電磁輻射
——輻射的物理(二)

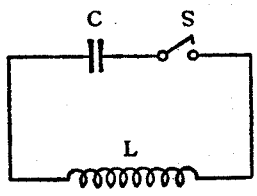
蘇賢錫

國立臺灣師範大學物理系

一、電振盪與無線電波

光是波動，但光波不是像水波，聲波或繩子傳遞的波那樣發生在有質量的物質之彈性波，而是電與磁的振動波，也就是所謂電磁波的波。

首先，就電振盪來想一想。爲了使物體繼續振動，在發生位移時，需要有令其恢復原狀的力，以及運動物體的慣性。圖一的電路包括線圈L，電容器C與開關S。首先，



圖一

將電容器充分充電，再關上開關，則電容器的電可以經過線圈來流動。縱然電容器放電了，由於線圈具有的慣性，這電流想繼續流動，於是電容器得以充電，只是其方向與原來相反。完全充電後，又開始經過線圈來放電。這種反覆振動就是電振盪的本質。這振動的固有頻率(proper frequency) ω_0 全視電容C與電感L而定，其值 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$。這歷程與彈簧振子相同，這些振動的運動方程式分別如下：

$$L\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{1}{C}q \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

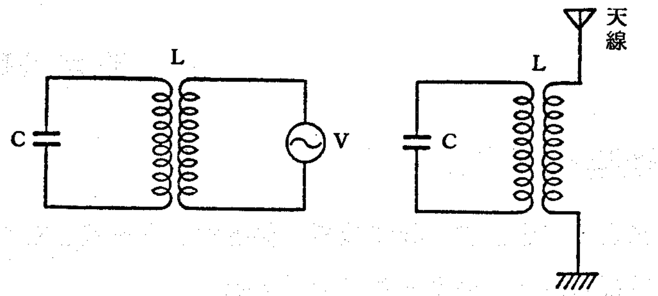
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

式中，q 是極板的電量，而 x 是彈簧的位移。LC 電路與彈簧振子的對應是

$$q \longleftrightarrow x, \quad L \longleftrightarrow m, \quad 1/C \longleftrightarrow k$$

此後，往往要以常見的彈簧振子來說明。

一般而言，因為線圈有內阻而使振動將逐漸衰減，但是由於加有外在的交流電壓，使這系統獲得能量的供應而不斷地繼續振動（見圖二）。當交流頻率等於電路的固有頻率時，共振隨即發生而電流大幅變大。這叫做強迫振盪（ forced oscillation ）。其相

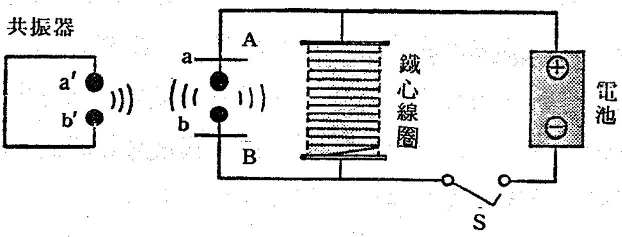


圖二

反的情況就是利用天線來發射訊號。

由無線電台或電視台的天線所發射出來的電波在空間傳遞，再經收音機或電視機所接收，這已為大家所熟悉。現在，且來看看其原理。

把兩塊電極彼此接近而留下些許隙縫的電花隙（ spark gap ），然後與一線圈並聯，接上電池，利用開關來接通或切斷電壓（見圖三）。先接通開關，再切斷開關，火星就在電荷隙中產生。這就表示，當電源切斷後，通過線圈的電流仍然因其慣性而繼續流

