證(u_m, d_m) 有再現的性質，若$m\geq L$，則顯然。

而當$m<L$ 時，就要掉過來推論：

由$u_m>0$，$d_m>0$ 及引理五知

$\sqrt{N}+u_k>d_k>0 \quad k=m+1, m+2, \cdots\cdots, L, \cdots\cdots$

且$\sqrt{N}+u_m>d_m>0$，得

$\sqrt{N}+u_k>d_k>0$，$k=m, m+1, \cdots\cdots, L, \cdots\cdots$

跟著引理七

$$a_L=\left[\frac{\sqrt{N}+u_2}{d_L}\right]=\left[\frac{\sqrt{N}+u_{L+\tau}}{d_{L+\tau}}\right]=a_{L+\tau} \quad (因\ u_L=u_{L+\tau}，d_L=d_{L+\tau})$$

故知$a_L=a_{L+\tau}$。

又由$u_L=u_{L+\tau}$，$d_L=d_{L+\tau}$及$u_{L-1}=a_Ld_L-u_L$，$u_{L+\tau-1}=a_{L+\tau}d_{L+\tau}-u_{L+\tau}$

知$u_{L-1}=u_{L+\tau-1}$，再由$d_{L-1}=\frac{N-u_{L-1}^2}{d_L}$，$d_{L+\tau-1}=\frac{N-u_{L+\tau-1}^2}{d_{L+\tau}}$得

$d_{L-1}=d_{L+\tau-1}$

這樣一步一步往上推，就得到

$a_{m+1}=a_{m+\tau+1}$，$u_m=u_{m+\tau}$，$d_m=d_{m+\tau}$

於是由循環項的定義知

$\frac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}$ 爲循環項。（過程參照「數論十一講第五講：小數」）

我們綜合定理八、引理四、五、七，得一重要的結果：

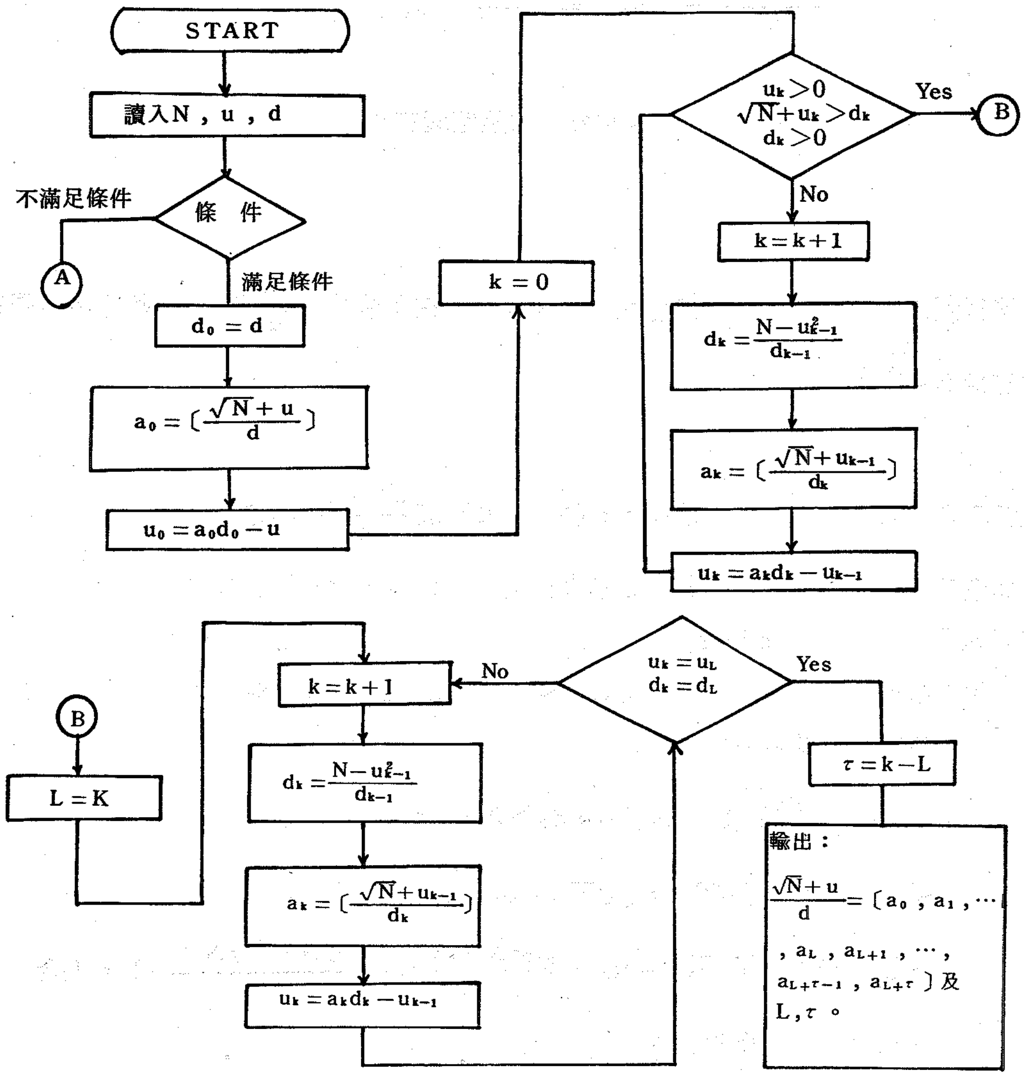
【定理 10】 $\frac{\sqrt{N}-u_m}{d_m}$ 爲循環項的充要條件爲 $\sqrt{N}+u_m>d_m>0$ ， $u_m>0$

