

數學實驗

——高中數學的啟發式教學——

葉東進

新竹科學園區實驗高中

一、前言

「觀察」與「發現」是科學的主要活動，因此它們也應當是科學教學的主要內容。一般的教學裡，或許是課堂時間的不足，或許是學生人數的過多，或許是教材設計上的刻板，或許是教具運用上的限制，許多的數學觀念及數學現象，都只是三言兩語地被帶過，不然便是霧裡看花般的僅能憑空猜想它的模樣。近來更由於速食文化的衝擊以及考試文化的掛帥，教與學的情況更是叫人擔憂。在觀念既不是清楚而現象又不是明白的情形下，學生便已被逼推着在成堆的解題浪潮中翻滾，有些幸運的稍能翻身，那些不幸的則只有沉淪。由於學習的過程只是被動的接納而非主動的觀察；學得的結論只是灌入的記憶而非自動的發現，因此習得的知識半生不熟，效果自然是事倍功半，既不知科學方法，沒有培養出半點科學態度，更不用說是科學的味道或是智慧了。

但是電腦的出現，以及軟體不斷推陳出新的開發，將會給啟發式教學帶來很大的生機，或將引起一場教學的革命。至少目前看來，前面提到的時間不足、人數過多、教材刻板、教具的限制等阻礙因素，都可以因為電腦及軟體的幫助而獲得不少紓解，如果加上教師的心態普遍地改變，那麼國內科學化的教學是可以預期，並且是樂觀的。

底下，我把近一年來，利用套裝軟體SYMPHONY 以及C語言，所設計出的教學素材其中的部分提出說明。雖然只是一個開始，但是一年的實驗經驗，我明白它們確實能夠提供啟發式教學的相當基礎。在讀者相信這些之前，我願意把SYMPHONY 的一些很好的主要功能作概略的介紹，而如果可能並請讀者諸君在閱畢本文後，不妨按文中所提之「教學方式」實際操作，實驗以驗實。

二、SYMPHONY 的主要功能

1. 它可以把螢幕視窗分割成二部分（甚或三部分、四部分），一部分顯示輸入的數據，另一部分則顯示對應的圖形。有些時候，同一份實驗數據所反應的實驗結果具有多方面的意義，這時候，可以通過多個視窗同時看到不同角度的結果。
2. 經由X座標與Y座標的範圍的設定，可以在視窗中見到對應圖形在大域中的整個變化，也可以見到對應圖形的某一點附近的局部狀況。
3. 在一個座標系上，可以同時顯示多個函數圖形，方便其間的比較。
4. 數據的編輯快速方便。

實際的教學內容中，我們可以從兩個層面來考慮：

第一，教師僅僅提供素材的成品，學生只須在終端機上，針對教學目標所擬定的教學方式逐步輸入實驗的數據，而觀察對應之實驗結果。經過多次的實驗，去發現實驗結果的規律性。僅僅如此便已充分地改善了傳統注入式教學，提供了「觀察」與「發現」的科學教學活動。

第二，學生在不滿足於僅僅提供現成的實驗素材，而想自己設計出一些其它實驗素材時，編輯功能的解說便可列為第二層面的教學內容。依據我的經驗，花上四堂課的時間，大部分的學生便已經能夠熟悉軟體的主要編修功能而作出一些素材了。當然，內容較為複雜困難的素材需要更為深入的編輯技巧，它有賴個人的智慧與探究。

三、素材介紹

本文所舉的教學素材，按「教學目標」、「教學方式」與「建議」三項分別逐一說明。

素 材 1

- (1) 教學目標：二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 a 、 b 、 c 的值對圖形的影響，特別是 a 值的正負決定拋物線開口的取向以及 $|a|$ 的大小決定開口的大小，觀察並發現其間的關係。
- (2) 教學方式：①固定 b 與 c 值，輸入不同的正負 a 值，觀察圖形的變化。
②固定 a 與 b 值，輸入不同的 c 值，尋找 c 值的對應幾何意義。

③固定 c 值，輸入不同的 a 與 b 值，觀察拋物線的頂點位置，尋找其與 a 、 b 值的關係。

④綜合①～③的觀察結論，指定學生輸入 a 、 b 、 c 值，要求學生在輸入之前，依觀察結論猜測圖形的模樣與頂點位置，並與輸入數據後所得圖形相印證，反覆練習。

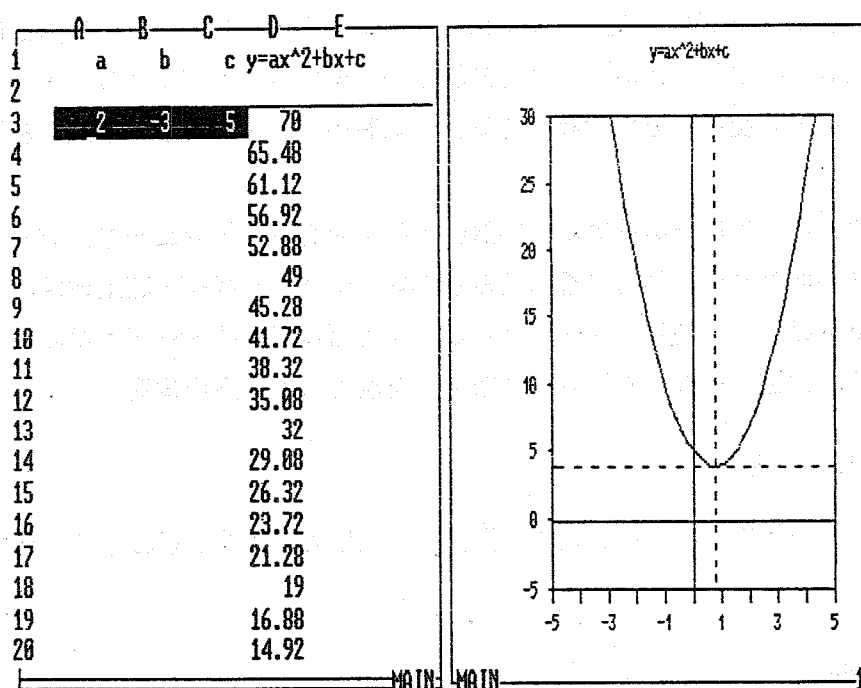
⑤作出結論，教師並予論理。

(3) 建議：可以設計類似素材：

①一次函數 $y = ax + b$ 的係數 a 、 b 的值對圖形的影響，找其意義並作結論。

②高次函數的概圖。

附：素材1 的二次函數是 $y = 2x^2 - 3x + 5$ 。



素材 1

素材 2

(1) 教學目標：折線函數 $y = a_1 |x - b_1| + a_2 |x - b_2| + a_3 |x - b_3|$ 的折點位置與 b_1 、 b_2 、 b_3 值的關係。在 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ 時， $|x - b_1| + |x -$