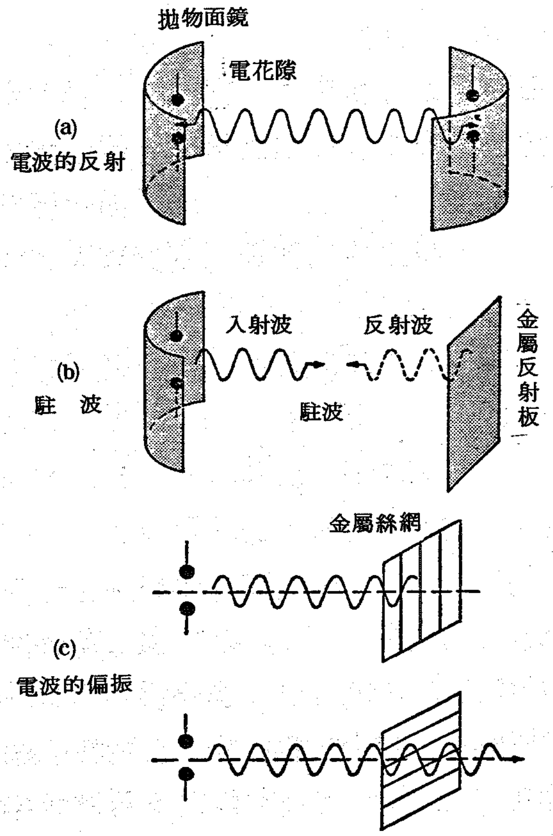


圖三

通，於是越過電花隙來放電。這時發生的電波在空間傳播，使鄰近電花隙（共振器）產生感應電壓，結果放出火星。這就是德國物理學家赫茲（ Heinrich Rudol Hertz, 1857 - 1894 ）在 1887 年所做的實驗。

赫茲做過多種實驗，證實電波具有波動性質。把兩個拋物面鏡相對而立，將電花隙

置於其中一個面鏡的焦點處〔見圖四(a)〕，發射電波，而在另一面鏡的焦點放置一個共振器，則火星隨之出現，可知電波已被面鏡所反射。如果將一金屬反射板垂直置於電花隙發出的電波之行進方向上，則被金屬板反射回來的波與來自電花隙的波重疊，互相干涉而產生駐波〔見圖四(b)〕。



圖四

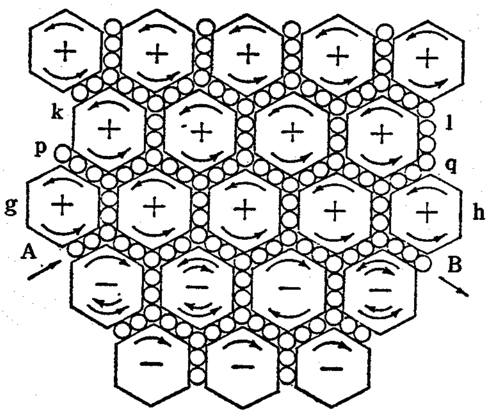
將含有好幾條平行金屬線的網子插入電波行進的方向，若電波的電場振動的方向平行於金屬線，則電波被金屬網所吸收而不能穿過。但是若兩者彼此垂直時，電波的吸收就不會發生，電波能夠穿過金屬網〔見圖四(c)〕，這是所謂電波的偏振。

二、馬克士威理論

英國物理學家馬克士威（James Clerk Maxwell, 1831-1879）讀過該國化學家及物理學家法拉第（Michael Faraday, 1791-1867）的論文集「電學的實驗研究」，覺

得整個電磁學可以從幾個簡單概念來開展。於是專心研究電磁學的數學公式化。他利用電與不縮流體在物理上的類似性質，逐一將高斯定律，安培定律，法拉第定律等予以數學化。

爲了說明電磁現象，馬克士威引進圖五所示的渦原子與在渦原子間扮演「空轉輪」角色的帶電微細渦(圖係轉載自其原始論文，但箭頭錯誤處仍保留下來，另外附上正確方向)。圖五中的正六邊形是渦原子，+(−) 符號表示渦流方向由紙面向上(下)，而小圓是微細渦。



圖五

且看電磁感應的情形。在圖五中，電流由A通往B的瞬間，AB 上方的 gh 排的渦原子開始旋轉，如圖所示，但在更上方 kl 排的渦原子仍然保持靜止。因此，pq 排上的微細渦開始由右向左移動。這就是感應電流，其方向與初通的電流AB 相反。由於 pq 排微細渦的運動，kl 排渦開始旋轉，繼而各渦依次開始旋轉，則微細渦變成「空轉輪」，而達成穩定狀態。在A往B的電流停止的瞬間，也可以作同樣的討論。馬克士威利用電磁現象與流體力學的類似性，因而其說明極爲複雜，令人不易瞭解。要使電磁理論成爲現在衆所熟知的完整體系，必須等待赫芝和德裔美國理論物理學家愛因斯坦(Albert A. Einstein, 1879-1955)的天才了。