利用定理十及二次無理數的三線譜運算，繪出流程圖二：

條件：N 爲自然數，且不爲平方數。

u ， d 爲整數， $d\neq 0$ 。

$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 以 N 爲模。



說明：Ⓐ分：

(1) N不爲自然數或u，d 不爲整數或d＝0 ，則從START 再開始或結束程式。

(2) 除了N爲平方數外，其他都滿足條件，則

$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 爲有理數，可表

$$\frac{\sqrt{N}+u}{d}=[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_r]$$

(3) 若$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$不以N爲模，依照定義三求模。

流程圖二中所得之τ（由定理九、十知其會存在）稱爲$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 連分數的循環週期，或簡稱爲$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 的週期。

【定義7】 若$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 以N爲模，$\tau(N;u,d)$ 表$\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 的週期。

如我們所知，有理數$\frac{a}{b}$，a，b爲自然數，小數的週期不大於 b−1 。

【定理11】 $\tau(N;u,d)\leq N-1$

證：我們看具有以N爲模且是判斷線上的循環項之形式有幾個：

由定理十及判斷線的性質：

$$0<\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}<1,\ u_k>0,\ d_k>0,\ \sqrt{N}+u_k>d_k$$

得 $1\leq u_k\leq[\sqrt{N}]$，$[\sqrt{N}]-u_k<d_k\leq[\sqrt{N}]+u_k$

注意：若 $d_k=[\sqrt{N}]-u_k$ ，則$\frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}=1+\frac{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}{d_k}>1$ ，不合

現在分兩種情形考慮：

1° $N\leq[\sqrt{N}]^2+[\sqrt{N}]$

若 $d_k=[\sqrt{N}]+u_k$，又由定理二

$d_k \mid N-u_k^2$ ，即 $d_k \mid N-[\sqrt{N}]^2$ ，

但 $N-[\sqrt{N}]^2\leq[\sqrt{N}]<[\sqrt{N}]+u_k=d_k$ ，故不合。

我們開始數具有下列條件的個數：

$1\leq u_k\leq[\sqrt{N}]$ ，$[\sqrt{N}]-u_k<d_k<[\sqrt{N}]+u_k$

$u_k=1$ ，d_k 有一個，即 $[\sqrt{N}]$ 。

$u_k=2$ ，d_k 有三個，即 $[\sqrt{N}]+1$，$[\sqrt{N}]$，$[\sqrt{N}]-1$ ，

……………

$u_k=m$ ，d_k 有 $2m-1$ 個，即 $[\sqrt{N}]+m-1$ ，$[\sqrt{N}]+m-2$ ，……

，$[\sqrt{N}]$，……，$[\sqrt{N}]-m+1$ ………

$u_k=[\sqrt{N}]$，d_k 有 $2[\sqrt{N}]-1$ 個，即 $[\sqrt{N}]+[\sqrt{N}]-1$，$[\sqrt{N}]$

$+[\sqrt{N}]-2$，………，$[\sqrt{N}]$，………，1

總共有 $1+3+\cdots\cdots+2[\sqrt{N}]-1=[\sqrt{N}]^2$ 個

即 $\tau(N;u,d)\leq[\sqrt{N}]^2\leq N-1$

2° $N>[\sqrt{N}]^2+[\sqrt{N}]$

我們同樣數滿足下列條件的個數：

$1\leq u_k\leq[\sqrt{N}]$，$[\sqrt{N}]-u_k<d_k\leq[\sqrt{N}]+u_k$

總共有 $[\sqrt{N}]^2+[\sqrt{N}]$ 個

即 $\tau(N;u,d)\leq[\sqrt{N}]^2+[\sqrt{N}]<N$

現在我們討論循環節，來導出對稱截割定理。

【定義 8】 由流程圖二所得之 $(a_{L+1}$，a_{L+2}，……，$a_{L+\tau})$ 稱爲 $\dfrac{\sqrt{N}+u}{d}$ 連分數的第一循環節。以 A_1 表之。

