1990年度日本公立大學入學考試數學試題及其解答

邱日盛

國立臺灣師範大學數學系

數學 I （總分100分，考試時間60分）

1（配分 30 ）

〔1〕設整式P(x) 滿足下列(A)，(B)兩個條件

(A) P(x) 以 x^2-4x+3 所除的餘式爲 $65x-68$

(B) P(x) 以 x^2+6x-7 所除的餘式爲 $-5x+a$。

這時，我們可求出 a = $\boxed{ㄅ}$

現在我們來求以 $x^2+4x-21$ 除 P(x) 的餘式 $bx+c$

由條件(A)可得 $\boxed{ㄆ}$ b + c = $\boxed{ㄇㄈㄉ}$

由 a = $\boxed{ㄅ}$ 及條件(B)可知 $\boxed{ㄊㄋ}$ b + c = $\boxed{ㄌㄍ}$

因此，可求出 b = $\boxed{ㄎ}$ ，c = $\boxed{ㄏㄐㄑ}$

〔2〕 從下列①～④中選擇適當的語句填入下列各文句中的 $\boxed{}$ 內，使各文句爲眞。

(1) 對於集合A，B，$A\cup B=A$ 是 $A\cap B=B$ 成立的 $\boxed{ㄒ}$

(2) 對於整數 n，n^2 爲12 的倍數是，n 爲12 的倍數的 $\boxed{ㄓ}$

(3) 三角形T的內切圓圓心（內心）與外接圓圓心（外心）重合是，T爲正三角形的 $\boxed{ㄔ}$

(4) 對於實數 a，b，c，$|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$ 是 $ab+bc+ca\geqq 0$ 成立的 $\boxed{ㄕ}$

① 充分且必要條件

② 必要條件，但非充分條件

③ 充分條件，但非必要條件

④ 非必要條件也非充分條件

2 （配分35 ）

設a爲常數，而考慮拋物線C_a :$y=-x^2+ax+a^2$

(1) 拋物線C_a 的頂點坐標是

$$\left(\frac{a}{\boxed{ㄅ}}, \frac{\boxed{ㄆ}}{\boxed{ㄇ}}a^2\right)$$

所以，頂點必在曲線 $y=\boxed{ㄈ}\ x^2$ 上。

(2) 設通過坐標平面上兩點A（−1，1），B（2，4）的直線爲ℓ，拋物線C_a 與直線ℓ 有共有點的a的範圍是

$$a \leqq \boxed{ㄉㄊ}, \quad a \geqq \frac{\boxed{ㄋ}}{\boxed{ㄌ}}$$

C_a 與ℓ的共有點坐標是，$a=\boxed{ㄉㄊ}$ 時爲（$\boxed{ㄍㄎ}$，$\boxed{ㄏ}$）

$a=\dfrac{\boxed{ㄋ}}{\boxed{ㄌ}}$時，爲$\left(\dfrac{\boxed{ㄐ}}{\boxed{ㄑ}}, \dfrac{\boxed{ㄒㄓ}}{\boxed{ㄔ}}\right)$

又C_a 與線段$\overline{AB}$ 共有相異兩點的a的範圍是

$$\frac{\boxed{ㄕ}}{\boxed{ㄖ}} < a \leqq \boxed{ㄗ}$$

3 （配分35 ）

設以坐標平面上的三點A（0，3），B（−1，0），C（2，1）爲頂點的△ABC 。

(1) △ABC 的外接圓的圓心是$\left(\dfrac{\boxed{ㄅ}}{\boxed{ㄆ}}, \dfrac{\boxed{ㄇ}}{\boxed{ㄈ}}\right)$，半徑是$\dfrac{\boxed{ㄉ}\sqrt{\boxed{ㄊ}}}{\boxed{ㄋ}}$