其次是介電體的情形，如果它是絕緣體，粒子就不能在其中自由自在運動。於是，馬克士威假設粒子的位移$\vec{D}$與所加的電位差成正比，認爲位移的時間變率$\partial\vec{D}/\partial t$的作用相同於電流。根據位移電流(displacement current)的概念，假設介電體中的粒子之移動也是與普通電流[傳導電流(conduction current)]一樣，則電流與磁力線之間的交互作用，在絕緣體中與在以太(ether,即假想充斥於太空中的介質)也可以存

在。在介質中的一點所產生的這種電粒子振動，能夠透過這種交互作用而在介質中傳遞。馬克士威計算了這傳播速度，結果發現它與光速一致。他覺得這項事實不是偶然的巧合，於是寫信告訴法拉第：「這項巧合不僅是數值而已。根據我的看法，不管我的理論是否正確？我現有充分的理由來使人相信，光的介質與電磁的介質是同一物質。」也就是說：「光是一種電磁波」。

馬克士威在 1865 年發表的論文—「電磁場的動力學理論」中，有關介質結構的討論已經消失。他改採演繹法，由實驗事實展開理論，而導出所謂馬克士威方程式。但是馬克士威理論的數學相當複雜，又引進不必要的概念，因此，人們仍不易理解。例如，他認為電磁現象也是和光一樣需要以太；運動的傳遞不是在一瞬間內完成，而是需要時間，所以必須考慮一種彈性作用。他想藉力學介質的狀態變化來理解電磁作用，認為電磁場是實際物質所採取的一種狀態，唯有靠這物質的攜帶始能存在。這些牽強的論調引發不少矛盾，直到 1905 年愛因斯坦提出特殊相對論後，才獲得解決。

馬克士威方程式得以現在這種完美的公式來呈現，這要仰賴 25 年後因電磁波的發現而聞名的赫茲之研究。多虧赫茲的努力，很多人終於能夠理解馬克士威理論。奧地利理論物理學家波子曼（Ludwig Boltzmann, 1844-1906 ）看到這完美的四道方程式時，深受感動，說：「這是上帝創造的藝術品。」

以下關於公式的推導等詳細過程，敬請參考一般的電磁學教科書。本文將直接利用演算結果來討論。

三、馬克士威方程式及其性質

物質中的電磁場所遵循的馬克士威方程式是下列四式。設電場為 $\vec{E}$，電通密度為 $\vec{D}$，磁場為 $\vec{H}$，磁通密度為 $\vec{B}$，電荷密度為 ρ，而電流密度為 $\vec{j}$。

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \rho \qquad (2-1)$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \qquad (2-2)$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2-3)$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2-4)$$

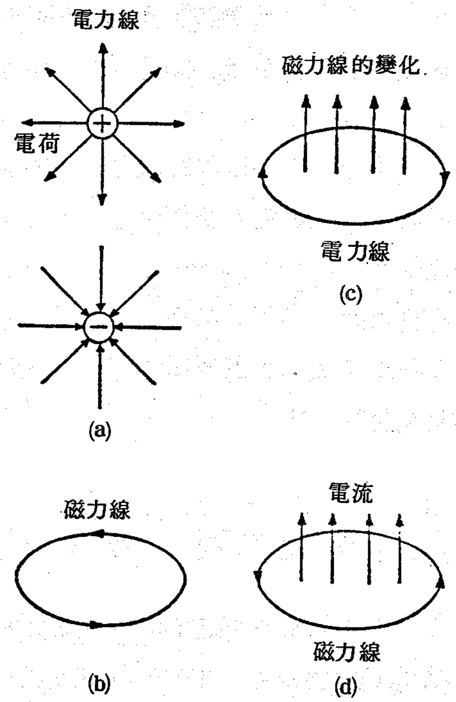
在物質中，若用介電常數 ε 與磁導率 μ ，則下列關係成立

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (2-5)$$

ε 與 μ 是視物質性質而定的常數，而式（２－５）對許多物質均可適用。雖然如此，就強介電體與強磁性體而言， ε 與 μ 不是常數而是 $\vec{E}$ 與 $\vec{H}$ 的函數。此外，各方異性晶體的 $\vec{D}$ 與 $\vec{E}$ ， $\vec{B}$ 與 $\vec{H}$ ，其方向有時候不一致。至於眞空時要使用眞空介電常數 ε_0 與眞空磁導率 μ_0 。