$A_i=(a_{L+i}$，a_{L+i+1}，……，$a_{L+\tau}$，a_{L+1}，……，$a_{L+i-1})$，

$i=1,2,\cdots\cdots,\tau$

A_i 稱爲第 i 循環節，以 A 通稱循環節，$\tau(A)$ 表 τ 。

爲方便起見，$A_i=(a_i$，a_{i+1}，……，a_τ，a_1，……，$a_{i-1})$，

再簡寫成 $A_i=(i$，$i+1$，……，τ，1，……，$i-1)$

定義：$\bar{A}_i=(i,i-1,\cdots\cdots,1,\tau,\tau-1,\cdots\cdots,i+1)$稱爲第 i 逆循環節

對整數m，$\overline{m}=m$，若$1\leq m\leq\tau$

$\overline{m}=\overline{m+\tau}$，若$m\leq 0$

$\overline{m}=\overline{m-\tau}$，若$m\geq\tau+1$

$(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_\tau)=(j_1, j_2, \cdots\cdots, j_\tau)$ $1\leq i_k, j_k\leq\tau$，$k=1, 2, \cdots\cdots, \tau$

表$a_{i_k}=a_{j_k}$ $k=1, 2, \cdots\cdots, \tau$

以$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_\tau \\ j_1 & j_2 & \cdots\cdots & j_\tau \end{pmatrix}$表之。

【例7】 循環節A, B, C，$\tau(A)=1$，$\tau(B)=2$，$\tau(C)=3$，則

$A_1=(1)=\overline{A}_1$

$B_1=(1,2)$，$\overline{B}_1=(1,2)$，$B_2=(2,1)$，$\overline{B}_2=(2,1)$，即$B_1=\overline{B}_1$，$B_2=\overline{B}_2$

$C_1=(1,2,3)$，$C_2=(2,3,1)$，$C_3=(3,1,2)$

$\overline{C}_1=(1,3,2)$，$\overline{C}_2=(2,1,3)$，$\overline{C}_3=(3,2,1)$

【引理9】 $A_i=A_j \Longleftrightarrow i=j$

證："$\Leftarrow$"顯然

"$\Rightarrow$"

即若$\begin{pmatrix} i & i+1 & \cdots\cdots\cdots\tau & 1\cdots\cdots i-1 \\ j & j+1 & \cdots\cdots\cdots\tau & 1\cdots\cdots j-1 \end{pmatrix}$，則$i=j$

即$a_i=a_{\overline{i+m(j-i)}}$，$a_{i+1}=a_{\overline{i+1+m(j-i)}}$，……，m爲任意整數

設$i<j$，$j-i=d$

因$1\leq i<j\leq\tau$，故$1\leq d\leq\tau-1$，於是有兩種情形

(1) 若$d\mid\tau$，且設$n=\dfrac{\tau}{d}$，則

$a_k=a_{k+\ell d}$ $k=1,2,\cdots\cdots,d$ $\ell=1,2,\cdots\cdots,n-1$

於是A爲$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_d)$的循環，但A是由流程圖二得來的循環節，所以不合。

(2) 若$(d, \tau)=1$，由輾轉相除法知

可以找到α，β，使$\alpha d+\beta\tau=1$，α，β爲整數。

取$m=n\alpha$，n爲任意整數

$a_i=a_{\overline{i+md}}=a_{\overline{i+n\alpha d}}=a_{\overline{i+n(\alpha d+\beta\tau)}}=a_{\overline{i+n}}$

因n爲任意整數，故得A爲(a_1)的循環，亦不合。

若 $i>j$ ，則將 i，j 對調，方法同 $i<j$ ，亦可證 $i>j$ 亦不合。

由歸謬法知 $i>j$ ，$i<j$ 不合，故 $i=j$ 。

【定義9】 $A_i=\overline{A}_j$ 稱 A_i 對稱於 A_j 。

【引理10】 $A_i=\overline{A}_j \Longleftrightarrow \overline{A}_i=A_j$

證：$\begin{pmatrix} i & i+1 \cdots\cdots \tau & 1 \cdots\cdots i-1 \\ j & j-1 \cdots\cdots 1 & \tau \cdots\cdots j+1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} j & j+1 \cdots\cdots \tau & 1 \cdots\cdots j-1 \\ i & i-1 \cdots\cdots 1 & \tau \cdots\cdots i+1 \end{pmatrix}$

所以，若 $A_i=\overline{A}_j$，我們 A_i，A_j 相互對稱。

【引理11】 若 $A_i=\overline{A}_j=\overline{A}_k$ ，則 $j=k$

證：由引理十得 $\overline{A}_i=A_j=A_k$

由引理九知 $j=k$

在應用上，我們有。

【引理12】 $A_i=\overline{A}_j \Longleftrightarrow A_1=\overline{A}_{i+j-1} \Longleftrightarrow A_k=\overline{A}_{i+j-k}$ k 爲任意整數。

【引理13】 若 $i+j$ 爲偶數，$A_i=\overline{A}_j \Longleftrightarrow A_{\frac{i+j}{2}}=\overline{A}_{\frac{i+j}{2}}$

若 $i+j$ 爲奇數，$A_i=\overline{A}_j \Longleftrightarrow A_{\frac{i+j+1}{2}}=\overline{A}_{\frac{i+j-1}{2}}$

設 $\dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0}$ 爲循環項，$\tau=\tau(N, -u_0, d_0)$