$b_2 |x - b_3|$ 的最小值出現在何處？

(2) 教學方式：①固定 a_1 、 a_2 、 a_3 的值，輸入隨意的 b_1 、 b_2 、 b_3 值，觀察折點位置，重複練習，並得結論。

②固定 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ，輸入隨意的 b_1 、 b_2 、 b_3 值，觀察 $|x - b_1| + |x - b_2| + |x - b_3|$ 的最小值所在，並得結論。

③對於①、②之結論，教師須予論理。

(3) 建議：①一般的折線函數型態為：

$$y = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^n a_k |x - b_k|$$

可以設計來觀察。

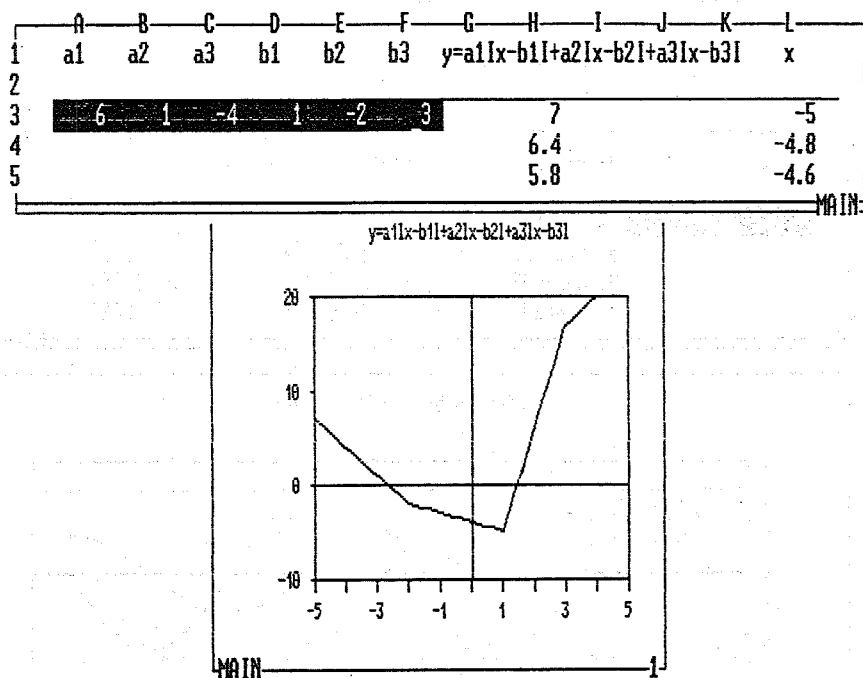
②在座標系上給出一已知折線圖，要求學生找回該折線函數的表式。

③設計型如：

$$y = \left| |x - a_1| - a_2 \right| - a_3$$

的函數，觀察其圖形，並作結論。

附：素材 2 的折線函數是 $y = 6|x - 1| + |x + 2| - 4|x - 3|$ 。

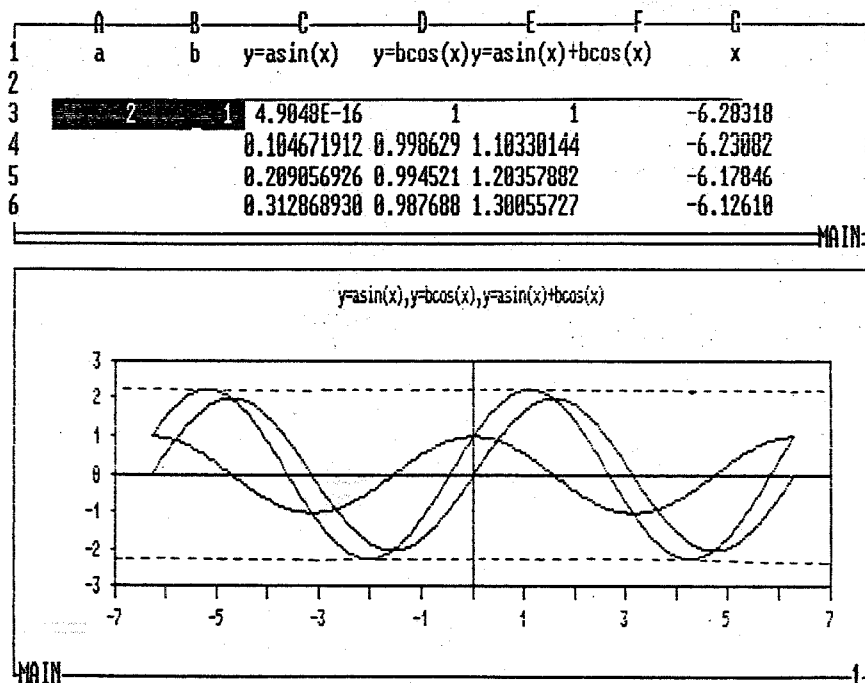


素 材 2

素 材 3

- (1) 教學目標：由已知函數 $y = a \sin x$ 與 $y = b \cos x$ 所結合的函數， $y = a \sin x + b \cos x$ 仍為一週期函數，探究其週期、振幅與圖形。
- (2) 教學方式：①輸入任意的 a 、 b 值，觀察 $y = a \sin x + b \cos x$ 的週期仍為 2π ，其圖形仍為一正弦函數。
- ②注意 $y = a \sin x + b \cos x$ 的圖形介於兩直線：
 $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ 之間，其振幅為 $2\sqrt{a^2 + b^2}$ 。
- ③輸入 $a=b=1$ ，注意 $y = \sin x + \cos x$ 的圖形與 $y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的圖形全等(如果螢幕可以彩色顯示，兩者的圖形最好異色處理)。
- (3) 建議：①設計 $y = a \sin t_1 x$ 與 $y = b \cos t_2 x$ ，觀察 $y = a \sin t_1 x + b \cos t_2 x$ 的週期與 t_1 、 t_2 之值的關係，找出其週期的計算公式。
- ②從上述教學方式的觀察所得印象，再來處理 $y = \sin x + \cos x$ 如何化約成 $a \sin(x - \theta)$ ，論理較有說服性。