式（２－１）是電荷分布與電場隨時間而變動時的靜電場之廣義高斯定律〔見圖六(a)〕。式（２－２）是靜磁場的高斯定律之推廣，右邊等於０表示因爲沒有單磁極而磁力線永遠成爲封閉曲線〔見圖六(b)〕。

式（２－３）是法拉第的電磁感應定律，用以決定磁場隨時間的變化而產生的電動勢〔見圖六(c)〕。式（２－４）是安培定律的推廣，使傳導電流 $\vec{j}$ 與位移電流 $\partial \vec{D} / \partial t$ 造成磁場〔見圖六(d)〕。式（２－３）與（２－４）分別表示，磁場隨時間的變化會造成電場。反之，電場隨時間的變化會造成磁場。磁場（電場）透過電場（磁場）的形成來重新造成自己本身，而這新生的場之作用是要依照冷次定律（Lenz's law）來妨礙起初的場之變化。



圖六

以下簡單介紹往後將要使用的向量關係式。就微分算子 $\vec{\nabla} = (\partial / \partial x , \partial / \partial y , \partial / \partial z)$ 與純量 ϕ ，向量 $\vec{A} = (Ax , Ay , Az)$ 而言， $\vec{\nabla} \phi =$ grad ϕ（梯度）， $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\, \vec{A}$（散度）， $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{curl}\, \vec{A}$（旋度），或更具體寫成 $\vec{\nabla} \phi = (\partial \phi / \partial x , \partial \phi / \partial y , \partial \phi / \partial z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z} , \frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x} , \frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y} \right)$$

其次，且來研究在眞空中是$\rho=0$，$\vec{j}=0$的自由電磁場之性質。以下，除非有必要，否則指標［即 f（x）中的x］將予以省略。又因要討論$\vec{E}$與$\vec{B}$，故爲簡單起見將$\vec{B}$稱爲磁場。

$$\mathrm{div}\ \vec{E}=0 \tag{2-6}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B}=0 \tag{2-7}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2-8}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2-9}$$

現在，取式（2－8）的curl，利用 $\mathrm{curl}\ (\mathrm{curl}\ \vec{E})=\mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\ \vec{E})-\nabla^2\vec{E}$ 的關係與式（2－6），（2－9），可得

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{2-10}$$

同理，對$\vec{B}$也得

$$\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \tag{2-11}$$

這是自由電磁場的波動方程式。1871年，馬克士威根據這波動方程式來預言電磁波的存在。

爲了考察電磁波的性質，假設特別情形，$\vec{E}$與$\vec{B}$僅在Z方向發生變化，即

$$\vec{E}=\vec{E}(z,t),\quad \vec{B}=\vec{B}(z,t) \tag{2-12}$$

(a) 電磁波的橫波性

由式（2－6），（2－7）得

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{2-13}$$

式（2－8）與（2－9）分別變成

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\quad 0=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{2-14}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t},\quad \frac{\partial B_x}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t},\quad 0=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{2-15}$$

由式（2－13）與（2－14）及（2－15）等三式知，$E_z(z,t)$ 與 $B_z(z,t)$ 為常數，與 z 及 t 無關。這種場是靜電場或靜磁場，故現在所討論的變動中的場，其常數可令為零。

$$E_z(z,t)=0 \quad , \quad B_z(z,t)=0$$

由此可知，「電場與磁場是垂直於 z 軸的平面內之平面波，亦即橫波。」

(b) 電波與磁波的正交性

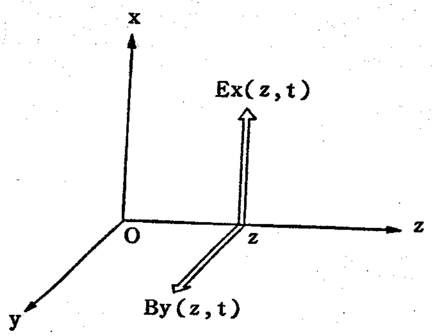
為使問題簡單，取 x 軸為電場方向［$E_x(z,t)$］（見圖七）。電場的 y 分量可視為 0，即

$$E_y(z,t)=0 \qquad (2-17)$$

這時，由式（2－14）的第一式與式（2－15）的第二式，得 $B_x=$ const，但如上述，常數可令為 0，即

$$B_x(z,t)=0 \qquad (2-18)$$

磁場只有 y 分量。總而言之，可知「電場與磁場彼此正交。」



圖七

(c) 電磁波的速度

式（2－14）的第一式，關於 z 微分，式（2－15）的第二式，關於 t 微分，即得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \qquad (2-19)$$