又$\sin\angle ABC=\dfrac{\boxed{ㄌ}}{\boxed{ㄍ}}$，△ABC 的面積是 $\boxed{ㄎ}$ ，因此，我們可求出△ABC 的內切圓半徑是$\dfrac{\sqrt{\boxed{ㄏㄐ}}-\sqrt{\boxed{ㄑ}}}{\boxed{ㄒ}}$

(2) 點P在△ABC 的邊上移動時，原點O與點P的距離的最大値是 $\boxed{ㄓ}$ ，最小値是 $\dfrac{1}{\boxed{ㄔㄕ}}$

數學Ⅱ（總分100分，考試時間60分）

① （配分50）

〔1〕 在坐標平面上，以原點O爲圓心，半徑爲2的圓的內接正六角形的頂點以順序爲A，B，C，D，E，F，而A的坐標爲（2，0），B在第一象限內。這時

(1) 向量$\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DE}-3\overrightarrow{FA}$ 以成分來表示，則成爲

$$\left(\boxed{ㄅㄆ},\ \boxed{ㄇㄈ}\sqrt{\boxed{ㄉ}}\right)$$

(2) 若t爲實數，則向量$\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC}$的長度爲最小時的t值爲$\dfrac{\boxed{ㄊ}}{\boxed{ㄋ}}$，這時其最小值爲$\sqrt{\boxed{ㄌ}}$

〔2〕 設平面上的四邊形ABCD具有$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，且$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DA}=2$，又令$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{b}$

(1) 若$\overline{CD}$的中點爲M，則由於∠BCM=$\boxed{ㄍㄎ}$，所以$\overline{BM}=\sqrt{\boxed{ㄏㄐ}}$。又

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\boxed{ㄑ}}{\boxed{ㄒ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ㄓ}}{\boxed{ㄔ}}\vec{b}\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(2) 在$\overline{AB}$上取點P，設$\overline{PC}$與$\overline{BM}$的交點爲Q，若$\overline{PQ}:\overline{QC}=1:2$時，$\overline{AP}:\overline{PB}$與$\overline{BQ}:\overline{QM}$是如何，我們來求求看。

設$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA}$，則

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{\boxed{ㄕ}}{\boxed{ㄖ}}(\vec{a}+t\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

所以，由①及②可知$t=\dfrac{\boxed{ㄗ}}{\boxed{ㄘ}}$，因此

$\overline{AP}:\overline{PB}=\boxed{ㄙ}:\boxed{ㄚ}$　　$\overline{BQ}:\overline{QM}=\boxed{ㄛ}:\boxed{ㄜ}$

又　$\overline{BQ}=\dfrac{\boxed{ㄝ}}{\boxed{ㄞ}}\sqrt{\boxed{ㄟㄠ}}$

② （配分50）

〔1〕 設函數$f(x)=x^3+ax^2+bx$在$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$時有極小值$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$。這時

(1) $a=\boxed{ㄅ}$，$b=\boxed{ㄆㄇ}$，而函數f(x)的極大值爲$\dfrac{\boxed{ㄈ}\sqrt{\boxed{ㄉ}}}{\boxed{ㄊ}}$。

(2) 在曲線 $y=f(x)$ 上的點 $P(x, y)$ 的切線的斜率m的值的範圍爲 $m \geqq \boxed{ㄋㄌ}$ 。因此，令 $m=\tan\theta$ ($0° \leqq \theta < 180°$)，則角 θ 值的範圍爲

$0° \leqq \theta < \boxed{ㄍㄎ}°$，$\boxed{ㄏㄐㄑ}° \leqq \theta < 180°$

(3) 將曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍的圖形，以 x 軸爲軸旋轉所成立體的體積必等於 $\dfrac{\boxed{ㄒㄓ}}{\boxed{ㄔㄕㄖ}}\pi$ 。

〔2〕 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots\cdots$ 是 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 連續出現 2^{k-1} 個

($k=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots$) 的數列。這時

(1) 到第 1000 項的和是

$$\boxed{P} + \frac{\boxed{ㄘㄙㄚ}}{2^{\boxed{ㄛ}}}$$

(2) 至第 n 項的和是100時，$n = 2^{\boxed{ㄜㄝㄞ}} - \boxed{ㄟ}$，因此 n 是 $\boxed{ㄠㄡ}$ 位的數，但 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 。