附：素材 3 的函數是 $y = 2 \sin x + \cos x$ 。



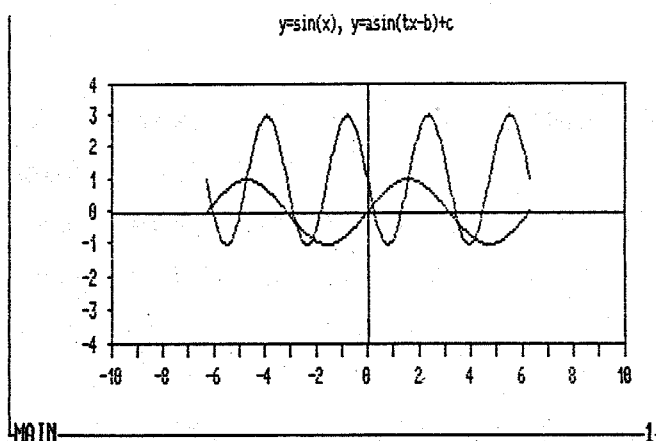
素 材 3

素 材 4

- (1) 教學目標：函數圖形的平移與伸縮。以 $y = a \sin(tx-b)+c$ 為例，觀察它如何從原始函數 $y = \sin x$ ，經過平移與伸縮等作用而得到圖形。
- (2) 教學方式：
- ① 固定 $a=1, t=1, c=0$ ，輸入 b 值，觀察平移作用。
 - ② 固定 $a=1, t=1, b=0$ ，輸入 c 值，觀察平移作用。
 - ③ 固定 $t=1, b=0, c=0$ ，輸入 a 值，觀察伸縮作用（即圖形的振幅的變化）。
 - ④ 固定 $a=1, b=0, c=0$ ，輸入 t 值，觀察伸縮作用（即圖形的週期的變化）。
 - ⑤ 指定學生輸入 $a、t、b、c$ 等之值，在輸入前先猜測函數 $y = a \sin(tx-b)+c$ 的圖形，並與輸入後之實際圖形作比較，反覆練習，作出結論。
- (3) 建議：
- ① 教師務必提示學生，在①～④的觀察中，特別留意平移的方向及長度、伸縮的方向及倍數。作成結論。
 - ② 設計其它函數的平移與伸縮，像是：
 $y = x^2 \rightarrow y = a(x-b)^2 + c$
 $y = 2^x \rightarrow y = 2^{a(x-b)+c}$
 $y = \log_{10} x \rightarrow y = \log_{10} a(x-b)+c$
 - ③ 也可以考慮對稱作用，像是：
 $y = \sin x \rightarrow y = \sin |x|$ ； $y = 2^x \rightarrow y = 2^{|x|}$ 等。

附：素材4 的函數是： $y = \sin x \rightarrow y = 2 \sin(2x-\pi)+1$ 。

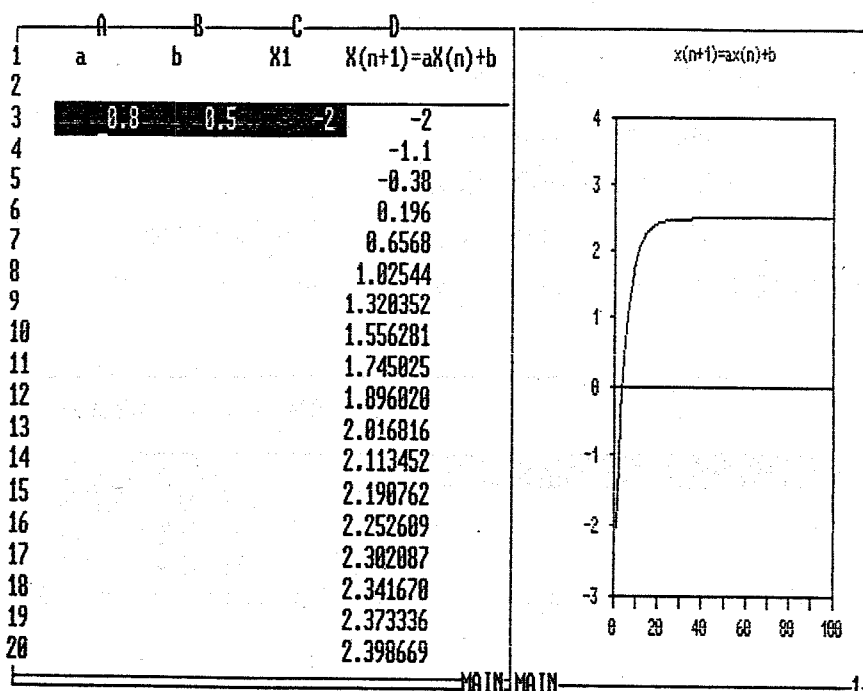
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	t	b	c	$y = a \cdot \sin(tx-b)+c$		x	$y = \sin(x)$
2								
3	2	2	3.141592	1	1	-6.28318	2.5E-16	
4					0.790943	-6.23082	0.052335	
5					0.584176	-6.17846	0.104528	
6					0.381966	-6.12610	0.156434	
	MAIN							



素 材 4

素 材 5-1

- (1) 教學目標：數列 $x_{n+1} = ax_n + b$ 的斂散性及其意義。
- (2) 教學方式：①固定 $b=0$ ，輸入 a 值，觀察等比數列 $x_{n+1} = ax_n$ 的斂散情況，提示學生注意 $|a| \leq 1$ 與 $|a| > 1$ 時，數列曲線的穩定與否。
- ②固定 $a=1$ ，輸入 b 值，觀察等差數列。



素 材 5-1

- (3) 建議：一個收斂數列 x_n ，其收斂值為 x 是指：在 n 大到一相當程度後，其數列值的變化即趨向 α 而穩定，這個事實一定要特別指出，從所附之數列曲線的變化便可明白其義。

附：素材 5—1 的數列是： $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}$ ， $x_1 = -2$