A_1 爲 $\dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0}$ 連分數的第一循環節，由前文知

$A_1=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_\tau)$，$\tau(A_1)=\tau$

觀察 $\dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0}$ 的三線譜：

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \dfrac{\sqrt{N}+u_0}{d_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k-1}}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}} & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k+1}}{d_{k+2}} & \cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{\tau-1}}{d_\tau} \\ & a_1 & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_\tau \\ \dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0} & \dfrac{\sqrt{N}-u_1}{d_1} & \cdots & \dfrac{\sqrt{N}-u_{k-1}}{d_{k-1}} & \dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\sqrt{N}-u_\tau}{d_\tau} \end{array}$$

$u_0=u_\tau$ ，$d_0=d_\tau$ 。

然後，可得到。

【引理14】 $u_k=u_{k+1} \Longleftrightarrow A_{k+1}=\overline{A}_{k+1}$

證：“ $\Rightarrow$ ”

$u_k = u_{k+1}$，則 $d_k = \dfrac{N-u_k^2}{d_{k+1}} = \dfrac{N-u_{k+1}^2}{d_{k+1}} = d_{k+2}$

由引理七，$a_k = [\dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_k}] = [\dfrac{\sqrt{N}+u_{k+1}}{d_{k+2}}] = a_{k+2}$

於是 $u_{k-1} = a_k\ d_k - u_k = a_{k+2}d_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+2}$，……

所以 $a_{k+1} = a_{k+1}$，$a_{\bar{k}} = a_{\overline{k+2}}$，$a_{\overline{k-1}} = a_{\overline{k+3}}$，……

故 $A_{k+1} = \bar{A}_{k+1}$

"$\Leftarrow$"

由 $\begin{pmatrix} k+1 & k+2 \cdots\cdots \tau & \overrightarrow{1 \cdots\cdots k} \\ k+1 & \underrightarrow{k \cdots 1} & \tau \cdots k+2 \end{pmatrix}$ 取循環節（$a_k \cdots a_1 \cdots a_1 \cdots a_k\, a_{k+1}$）

於是，簡寫三線譜為

		$\rightarrow$		$\rightarrow$	⋮	$\dfrac{\sqrt{N}+u_{k+1}}{d_{k+2}}$
循環節	a_k	$\rightarrow$	a_k	a_{k+1}	⋮	$a_{k+2} = a_k$
循環項	$\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	⋮	$\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$

由模的定義及三線譜運算知

$d_{k+2} = d_k$，於是 $u_k^2 = N - d_k\, d_{k+1} = N - d_{k+2}d_{k+1} = u_{k+1}^2$

由定理八知，u_k，u_{k+1} 皆為正整數，

故 $u_k = u_{k+1}$

【引理15】 $d_k = d_{k+1} \Longleftrightarrow A_{k+1} = \bar{A}_k$

證："$\Rightarrow$"

$d_k = d_{k+1}$，則 $a_k = [\dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_k}] = [\dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}}] = a_{k+1}$，………

於是 $a_k = a_{k+1}$，$a_{k-1} = a_{k+2}$，………

即 $A_{k+1} = \bar{A}_k$

"$\Leftarrow$"

由 $\begin{pmatrix} k+1 & k+2 \cdots\cdots\cdots \tau & \overline{1 \cdots\cdots\cdots k} \\ \underline{k} & \underline{k-1 \cdots\cdots\cdots 1} & \tau \cdots\cdots k+1 \end{pmatrix}$ 取循環節（a_k，…，a_1，…，a_1，…，a_k）

於是簡寫三線譜爲

$$\begin{array}{lcccc:c} & & & \rightarrow & \rightarrow & \frac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}} \\ \text{循環節} & a_k & & \rightarrow & a_k & a_{k+1} \\ \text{循環項} & \frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k} & & \rightarrow & \rightarrow & \frac{\sqrt{N}-u_k}{d_k} \end{array}$$

故 $d_k = d_{k+1}$

【引理16】 若 $1 \leq i \leq \tau(A)$

(1) 若 $\tau(A)$ 爲奇數

若 $A_{i+1} = \overline{A}_{i+1}$ （$A_{i+1} = \overline{A}_i$ ），則存在 $j =$

$\overline{i+\frac{\tau(A)+1}{2}}$ $\left(\overline{i+\frac{\tau(A)-1}{2}}\right)$ 且唯一，使 $1 \leq j \leq \tau(A)$

$A_{j+1} = \overline{A}_j$ （$A_{j+1} = \overline{A}_{j+1}$ ）

(2) 若 $\tau(A)$ 爲偶數

若 $A_{i+1} = \overline{A}_{i+1}$ （$A_{i+1} = \overline{A}_i$ ），則存在 $j = \overline{i+\frac{\tau(A)}{2}}$ $\left(\overline{i+\frac{\tau(A)}{2}}\right)$ 且

唯一，使 $1 \leq j \leq \tau(A)$， $j \neq i$ ，$A_{j+1} = \overline{A}_{j+1}$ （$A_{j+1} = \overline{A}_j$ ）