同理，對 B_y 可以推導得

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}=0 \qquad (2-20)$$

這是對應於式（2－10）與（2－11）的波動方程式。設波速為 c，則式（2－19）的解為

$$E_x(z,t)=f\left(t-\frac{z}{c}\right)+g\left(t+\frac{z}{c}\right) \qquad (2-21)$$

f 與 g 是合適的函數，分別代表 z 軸的正方向與負方向的行進波。為了簡單起見，僅考慮 f。將式（2－21）代入式（2－19），得

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.9979\times10^8 \text{ m/s} \qquad (2-22)$$

關於 B_y 也是一樣。電磁波與光，具有同一速度，根據這項事實，馬克士威預言：「光是一種電磁波。」

(d) 電磁波的色散公式

設式（2－21）的 f 爲朝著 z 方向行進的正弦波，則可表達如下：

$$E_x(z,t)=E_0\sin\omega\left(t-\frac{z}{c}\right) \qquad (2-23)$$

式中，$\omega=2\pi\nu$，叫做角頻率。設波長爲 λ，則 $\lambda\nu=c$ 的關係成立。令

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2-24)$$

k 代表 2π 公尺內所含的波數，故 k 叫做波數。式（2－23）可用 k 表示如下：

$$E_x(z,t)=E_0\sin(\omega t-kz) \qquad (2-25)$$

將式（2－25）代入式（2－19），再利用式（2－22），得

$$\omega^2=c^2k^2 \qquad (2-26)$$

這關係式叫做色散公式（dispersion formula）。反之，色散公式成立時，式（2－25）可視作波動方程式（2－19）的解。

(e) 電波與磁波的相位及大小

若電場由式（2－25）表示，則磁場可由式（2－15）的第一式求出。

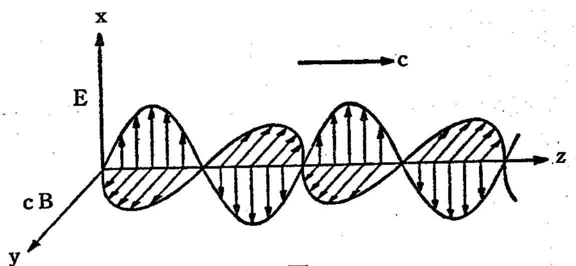
$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\omega E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\therefore B_y=-\frac{\omega E_0}{c^2}\int\cos(\omega t-kz)\,dz=\frac{\omega E_0}{c^2k}\sin(\omega t-kz)=\frac{E_x}{c}$$

$$B_y(z,t)=\frac{E_0}{c}\sin(\omega t-kz)=\frac{1}{c}E_x(z,t) \qquad (2-27)$$

B_y 的相位與 E_x 相同，而其大小爲 E_x 的 $1/c$。

由以上結果，可知電磁波的傳播情形如圖八所示。



圖八

(f) 電磁波的能量與動量

電磁場每單位體積的能量(即能量密度)u 如下式:

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \qquad (2-28)$$

單位時間通過單位面積的能通量(energy flux)S 與能量密度 u 之間的關係是 $S=cu$。此處,只有 E_x 與 B_y 有數值。由式(2-27)與(2-28)知,S 可以寫成

$$S=c\varepsilon_0E_x^2=\frac{c}{\mu_0}B_y^2=\frac{1}{\mu_0}(E_xB_y-E_yB_x)=\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})_z \qquad (2-29)$$

式中,$E_yB_x=0$,乃是為了造成向量積而特地寫成這種形式。S 叫做坡印廷向量(Poynting's vector),一般而言,表示如下:

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad (2-30)$$

坡印廷向量是1884年英國物理學家坡印廷(John Henry Poynting, 1852-1914)發現的。

至於平面波的情形,E_x 與 B_y 分別由式(2-25)與(2-27)表示,而能量密度 u 為

$$u=\left(\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{E_0^2}{2\mu_0c^2}\right)\sin^2(\omega t-kz)=\varepsilon_0E_0^2\sin^2(\omega t-kz) \qquad (2-31)$$