素 材 5-2

- (1) 教學目標：數列 $a_n = \frac{a_1n^2 + a_2n + a_3}{b_1n^2 + b_2n + b_3}$ 的斂散性及其意義。

- (2) 教學方式：①固定 $a_1 = b_1 = 0$ ，輸入 a_2 、 a_3 、 b_2 、 b_3 之值，

觀察數列 $a_n = \frac{a_2n + a_3}{b_2n + b_3}$ 的斂散情形，

特別要提示學生：(i) $a_2 = 0$ ， $b_2 \neq 0$

(ii) $a_2 \neq 0$ ， $b_2 = 0$

(iii) $a_2 \neq 0$ ， $b_2 \neq 0$ 等三種

情況時的斂散性，尤其是第 (iii) 情況時，注意收斂值與 $\frac{a_2}{b_2}$ 值的關係。

- ②觀察數列 $a_n = \frac{a_1n^2 + a_2n + a_3}{b_1n^2 + b_2n + b_3}$ 的斂散情形，

特別要提示學生：(i) $a_1 = 0$ ， $b_1 \neq 0$

(ii) $a_1 \neq 0$ ， $b_1 = 0$

(iii) $a_1 \neq 0$ ， $b_1 \neq 0$ 等三種

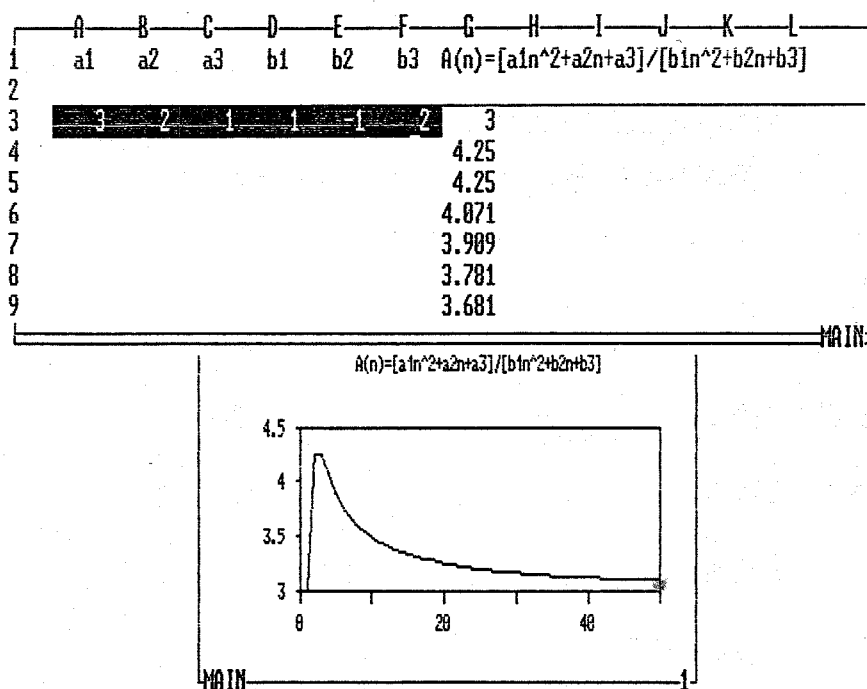
情況時的斂散性，尤其是第 (iii) 情況時，注意斂散值與 $\frac{a_1}{b_1}$ 值的關係。

- ③對於①與②中所發現的關係，教師須予論理。

- (3) 建議：①多注意數列曲線的變化所顯示的斂散意義。

- ②考慮 $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ 的斂散性。

附：素材 5—2 的數列是： $a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - n + 2}$



素 材 5—2

素 材 6-1 , 6-2

(1) 教學目標：牛頓法求三次方根的近似值。

(2) 教學方式：①求 $\sqrt[3]{5}$ 的近似值。先輸入第一個近似值 3，

觀察接續的近似值數列：

2.185185，1.805827，1.714973，……

並從圖形中瞭解牛頓法的意義。

可以輸入其它數，像是 2，3，4，6，7，8 等，

甚至 3.5，4.11，以觀察 $\sqrt[3]{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ ， $\sqrt[3]{4}$ ，……， $\sqrt[3]{4.11}$ 等的近似值及對應圖形所顯示的意義。

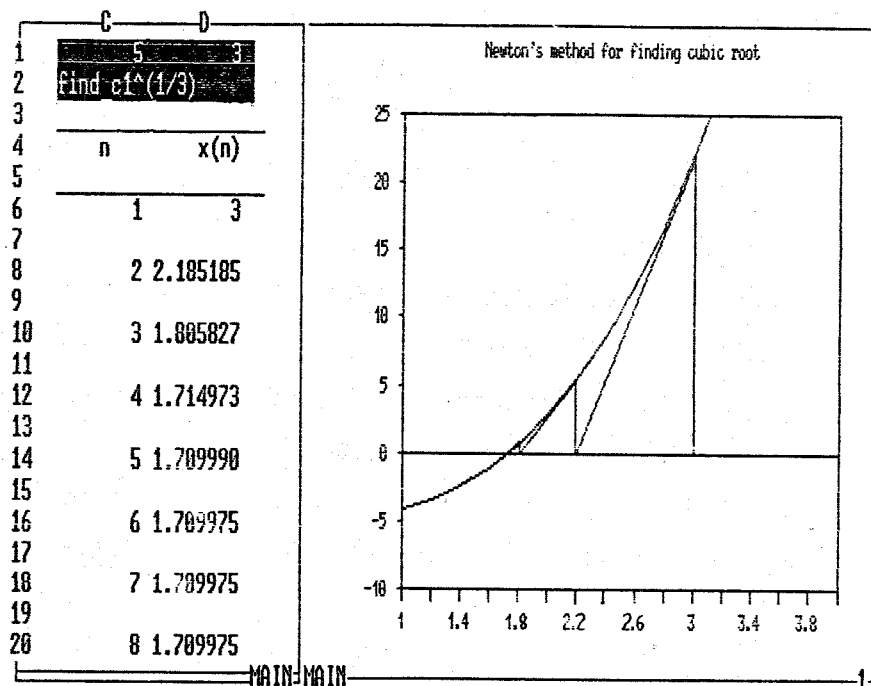
②可以從三次方根的右端輸入第一個近似值，也可以從左端輸入第一個近似值，比較兩者的不同。

(3) 建議：①設計牛頓法求平方根的近似值。

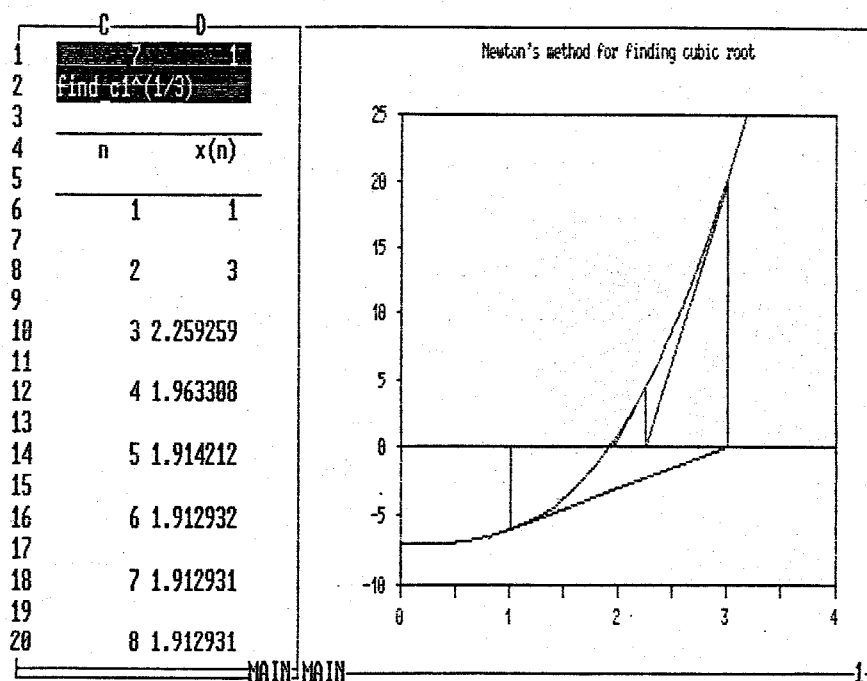
②設計一般函數求近似根的牛頓法，並比較輸入第一個近似值是右近似抑或左近似的不同與利弊所在。