3 （配分 50 ）

上面寫上 1 到 9 中一個數字各一張的卡片共有 9 張。從其中任意取出 3 張卡片，以所寫的數字從小到大的順序，設爲 X，Y，Z，則

(1) 這樣的 X，Y，Z 的組的個數爲 $\boxed{ㄅㄆ}$ 。

(2) X，Y，Z 皆爲偶數的機率是 $\dfrac{\boxed{ㄇ}}{\boxed{ㄈㄉ}}$

(3) X，Y，Z 爲連續數字的機率是 $\dfrac{\boxed{ㄊ}}{\boxed{ㄋㄌ}}$

(4) $X=4$ 的機率是 $\dfrac{\boxed{ㄍ}}{\boxed{ㄎㄏ}}$

(5) X 能取的值是從 $\boxed{ㄐ}$ 到 $\boxed{ㄑ}$ 的整數，若整數 k 滿足 $\boxed{ㄐ} \leqq k \leqq \boxed{ㄑ}$ 時，

$X=k$ 的機率是 $\dfrac{(\boxed{ㄒ}-k)(\boxed{ㄓ}-k)}{\boxed{ㄔㄕㄖ}}$

又 X 的期待值（平均值）是 $\dfrac{\boxed{ㄗ}}{\boxed{ㄘ}}$

日本公立大學入學考試數學試題解答

數學 I

題號（配分）	試題記號（配分）		解答
1 (30)	$a = \boxed{ㄅ}$	(3)	$a = 2$
	$\boxed{ㄆ}\, b + C = \boxed{ㄇㄈㄉ}$	(4)	$3b + C = 127$
	$\boxed{ㄊㄋ}\, b + C = \boxed{ㄌㄍ}$	(4)	$-7b + C = 37$
	$b = \boxed{ㄎ}$	(2)	$b = 9$
	$C = \boxed{ㄒㄐㄑ}$	(2)	$C = 100$
	$\boxed{ㄒ}$	(3)	1
	$\boxed{ㄓ}$	(4)	2
	$\boxed{ㄔ}$	(4)	1
	$\boxed{ㄕ}$	(4)	3
2 (35)	$\left(\frac{a}{\boxed{ㄅ}}, \frac{\boxed{ㄆ}}{\boxed{ㄇ}} a^2\right)$	(6)	$\left(\frac{a}{2}, \frac{5}{4} a^2\right)$
	$\boxed{ㄈ}\, x^2$	(4)	$5x^2$
	$a \leqq \boxed{ㄉㄊ}$	(3)	$a \leqq -1$
	$a \geqq \frac{\boxed{ㄋ}}{\boxed{ㄆ}}$	(3)	$a \geqq \frac{7}{5}$

題　號（配分）	試題記號（配分）		解　　答
	($\boxed{ㄍㄎ}$, $\boxed{ㄏ}$)	(4)	$(-1, 1)$
	$\left(\dfrac{\boxed{ㄐ}}{\boxed{ㄑ}}, \dfrac{\boxed{ㄒㄓ}}{\boxed{ㄔ}}\right)$	(4)	$\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$
	$\dfrac{\boxed{ㄕ}}{\boxed{ㄖ}} < a \leqq \boxed{ㄗ}$	(11)	$\dfrac{7}{5} < a \leqq 2$
	$\left(\dfrac{\boxed{ㄅ}}{\boxed{ㄆ}}, \dfrac{\boxed{ㄇ}}{\boxed{ㄈ}}\right)$	(6)	$\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$
	$\dfrac{\boxed{ㄉ}\sqrt{\boxed{ㄊ}}}{\boxed{ㄋ}}$	(5)	$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
	$\dfrac{\boxed{ㄌ}}{\boxed{ㄍ}}$	(5)	$\dfrac{4}{5}$
	$\boxed{ㄎ}$	(5)	4
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{ㄏㄐ}} - \sqrt{\boxed{ㄑ}}}{\boxed{ㄒ}}$	(5)	$\dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$
	$\boxed{ㄓ}$	(4)	3
	$\dfrac{1}{\boxed{ㄔㄕ}}$	(5)	$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