說明：四種情形只討論其中一種：

$\tau(A)$ 爲奇數 $A_{i+1} = \overline{A}_i$ ，設 $A_{j+1} = \overline{A}_{j+1}$

由引理十二、十一得 $\overline{2i} = \overline{2j+1}$ ，即 $\overline{2j-2i+1} = 0$

又 $1 \leq j \leq \tau(A)$ ，得 $j = i + \overline{\frac{\tau(A)-1}{2}}$

【定理12】 （對稱截割定理）

在二次無理數的三線譜運算時，

當遇到 $u_i = u_{i+1}$ 或 $d_i = d_{i+1}$ ，再往下算，

必可找到 $d_j = d_{j+1}$ 或 $u_j = u_{j+1}$ ，且

我們已能夠掌握此二次無理數的週期及其連分數。

說明：很容易了解， $j-i$ 大約半個週期

利用引理十四、十五，可推知循環節。

利用引理十六可算出週期。

在下一節，我們將再修飾定理十二。

四、二次無理數$\sqrt{N}$

因$\sqrt{N}$的形式簡單，且$\sqrt{N}$連分數的循環節的一些性質，而探討$\sqrt{N}$連分數的這些性質之證明，就例二：

$\sqrt{46}=[6,\dot{1},3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,\dot{12}]$

(一)　$\sqrt{46}$　連分數的循環節從連分數第二項開始。

(二)　設$\sqrt{46}=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_\tau]$，則$a_\tau=2a_0$

(三)　$a_{\tau-k}=a_k \quad k=1, 2, \cdots\cdots, \tau-1$

(四)　$\tau=12\leq 2\cdot 6=2[\sqrt{46}]=2[\sqrt{N}]$，此時$N=46$。

我們可以證明二次無理數$\sqrt{N}$均滿足(一)、(二)、(三)，
而給予例子否定(四)：$\tau\leq 2[\sqrt{N}]$。

$\sqrt{N}$的三線譜：$d_{k+1}=\dfrac{N-u_k^2}{d_k} \qquad a_{k+1}=[\dfrac{N+u_k}{d_{k+1}}] \qquad u_{k+1}=a_{k+1}d_{k+1}-u_k$

$u_0=[\sqrt{N}] \qquad a_0=[\sqrt{N}] \qquad u_0=[\sqrt{N}]$

$$\begin{array}{cccccccc}
\sqrt{N} & \dfrac{\sqrt{N}+u_0}{d_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{k-1}}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}+u_k}{d_{k+1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\sqrt{N}+u_{\tau-1}}{d_\tau} \\
a_0 & a_1 & \cdots\cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots\cdots & a_\tau \\
\dfrac{\sqrt{N}-u_0}{d_0} & \dfrac{\sqrt{N}-u_1}{d_1} & \cdots & \dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k} & \dfrac{\sqrt{N}-u_{k+1}}{d_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\sqrt{N}-u_\tau}{d_\tau}
\end{array}$$

現在，我們引用第三節的結果來證明：

【定理13】　二次無理數$\sqrt{N}$之連分數的循環節從第二項開始，
即可設$\sqrt{N}=[a_0, \dot{a}_1, \cdots\cdots, \dot{a}_\tau]$

證：由引理八，$\sqrt{N}+[\sqrt{N}]>1$，故$\sqrt{N}-[\sqrt{N}]$爲循環項，

由引理七，$[\dfrac{\sqrt{N}+[\sqrt{N}]}{1}]=2[\sqrt{N}]\neq a_0$，故$a_0$不在循環節中。

【定理14】　設$\sqrt{N}=[a_0, \dot{a}_1, \cdots\cdots, \dot{a}_\tau]$
則$a_\tau=2a_0$

證：由引理七，$a_\tau=\left[\dfrac{\sqrt{N}+[\sqrt{N}]}{1}\right]=2[\sqrt{N}]=2a_0$

【定理15】 $a_k=a_{\tau-k}$ $k=1,2,\cdots\cdots,\tau-1$

證：由 $u_\tau=u_0$，$d_\tau=d_0=1$（循環項的定義），$a_\tau=2[\sqrt{N}]$

$u_\tau=[\sqrt{N}]$，$d_\tau=1$，$u_{\tau-1}=a_\tau d_\tau-u_\tau=[\sqrt{N}]=u_\tau$，

由引理十四知 $A_\tau=\bar{A}_\tau$，由定義八、九知

$a_k=a_{\tau-k}$ $k=1,2,\cdots\cdots,\tau-1$（$a_0$ 不在循環節中）

由定理十五及引理十六可知：

當我們求 $\sqrt{N}$ 的連分數時，先找到 $u_i=u_{i+1}$ 或 $d_i=d_{i+1}$

然後由對稱截割定理知，我們可找到 $u_{\tau-1}=u_\tau$，

可是，我們已經找到循環節了，這種情形使我們修飾對稱截割定理：

二次無理數 $\dfrac{\sqrt{N}+u_0}{d_0}$，利用模的定義，求得 $\dfrac{\sqrt{N}+u}{d}$（以N爲模），利用三線譜運算求得第一個循環項 $\dfrac{\sqrt{N}-u_k}{d_k}$，然後同時利用三線譜運算（往前），及引理七（往後），分別往前（下標取 f:foreword），往後（下標取 b:backward）一起進行運算，取得循環項 $\dfrac{\sqrt{N}-u_b}{d_b}$，$\dfrac{\sqrt{N}-u_f}{d_f}$，觀察