附：素材 6—1 ①是求 $\sqrt[3]{5}$ 的近似值，取 3 是它的一個右近似。

素材 6—2 ②是求 $\sqrt[3]{7}$ 的近似值，取 1 是它的一個左近似。



素 材 6—1



素 材 6—2

素 材 7

- (1) 教學目標： n 個人中至少有二人同一天生日的機率多大？

答案是： $1 - \frac{P^{365}_n}{365^n}$ ，這個數值幾乎不好在課堂的黑板上算出，尤其

在 n 稍大時。

- (2) 教學方式：①借此問題，使學生知道電腦在計算能力上的驚人表現。

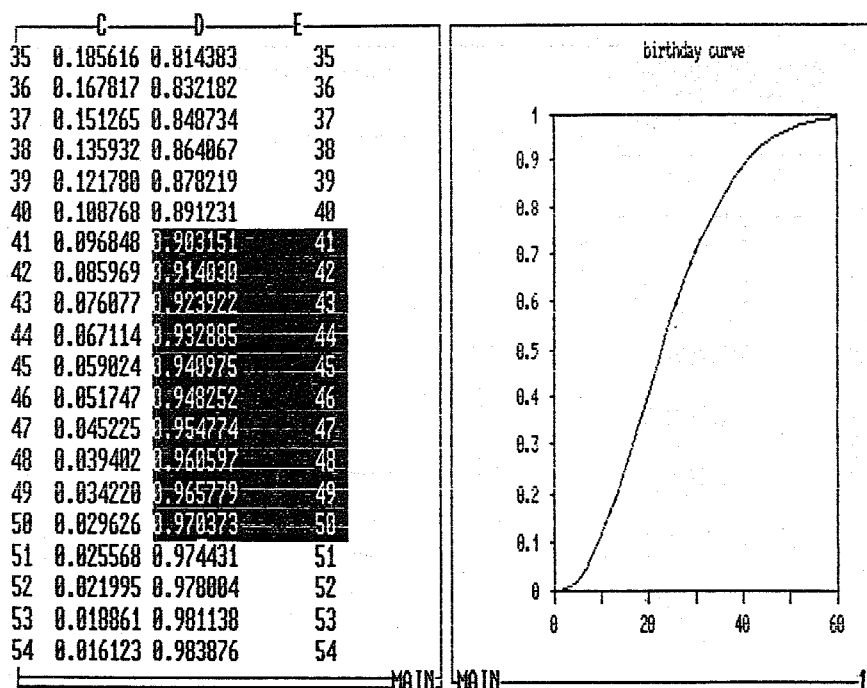
②指出在 $n=41$ 時，機率便已高達九成；而在 $n=50$ 時，甚至高到九成七，換言之，50人一班的教室中，幾乎可以說將有二人是同一天生日。真不可思議，與我們的直覺有相當差距。

③觀察生日曲線，似乎頗能引發許多聯想，鼓勵學生試試看。

- (3) 建議：許多排列、組合的問題，當數涉甚大時，均可借助電腦的演算能力解決。

電腦在科技上所展示的實力是可以理解的。

附：素材7 中的黑影部分顯示 $n=41$ 至 $n=50$ 時的機率。



素 材 7

素 材 8

- (1) 教學目標：泰勒展開式的意義。

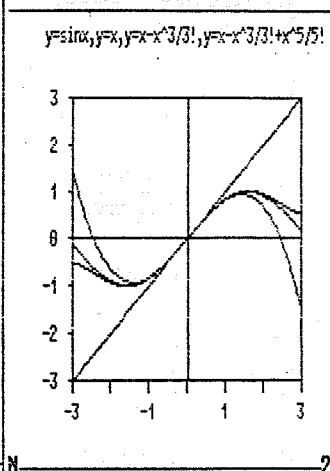
以 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ 為例。

- (2) 教學方式：① $y = \sin x$ 在 $x=0$ 的一階逼近是 $y = x$ ， $y = \sin x$ 在 $x=0$ 的三階逼近是 $y = x - \frac{x^3}{3!}$ ，而五階逼近則是 $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ ，…………逼近是什麼意義？三階逼近比一階逼近更好，五階逼近又比三階逼近更好，這是什麼意思？黑影部分的數據給了說明，而圖形所顯示的意義更為明白：在 $x=0$ 附近，直線 $y = x$ 近似曲線 $y = \sin x$ ，但是曲線 $y = x - \frac{x^3}{3!}$ 更近似 $y = \sin x$ ，而曲線 $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ 則比 $y = x - \frac{x^3}{3!}$ 更近似曲線 $y = \sin x$ 。

②利用座標的設定，把 $x = 0$ 附近的圖示展現的更清楚些，將有所發現。

- (3) 建議：設計其它函數的泰勒展開式，像是 $y = \cos x$ ， $y = e^x$ ， $y = \ln x$ ，並經此求出函數的近似值（數值分析）。