這時,坡印廷向量朝 z 方向,其大小為

$$S=S_z=\frac{1}{\mu_0}E_xB_y=c\varepsilon_0E_0^2\sin^2(\omega t-kz) \qquad (2-32)$$

由式(2-31)與(2-32)得下列關係式:

$$u=S/c \qquad (2-33)$$

其次,電磁波的動量向量 $\vec{p}$,定義如下:

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})=\frac{\vec{S}}{c^2} \qquad (2-34)$$

$\vec{p}$ 的方向與 $\vec{S}$ 相同,在本例中時朝向 z 方向,而其大小等於 S/c^2。利用能量密度 u,可得

$$p=\frac{u}{c} \qquad (2-35)$$

這是表示能量與動量的關係式,在量子論上也成立。這時,令能量 $u=h\nu$,則動量

$p = h\nu/c$。此處必須注意的是，在電磁場的情形，u 與 p 均由坡印廷向量 S 來定義。

四、電磁波的輻射

上一節討論了在自由空間傳播的電磁波之性質。本節將探討電磁波的輻射歷程。首先，設電荷密度 $\rho(\vec{r}, t)$ 與電流密度 $\vec{j}(\vec{r}, t)$ 隨時間而變化，並求伴隨這變化所產生的電磁波。

基本上，直接解馬克士威方程式（2－1）～（2－4）即可，但用電磁勢（electromagnetic potential）的方法較易理解，所以通常均採這方法。為了電磁勢，且先引進純量勢（scalar potential）$\phi(\vec{r}, t)$ 與向量勢（vector potential）$\vec{A}(\vec{r}, t)$，則電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 與磁場 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 可用 ϕ 與 $\vec{A}$ 表示如下。

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (2-36)$$

$$\vec{B} = \mathrm{curl}\,\vec{A} \qquad (2-37)$$

在式（2－36）與（2－37）中，用任意純量函數 φ 而令

$$\vec{A} = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\varphi \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (2-38)$$

則

$$-\,\mathrm{grad}\,\phi' - \frac{\partial \vec{A'}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\left(\phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}\,\varphi\right)$$

$$= -\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

因 $\mathrm{curl}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$，故

$$\mathrm{curl}\,\vec{A'} = \mathrm{curl}\,(\vec{A} + \mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{curl}\,\vec{A} + \mathrm{curl}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{curl}\,\vec{A} = \vec{B}$$

電磁勢 ϕ 與 $\vec{A}$ 對任意函數 φ 沒有特定性質，新電磁勢 ϕ' 與 $\vec{A'}$，正如 ϕ 與 $\vec{A}$，可以表達同一電磁場 $\vec{E}$ 與 $\vec{B}$。式（2－38）叫做規範變換（gauge transformation）。

式（2－36）與（2－37）自然而然地滿足馬克士威方程式（2－2）與（2－3），即

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}) = 0$$

$$\mathrm{curl}\left(-\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{curl}\,\vec{A}$$

$$= -\,\mathrm{curl}\cdot\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{curl}\,\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{curl}\,\vec{A} = 0$$

其次，利用公式 curl·curl $\vec{A}$ = grad·div $\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A}$ 來改寫式（2－4）

$$\frac{1}{\mu_0}\text{curl}\cdot\text{curl}\,\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}(\text{grad}\cdot\text{div}\,\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A})$$

$$= \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\text{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad (2-39)$$

式（2－1）可以改寫如下：

$$\text{div}\left(-\text{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$= -\vec{\nabla}^2\phi + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}^2\phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad (2-39')$$

因爲 $\vec{A}$ 與 ϕ 有來自規範變換的自由度，故可附上羅倫茲條件（Lorentz condition）

$$\text{div}\,\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad (2-40)$$

而式（2－39）與（2－39′）可以變成下列簡單完美的形式：

$$\vec{\nabla}^2\phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2-41)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \qquad (2-42)$$