1. $u_b=u_{b+1}$ 或 $d_b=d_{b+1}$
2. $u_f=u_{f+1}$ 或 $d_f=d_{f+1}$
3. $u_b=u_f$ 且 $d_f=d_b$

如果3.滿足，則我們找到了循環節。

如果1.(2.)滿足，我們就停止向後（前）運算，然後往前（後）運算，找到滿足2(1)的 f(b)，於是我們找到半個循環節。

據以上所述，對於 $\sqrt{N}$，我們找到循環項 $\sqrt{N}-[\sqrt{N}]$，然後我們得三線譜：

$\sqrt{N}+[\sqrt{N}]$ →

$2[\sqrt{N}]$ →

往後找到了← $\sqrt{N}-[\sqrt{N}]$ → 然後往前找。

我們執行程式(一)可得 $\dfrac{\tau(1762;0,1)}{[\sqrt{1762}]}\fallingdotseq 2.15>2$，所以我們找到 $\tau(N)=\tau(N;0,1)\leq 2[\sqrt{N}]$ 的反例。

底下的資料都是從程式(一)得的結果猜測出來，然後驗證的：

r 為自然數

$\sqrt{r^2+1}=[r,\dot{2r}]$

$\sqrt{r^2+2r}=[r,\dot{1},\dot{2r}]$

$\sqrt{r^2+2}=[r,\dot{r},\dot{2r}]$

$\sqrt{r^2+2r-1}=[r,\dot{1},r-1,1,\dot{2r}]$ $r\geq 2$

$\sqrt{4r^2+4}=[2r,\dot{r},\dot{4r}]$

$\sqrt{4r^2+4r+5}=[2r+1,\dot{r},1,1,r,\dot{2(2r+1)}]$

m，n 為自然數，$m\geq 2$

$\sqrt{m^2n^2+m}=[mn,\dot{2n},\dot{2mn}]$

說明：筆者是先比對 $\tau(N)$ 資料的異同，然後看N具有的性質所得來的。

還有一個二次無理數的形式也很簡單：$-\sqrt{N}$，我們知道 $\sqrt{N}$ 與 $-\sqrt{N}$ 兩者的連分數有密切的關係。

【引理17】 $\tau(N)=1 \Longleftrightarrow N-[\sqrt{N}]^2=1$

證："$\Leftarrow$"由前面資料可知。

"$\Rightarrow$"設 $\sqrt{N}=[r,\dot{p}]$，其中 $r=[\sqrt{N}]$

由定理十四知，$p=2r$

而 $r+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{\ddots}}=\sqrt{r^2+1}$，故 $N-[\sqrt{N}]^2=1$

$N=r^2+S$，$r=[\sqrt{N}]$，S分兩種狀況：$1\leq S\leq r$，$r<S\leq 2r$

設 $\tau(N)=\tau$，$\sqrt{N}=[a_0,\dot{a_1},a_2,\cdots\cdots,\dot{a_\tau}]$

【定理16】 若 $1\leq S\leq r$，則 $-\sqrt{N}=[b_0,b_1,b_2,\dot{a_2},a_3,a_4,\cdots\cdots,a_\tau,\dot{a_1}]$

若 $r<s\leq 2r$，則 $-\sqrt{N}=[b_0',b_1',\dot{a_3},a_4,\cdots\cdots,a_\tau,a_1,\dot{a_2}]$

證：當 $r<s\leq 2r$，$\tau(N)\neq 1$，由引理十七知，

$-\sqrt{N}=[b_0',b_1',\dot{a_3},\cdots\cdots,a_\tau,a_1,\dot{a_2}]$ 的命題才能確立。

1^0 當 $1\leq s\leq r$ 時，$\sqrt{N}$ 與 $-\sqrt{N}$ 的三線譜：

	$\sqrt{N}=\sqrt{r^2+s}$	$\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r}{s}$	
連分數	r	$[\dfrac{2r}{S}]=a_1$	a_2 $\longrightarrow$

判斷線 $\sqrt{r^2+s}-r$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}-(s[\frac{2r}{s}]-r)}{s}=\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r}{s}-[\frac{2r}{s}]$

○ ○ ○ ○ ○ ○

$-\sqrt{N}=-\sqrt{r^2+s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r+1}{2r+1-s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r-s}{s}=\dfrac{\sqrt{r^2+1}+r}{s}-1$ 　相等

連分數 $-(r+1)$ 　 $[\dfrac{2r+1}{2r+1-s}]=1$ 　 $[\dfrac{2r-s}{s}]=[\dfrac{2r}{s}]-1$