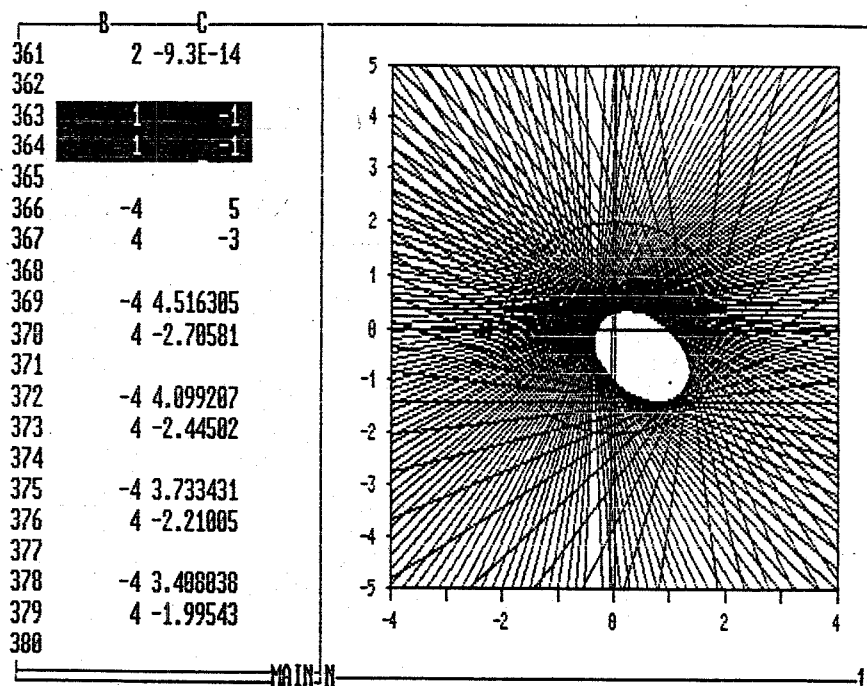
	B	C	D	E
1	sin(x)	x	$x - x^3/3!$	$x - x^3/3! + x^5/5!$
	B	C	D	E
116	-0.35836	-0.36651	-0.35831	-0.35836
117	-0.30981	-0.31415	-0.30899	-0.30981
118	-0.25881	-0.26179	-0.25880	-0.25881
119	-0.20791	-0.20943	-0.20790	-0.20791
120	-0.15643	-0.15707	-0.15643	-0.15643
121	-0.10452	-0.10471	-0.10452	-0.10452
122	-0.05233	-0.05235	-0.05233	-0.05233
123	0.2E-15	0.2E-15	0.2E-15	0.2E-15
124	0.052335	0.052359	0.052335	0.052335
125	0.104528	0.104719	0.104528	0.104528
126	0.156434	0.157079	0.156433	0.156434
127	0.207911	0.209439	0.207908	0.207911
128	0.258819	0.261799	0.258808	0.258819
129	0.309816	0.314159	0.308991	0.309817
130	0.358367	0.366519	0.358313	0.358368
131	0.406736	0.418879	0.406629	0.406737
132	0.453990	0.471238	0.453797	0.453991
133		0.5	0.499674	0.500002



素 材 9-1

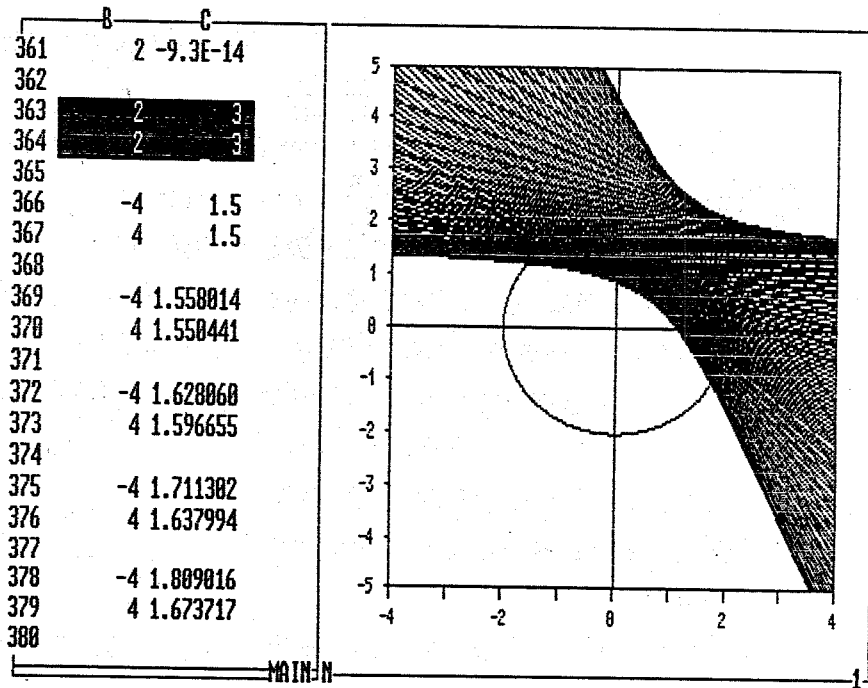
- (1) 教學目標：在一張紙上畫一個定圓，圓內取一定點，將此定點對準圓上某一點重疊，此時該紙被摺出一條直線痕跡，如果對準圓上的 n 個點作重疊，則將摺出 n 條直線痕跡，這些摺痕圍出一個橢圓。用電腦來展示這個幾何現象（數學上稱這些摺痕是橢圓的包絡線）。
- (2) 教學方式：
 - ①輸入圓內的一點的位置座標（素材(9)輸入的是點（1, -1）），觀察對應之包絡線。
 - ②輸入的圓內點是圓心（0, 0）時，對應圖形為何？
 - ③輸入的點是在圓上（比如（2, 0））時，又如何？
 - ④每一條摺痕其實都是該定點與重疊點所連線段的垂直平分線，依據此事實及橢圓的光學性質說明，這些直線摺痕都是橢圓的切線。
 - ⑤提示學生注意這個定點以及定圓圓心（0, 0）都是所圍出之橢圓的焦點。利用該定點距圓心之遠近的不同，所圍之橢圓的形狀（即扁平的程度）亦有不同，指出離心率這個概念。
 - ⑥當定點移到圓外時，將發生什麼現象？（參考素材 9-2）