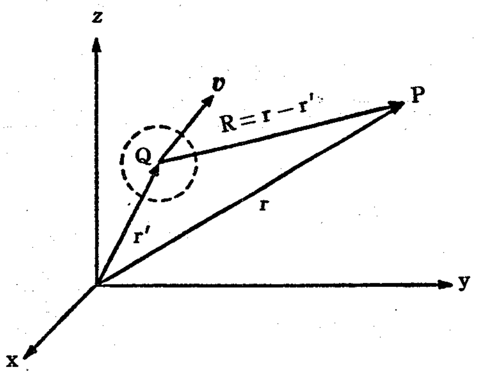
電磁勢 ϕ 與 $\vec{A}$，滿足上列波動方程式。式（2－41）與（2－42）的解，通常均由下式表示：

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v dV'\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (2-43)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v dV'\frac{\vec{j}(r',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (2-44)$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \qquad (2-45)$$

這 ϕ 與 $\overrightarrow{A}$ 叫做推遲勢（retarded potential）而 t' 則叫做推遲時間（retarded time）。$\overrightarrow{r}$ 與 t 是 P 點的座標與時間，$\overrightarrow{r'}$ 是電荷與電流在時間 $t' = t - \frac{R}{C}$ 所存在的點 Q 之座標，而 R 是 PQ 間的距離 $|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|$（見圖九）。例如，電荷 $\rho(\overrightarrow{r'})dV'$ 在 Q 點的影響，集中呈現於觀測點 P。



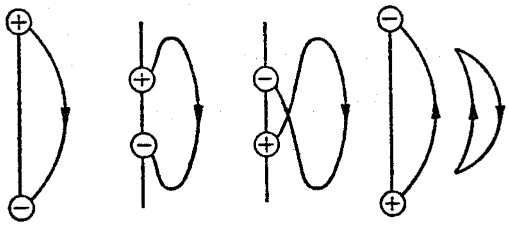
圖九

電荷分布或電流分布變動的典型例子，可舉電偶（electric dipole）與點電荷加速運動的情形。

A. 電偶的輻射

電偶隨時間而變化時，會輻射電磁波，叫做電偶輻射。這可以用來說明天線發射電波，以及原子發射光的現象。

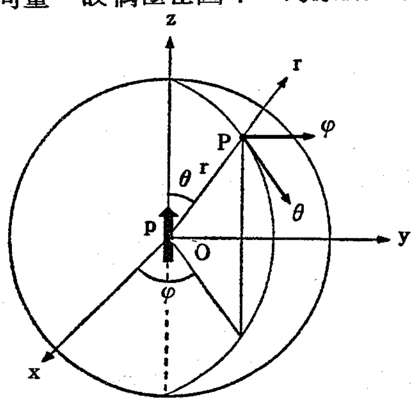
天線的電流變化或電偶的電荷分布變化，可將其模型化來顯示電荷的移動會引起電力線的扭曲，因而電力線環逐一離開，遂形成電波的發射，其情形如圖十所示。


圖十

設偶極的電荷為 $\pm q$，偶極的長度為 ℓ，則偶極矩為 $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{\ell}$，　$q = q_0 \cos \omega t$

$\overrightarrow{\ell}$ 是代表偶極由 $-q$ 至 $+q$ 方向的向量。設偶極在圖十一的原點 O 作振動：

$$p = p_0 \cos \omega t$$



圖十一

首先，求出向量勢$\vec{A}$。電荷的擴展ℓ遠較 r 爲小時，式（2－44）的分母可用離開偶極中心的距離 r 來代替，將其移到積分符號外。換言之，對整個偶極取其中心O的推遲時間 $t_0 = t - \frac{r}{c}$ 之電流密度。此外，$\vec{j}$ 要用 $\dot{q}\,d\vec{s}$ 替代。

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(r', t')dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{\mu_0 \dot{q}(t_0)}{4\pi r}\int_0^{\ell} d\vec{s} = \frac{\mu_0 \dot{q}(t_0)\vec{\ell}}{4\pi r}$$

$$\because\ \dot{q}\vec{\ell} = \dot{\vec{p}}$$

$$\therefore\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{\dot{\vec{p}}\,(t_0)}{r} \qquad (2-46)$$

取$\vec{p}$的方向爲 z 方向，

$$Ax = 0\ ,\ Ay = 0\ ,\ Az = \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r} \qquad (2-47)$$