判斷線 $-\sqrt{r^2+s}+r+1$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}-(r-s)}{2r+1-s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+1}+r}{s}-[\dfrac{2r}{s}]$

○ ○ ○ ○ ○ ○

於是 $b_0=-r-1$，$b_1=1$，$b_2=a_1-1$，$-\sqrt{N}=[b_0, b_1, b_2, \dot{a}_2, \cdots\cdots, a_\tau, \dot{a}_1]$

如 $\tau=1$，由引理十七知 $a_1=2r>1$，故 b_2 是自然數。

而 $-\sqrt{N}=[b_0, b_1, b_2, \dot{a}_1]$

如 $\tau=2$，則 $-\sqrt{N}=[b_0, b_1, b_2, \dot{a}_2, \dot{a}_1]$

2^0 當 $r\leq s\leq 2r$ 時，$\sqrt{N}$ 與 $-\sqrt{N}$ 的三線譜：

$\sqrt{N}=\sqrt{r^2+s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r}{s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}-(r-s)}{2r+1-s}$

連分數 　 r 　 $a=[\dfrac{2r}{s}]=1$ 　 $a_2=[\dfrac{s}{2r+1-s}]$ 　 $a_3\longrightarrow$

判斷線 $\sqrt{r^2+s}-r$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r-s}{s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}-(r-s+(2r+1-s)[\frac{s}{2r+1-s}])}{2r+1-s}$

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$-\sqrt{N}=-\sqrt{r^2+s}$ 　 $\dfrac{\sqrt{r^2+s}+r+1}{2r+1-s}$ 　相等

連分數 　 $-(r+1)$ 　 $[\dfrac{2r+1}{2r+1-s}]=1+[\dfrac{s}{2r+1-s}]$

判斷線 $-\sqrt{r^2+s}+r+1$ $\qquad \dfrac{\sqrt{r^2+s}-[(2r+1-s)[\frac{2r+1}{2r+1-s}]-(r+1)]}{2r+1-s}$

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

於是 $b_0=-(r+1)$ $b_1=a_2+1$，$-\sqrt{N}=[b_0, b_1, \dot{a}_3, \cdots, a_r, a_1, \dot{a}_2]$。

由定理十六知 $\sqrt{N}$ 與 $-\sqrt{N}$ 的循環節相同，設A，B分別爲 $\sqrt{N}$，$-\sqrt{N}$ 的循環節，則

(1) 當 $1 \leq s \leq r$，$B_1=A_2$

(2) 當 $r<s\leq 2r$，$B_1=A_3$

現在就來看一個例子：

【例8】 表 $\sqrt{19}$，$-\sqrt{19}$ 爲連分數。

解：$\sqrt{19}$ 的三線譜：

	$\sqrt{19}$	$\sqrt{19}+4$	$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$	$\frac{\sqrt{19}+2}{5}$	$\frac{\sqrt{19}+3}{2}$
	4	8	2	1	3
$\sqrt{19}-4$（循環項）		$\sqrt{19}-4$	$\frac{\sqrt{19}-2}{3}$	$\frac{\sqrt{19}-3}{5}$	$\frac{\sqrt{19}-3}{2}$

答：$\sqrt{19}=[4, \dot{2}, 1, 3, 1, 2, \dot{8}]$，$-\sqrt{19}=[-5, 1, 1, \dot{1}, 3, 1, 2, 8, \dot{2}]$。

五、註

這一段敘述模的由來。

$\frac{p_n}{q_n}$ 名爲 $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_r]$ 的第n個漸近值或漸近分數，即

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r]$$

由計算易得：

$$\left.\begin{array}{l} p_0=a_0,\ p_1=a_1a_0+1,\ p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2} \\ q_0=1,\ q_1=a_1,\ q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2} \end{array}\right\} \text{(I)}$$

利用歸納法及 p_1q_0 $p_0q_1=1$，可知：

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1} \cdots\cdots \text{(II)}$$

若α為無理數，我們有：

$$q_n\alpha-p_n=\frac{(-1)^n\delta_n}{q_{n+1}}，0<\delta_n<1，且\frac{\delta_n}{q_{n+1}}為一遞減數列。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

我們知道任一二次無理數可表為$\frac{c+d\sqrt{e}}{b}$，b, c, d, e為整數，$b\neq 0$，$e>0$

且不能表為$\ell^2 m$，$\ell>1$

定理：二次無理數皆可表為循環連分數。

證明：設$\frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1}$的三線譜：

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1} & & \rightarrow & & \rightarrow & \frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2} & \\ a_0 & & \rightarrow & a_n & & a_{n+1} & \\ & \rightarrow & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \end{array}$$

由（I）得：

$$\frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1}=\frac{\frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2}p_n+p_{n-1}}{\frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2}q_n+q_{n-1}}\quad（以\frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2}表a_{n+1}）$$