附：素材 9-1 的定圓是 $x^2 + y^2 = 4$ ，定點是（1, -1）。

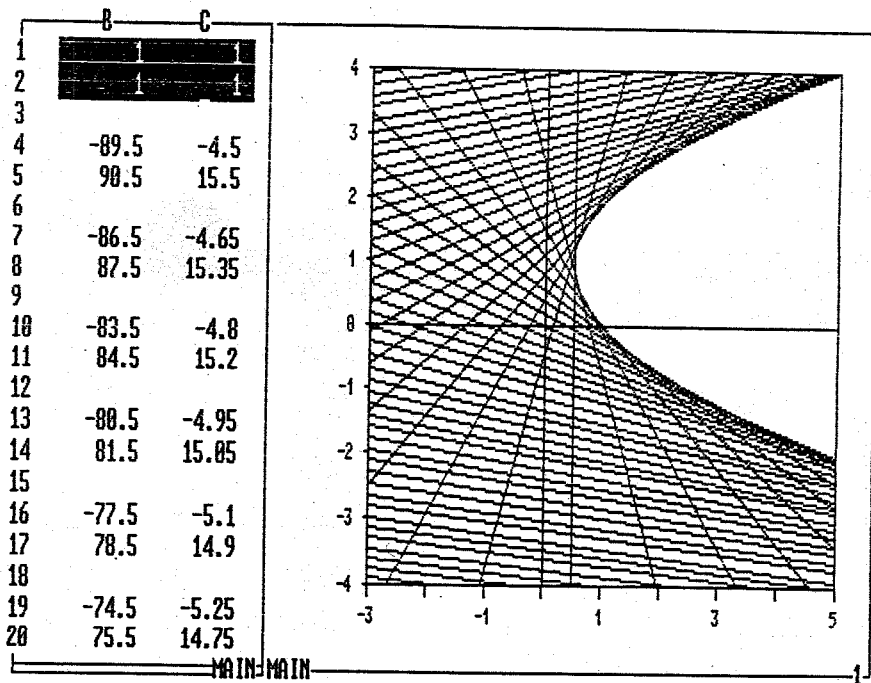


素 材 9-1

素 材 9-2, 9-3



素 材 9-2



素 材 9-3

- (1) 教學目標：承素材9—1，當定點落在圓外時，直線摺痕圍出一個雙曲線。用電腦觀察這個幾何現象。
- (2) 教學方式：①承素材9—1。
- ②注意定點與圓心就是雙曲線的焦點。
- ③說明這些直線摺痕都是雙曲線的切線。
- ④指出雙曲線有漸近線這件事實。
- ⑤觀察定點與圓心距離的遠近，相對圖形的不同。
- (3) 建議：①在一張紙上畫一條定直線，線外取一定點，將此定點對準線上某一點重疊，此時該紙被摺出一條直線摺痕，對準線上的 n 個點作重疊，便將摺出 n 條直線摺痕，這些摺痕圍出一個拋物線，定點是它的焦點，定線是它的準線。（參考素材9—3）
- 利用拋物線的光學性質說明上列事實。
- ②多觀察幾次圖形的形成，漸漸掌握橢圓、雙曲線、拋物線這三類錐線的幾何特徵。
- ③從射影幾何的觀點看，直線與圓沒什麼不同。因此，從摺痕產生三類錐線，這三類錐線也沒什麼不同。

附：素材9—2 的定圓是 $x^2 + y^2 = 4$ ，定點是 $(2, 3)$ 。

素材9—3 的定直線是 y 軸： $x = 0$ ，定點是 $(1, 1)$ 。

有時候，我們需要仔細觀察一個數學現象的從頭至尾完成的整個過程，像是平面上，滿足某些條件的點的軌跡的形成。由於目前一般軟體的繪圖總是在極短的時間內完成，無法詳細地看到軌跡形成的緩慢過程，這時候得利用某些語言來進行編寫。（也許可以控制繪圖的速率的套裝軟體已有開發完成，只是我還未接觸到。）

底下，介紹幾個利用C語言編寫的教學素材。

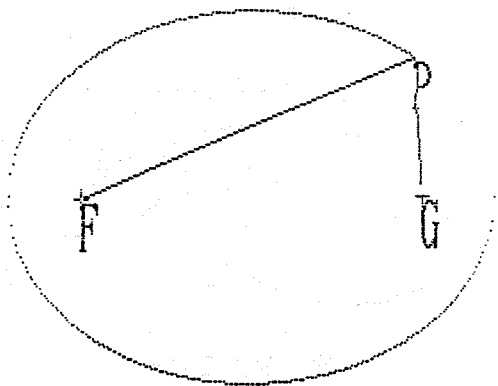
素 材 10

- (1) 教學目標：平面上，已知兩定點 F 、 G ，而動點 P 滿足：
 $\overline{PF} + \overline{PG} = \text{某定值} (> \overline{FG})$ ，觀察 P 點的軌跡的形成過程。
- (2) 教學方式：①利用MOUSE，設定 F 與 G 的位置以及定值的大小之後，RUN出
 P 的軌跡圖形（時間的快慢由MOUSE操作決定）。
- ②上述操作重複幾次，並觀察 $\overline{FG}$ 與所取定值之大小對於圖形之扁平程度的影響。

③教師說明橢圓的定義。

(3) 建議：①設計類似的有關雙曲線、拋物線定義的軌跡的素材。

②重複觀察現象多次之後，再向學生提出橢圓的定義問題。



素 材 10

素 材 11-1

(1) 教學目標：平面上，給定兩個不相外離的定圓F與G，動圓P與其中一圓內切，與另一圓外切，觀察圓心P的軌跡的形成過程。

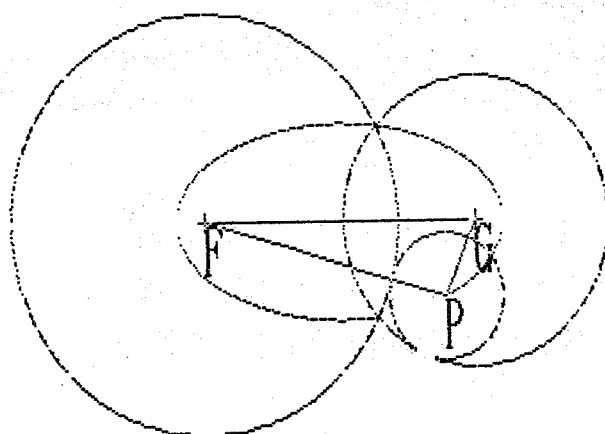
(2) 教學方式：①利用MOUSE 設定兩圓F與G的大小與位置，RUN 出P的軌跡圖形。

素材11-1之兩定圓F與G雖不外離，但是相交。

②利用MOUSE 設定圓F與圓G，使它們不外離也不相交，RUN 出P的軌跡圖形，並仔細觀察其過程。

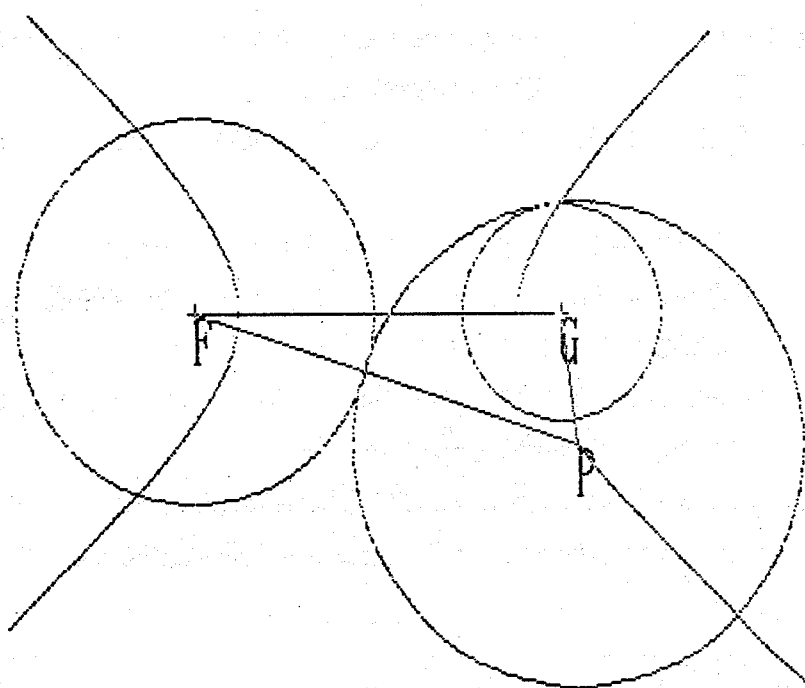
③教師說明上述兩者所RUN 出之軌跡均為橢圓，此事實所依之道理其實是素材10所揭示之橢圓的定義而已。