數學Ⅱ

題號（配分）	試題記號（配分）	解答
1 (50)	$(\boxed{\text{ㄅㄆ}}, \boxed{\text{ㄇㄈ}}\sqrt{\boxed{\text{ㄉ}}})$ (6)	$(-4, -4\sqrt{3})$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄊ}}}{\boxed{\text{ㄋ}}}$ (4)	$\dfrac{1}{2}$
	$\sqrt{\boxed{\text{ㄌ}}}$ (4)	$\sqrt{3}$
	$\boxed{\text{ㄍㄎ}}$ (3)	60
	$\sqrt{\boxed{\text{ㄏㄐ}}}$ (4)	$\sqrt{13}$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄑ}}}{\boxed{\text{ㄒ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ㄓ}}}{\boxed{\text{ㄔ}}}\vec{b}$ (6)	$\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄕ}}}{\boxed{\text{ㄖ}}}$ (6)	$\dfrac{2}{3}$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄗ}}}{\boxed{\text{ㄘ}}}$ (5)	$\dfrac{1}{3}$
	$\boxed{\text{ㄙ}} : \boxed{\text{ㄚ}}$ (4)	$2 : 1$
	$\boxed{\text{ㄛ}} : \boxed{\text{ㄜ}}$ (4)	$4 : 5$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄝ}}}{\boxed{\text{ㄞ}}}\sqrt{\boxed{\text{ㄟㄠ}}}$	$\dfrac{4}{9}\sqrt{13}$

題　號（配分）	試　題　記　號　（配分）	解　答
$\boxed{2}$ （50）	$\boxed{\text{ㄅ}}$ (4)	0
	$\boxed{\text{ㄆㄇ}}$ (4)	-1
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄈ}}\sqrt{\boxed{\text{ㄉ}}}}{\boxed{\text{ㄊ}}}$ (5)	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$
	$\boxed{\text{ㄋㄌ}}$ (4)	-1
	$\boxed{\text{ㄍㄎ}}$ (3)	90
	$\boxed{\text{ㄏㄐㄑ}}$ (3)	135
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄒㄓ}}}{\boxed{\text{ㄔㄕㄖ}}}$ (7)	$\dfrac{16}{105}$
	$\boxed{\text{ㄗ}}$ (4)	9
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄘㄙㄚ}}}{2^{\boxed{\text{ㄛ}}}}$ (8)	$\dfrac{489}{2^9}$
	$n=2^{\boxed{\text{ㄜㄝㄞ}}}-\boxed{\text{ㄟ}}$ (3)	$n=2^{100}-1$
	$\boxed{\text{ㄠㄡ}}$ (5)	31
$\boxed{3}$ （50）	$\boxed{\text{ㄅㄆ}}$ (7)	84
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄇ}}}{\boxed{\text{ㄈㄉ}}}$ (8)	$\dfrac{1}{21}$
	$\dfrac{\boxed{\text{ㄊ}}}{\boxed{\text{ㄋㄌ}}}$ (8)	$\dfrac{5}{42}$
	$\boxed{\text{ㄐ}}$, $\boxed{\text{ㄑ}}$ (4)	1 , 7

題　號（配分）	試　題　記　號　　　（配分）	解　　答
	$\dfrac{(\boxed{ㄒ}-k)(\boxed{ㄓ}-k)}{\boxed{ㄔㄕㄖ}}$　(8)	$\dfrac{(9-k)(8-k)}{168}$ 或 $\dfrac{(8-k)(9-k)}{168}$
	$\dfrac{\boxed{ㄗ}}{\boxed{ㄘ}}$　(8)	$\dfrac{5}{2}$