於是

$$\frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1}=\frac{c_2p_n+b_2p_{n-1}+d_2p_n\sqrt{e}}{c_2q_n+b_2q_{n-1}+d_2q_n\sqrt{e}}$$

$$(c_2q_n+b_2q_{n-1})c_1+d_1d_2q_ne-(c_2p_n+b_2p_{n-1})b_1=[b_1d_2p_n-(c_2q_n+b_2q_{n-1})d_1-c_1d_2q_n]\sqrt{e}$$

因e不為平方數，$\sqrt{e}$為無理數，又左右二式相等，

所以左右二式皆為0，整理得

$$(c_1q_{n-1}-b_1p_{n-1})b_2+(c_1q_n-b_1p_n)c_2+(d_1q_ne)d_2=0\cdots\cdots\cdots\text{IV}$$

$$(d_1q_{n-1})b_2+(d_1q_n)c_2+(c_1q_n-b_1p_n)d_2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{V}$$

由IV、V二式可解出$b_2:c_2:d_2$，而我們只要找到一組b_2、c_2、d_2即可，解得

$$b_2=\begin{vmatrix} c_1q_n-b_1p_n & d_1q_ne \\ d_1q_n & c_1q_n-b_1p_n \end{vmatrix}=(c_1q_n-b_1p_n)^2-d_1^2q_n^2e_1\cdots\cdots(\text{VI})$$

$$c_2=\begin{vmatrix} d_1q_ne & c_1q_{n-1}-b_1p_{n-1} \\ c_1q_n-b_1p_n & d_1q_{n-1}\end{vmatrix}=d_1^2q_nq_{n-1}e-(c_1q_n-b_1p_n)(c_1q_{n-1}-b_1p_{n-1})\cdots\cdots(\text{VII})$$

$$d_2=\begin{vmatrix} c_1q_{n-1}-bp_{n-1} & c_1q_n-b_1p_n \\ d_1q_{n-1} & d_1q_n\end{vmatrix}=d_1[c_1q_{n-1}q_n-b_1p_{n-1}q_n+b_1p_nq_{n-1}-c_1q_{n-1}q_n]=b_1d_1(-1)^{n-1}\cdots\cdots(\text{VIII})$$

由Ⅲ得

$$q_n\,\frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1}-p_n=\frac{\delta_n}{q_{n+1}}\cdots\cdots(\text{A})$$

$$q_{n-1}\,\frac{c_1+d_1\sqrt{e}}{b_1}-p_{n-1}=\frac{\delta_{n-1}}{q_n}\cdots\cdots(\text{B})$$

由(A)，(B)得

$$q_nc_1-p_nb_1=d_1q_n\sqrt{e}+\frac{b_1\delta_n}{q_{n+1}}\cdots\cdots(\text{IX})$$

$$q_{n-1}c_1-p_{n-1}b_1=d_1q_{n-1}\sqrt{e}+\frac{b_1\delta_{n-1}}{q_n}\cdots\cdots(\text{X})$$

(Ⅸ)代入(Ⅵ)，得

$$b_2=\frac{2d_1\sqrt{e}\ q_n}{q_{n+1}}\cdot(b_1\delta_n)+\frac{b_1^2\delta_1^2}{q_{n+1}^2}$$

$\because q_n<q_{n+1}$，$0<\delta_n<1$

$$|b_2|=\left|\frac{2b_1d_1\sqrt{e}q_n\delta_n}{q_{n+1}}+\frac{b_1^2\delta_n^2}{q_{n+1}}\right|<|2b_1d_1\sqrt{e}|+|b_1^2|=2|b_1d_1\sqrt{e}|+b_1^2$$

(Ⅸ)、(Ⅹ)代入(Ⅶ)得

$$c_2=b_1d_1\sqrt{e}\delta_{n-1}+b_1d_1\,\frac{q_{n-1}\sqrt{e}}{q_{n+1}}+\frac{b_1^2\delta_n\delta_{n-1}}{q_nq_{n+1}}$$

同理得

$|c_2|<|2b_1d_1\sqrt{e}|+|b_1^2|=2|b_1d_1\sqrt{e}|+b_1^2$

$|d_2|=|b_1d_1|$ 爲一定值。

故 b_2，c_2 之絕對值小於與$\langle p_n\rangle$，$\langle q_n\rangle$ 數列無關之數，即只有有限組(b_2，c_2，d_2)在三線譜第一線上，所以至少有二個相同的數組(b_2，c_2，d_2)，

即連分數會循環。

同時我們將（Ⅶ）代入 $\frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2}$ 得

$$\frac{c_2+d_2\sqrt{e}}{b_2}=\frac{c_2+(-1)^{n-1}\sqrt{b_1^2d_1^2e}}{b_2}$$

可寫成 $\frac{\sqrt{N}+u}{d}$ 的型式，其中 $d=b_2(-1)^{n-1}$ ， $u=c_2(-1)^{n-1}$

$N=b_1^2d_1^2e$ 是一定值，故我們可嚴格定出模的意義。

參考資料：

1. 數學發展史 〔王懷權〕
2. 數論導引 〔華羅庚〕
3. Turbo Pascal 程式設計
4. 數論十講 第五講：小數，p.45,46