(3) 建議：重複觀察現象多次之後，讓學生先說說看軌跡為什麼是橢圓的道理，之後，再進行教學方式③，並注意F與G為橢圓之焦點的事實。



素 材 11 - 1

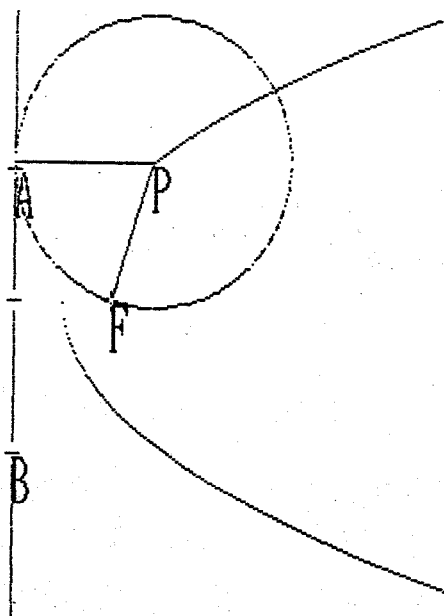
素 材 11-2



素 材 11 - 2

- (1) 教學目標：平面上，給定兩個外離的定圓F與G，動圓P與其中一圓內切而與另一圓外切，觀察圓心P的軌跡的形成過程。
- (2) 教學方式：①利用MOUSE設定兩圓F與G的大小與位置，RUN出P的軌跡圖形。
 ②素材11-2設定的圓P是與兩圓F與G中之一內切而與另一外切。也可以利用MOUSE設定P與F及G均外切或是P與F及G均內切。觀察P的軌跡圖形。
 ③教師說明上述所RUN出之軌跡均為雙曲線的道理（其實是雙曲線的定義而已）。
- (3) 建議：重複觀察現象多次之後，讓學生先說說看軌跡為什麼是雙曲線的道理，之後，再進行教學方式③。注意F與G為雙曲線之焦點。

素 材 11-3



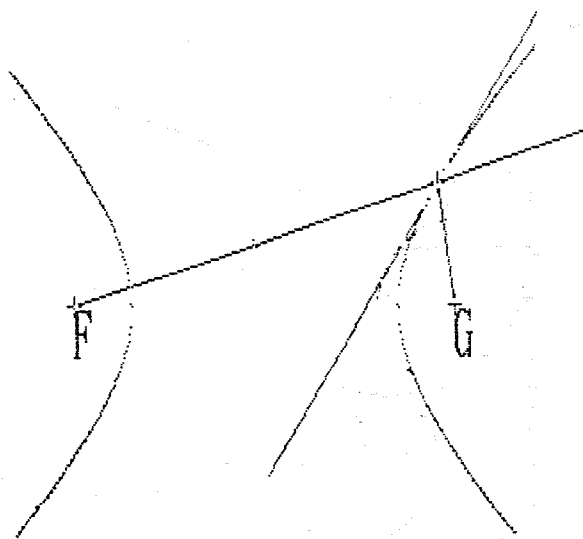
素 材 11-3

- (1) 教學目標：平面上，給定一直線AB及一定點F，F不在AB上，動圓P通過點F而且與直線AB相切，觀察圓心P的軌跡的形成過程。
- (2) 教學方式：①利用MOUSE設定直線AB及點F的位置，RUN出P的軌跡圖形。

- ②教師說明上述所RUN 出之軌跡爲拋物線的道理（其實是拋物線的定義而已）。
- (3) 建議：多觀察，再去尋找道理。

素 材 12

- (1) 教學目標：觀察並瞭解雙曲線的光學性質。
- (2) 教學方式：①利用MOUSE 設定雙曲線的焦點F與G的位置之後，再任意設定從G出發的光線，到達雙曲線後，其反射線之反向延線會通過另一個焦點F。重複觀察多次。
- ②教師給上述現象予論理。
- (3) 建議：設計類似的有關橢圓、拋物線的光學性質的教學素材。



素 材 12

四、後 語

數學實驗這個觀念，我是二年多前在清大數學系全任重教授的一次演講會中首次聞見，當時雖然覺得新鮮，不過沒有親身參與，無法體會出它對教學方式所可能帶來的巨大影響，後來在去年（1988）二月，也許是地緣之便，經由國科會科教處郭小姐的推薦，他邀我參與他主持的一個國科會計畫，內容便是數學實驗。受寵之餘猶覺惶恐，主

要是我先前對使用電腦教數學這件事的成效甚為懷疑，甚或稍許排斥，但是無論如何，能夠改變心態，接觸些新的事物、新的觀念並進而瞭解與掌握是一種挑戰，而這樣的挑戰對生命總會有正面的意義。這麼一想，便鼓起勇氣接受邀請參與計畫。我的工作是在實驗高中進行數學實驗並設法加以推廣。SYMPHONY 這套軟體就是這個時候從他的推介而引入我的教學中，其中的編輯概念與某些技巧經由他的解說及自己不斷的嘗試錯誤，終於逐漸領會熟悉。對全教授的熱心與鼓勵，在此，我要表示十分的尊敬與感謝。

另外，卓蘭高中詹逢麟老師在電腦知識方面的素養向為朋友所稱讚，徵得他的同意，由我規劃一些腳本，他則根據腳本利用C語言設計了一些有關從軌跡的觀點看圖錐曲線以及錐線的光學性質等素材，本文所舉的素材(10)、(11)及(12)便是他的傑作。通過MOUSE的操作所提供的方便，相信這些素材將會在錐線的教學上產生相當良好的效應；至少，我可以預期因為它們，學生對於錐線的意義及它的某些現象的瞭解上會更為清楚明白。在此，我也要感謝詹君的幫助。

數學實驗與電腦輔助教材是不同的兩回事，前者在啟發式教學上提供了相當基礎，見過上列素材的實際操作的我的同事們均異口同聲予以肯定。他們也都樂於把這些素材放進他們的教學中。因此數學實驗的推廣致普遍被接受，我抱持相當的肯定與樂觀。

當然，適用的軟體不會只有SYMPHONY，像是EUREKA、MATHCAD及DERIVE都有它們自身的價值，問題在於我們對它們的瞭解的深淺以及如何運用智慧把它們引用到實際教學的素材製作上。更何況軟體不斷地推陳出新，它們在教學上蘊涵的潛力也許比我們所能想像的還大。從一年的實際教學實驗中，我有理由相信：一場教學的革命確已開始進行中，沒有任何一位教師能夠避開它的風圈。