以後沒有必要時，將略去指標［例如$\dot{\vec{p}}\,(t_0)$中的 t_0］。由中心輻射時，利用極座標表示法比較方便。式（2－47）可以變換成爲 $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}
A_r &= A_x \sin\theta\cos\varphi + A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta \\
&= A_z\cos\theta = \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r}\cos\theta \\
A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta \\
&= -A_z\sin\theta = -\frac{\mu_0\dot{p}}{4\pi r}\sin\theta \\
A_\varphi &= -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi = 0
\end{aligned}\right\}(2-48)$$

磁場要把上式代入式（2－37）$\vec{B} = \text{curl}\,\vec{A}$ 來求出。

$$\left.\begin{aligned}
B_r &= (\text{curl}\,\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] = 0 \\
B_\theta &= (\text{curl}\,\vec{A})_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] = 0 \\
B_\varphi &= (\text{curl}\,\vec{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2}\right)\sin\theta
\end{aligned}\right\}(2-49)$$

其次，爲求電場，利用式（2－40）與（2－48）來計算ϕ。div $\overrightarrow{A}$ 變成如下：

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2}\right)\cos\theta$$

因此，由式（2－40）可以求出ϕ：

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\dot{p}}{cr} + \frac{p}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (2-50)$$

由圖（2－11）知，$\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{p} = r\,p\cos\theta$，故式（2－50）變成

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{r}\cdot\dot{\overrightarrow{p}}}{cr^2} + \frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{p}}{r^3}\right) \qquad (2-51)$$

由式（2－48）與（2－50）可得E的極座標分量如下：

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3}\right)\cos\theta \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\ddot{p}}{c^2 r} + \frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3}\right)\sin\theta \\
E_\varphi &= -\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2-52)$$

由式（2－49）與（2－52）知，p 項隨 $1/r^3$ 減少，$\dot{p}$ 項隨 $1/r^2$ 減少，而 $\ddot{p}$ 項隨 $1/r$ 減少。因此，在遠方（r 大處），只有 $\ddot{p}$ 項才是重要。在 r 較大的領域，電磁波可以視作平面波，而

$$E_r = 0,\quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\ddot{p}}{c^2 r}\sin\theta,\quad E_\varphi = 0 \qquad (2-53)$$

$$B_r = 0,\quad B_\theta = 0,\quad B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\ddot{p}}{cr}\sin\theta \qquad (2-54)$$

這就是電偶輻射的電磁場之電場與磁場分量。

其次，輻射能（坡印廷向量）$\overrightarrow{S}$的 r 分量如下：

$$S_r = \frac{1}{\mu_0}E_\theta E_\varphi = \frac{\mu_0\,\ddot{p}^2}{16\pi^2 cr^2}\sin^2\theta \qquad (2-55)$$

輻射能的角分布，如圖十二所示，與 $\ddot{p}$ 正交的方向，輻射能最大。

總輻射能可將式（2－55）就立體角 $d\Omega = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$ 積分，得

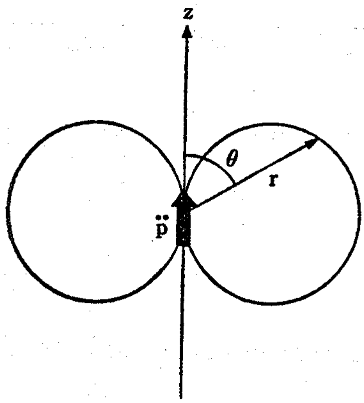
$$W = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S r\, r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{6\pi c} \qquad (2-56)$$

上式演算中，利用 $\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$。設 ℓ 為天線長度，電流的變化情形是 $I = I_0 \sin\omega t$

則因 $\dot{p} = \dot{q}\ell = I\ell$ ，故

$$\ddot{p} = \ell \dot{I} = \omega\ell I_0 \cos\omega t$$

因此，將上式代入式（2－56），得時間平均為（T為週期），



圖十二

$$\langle W\rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c}(\omega\ell I_0)^2 \frac{1}{T}\int_0^{T} \cos^2\omega t\, dt$$

$$= \frac{\mu_0(\omega\ell I_0)^2}{12\pi c} = \frac{1}{2} R I_0^2 \quad (2-57)$$

$$R = \frac{\mu_0 \ell^2\omega^2}{6\pi c} = \frac{2\pi\mu_0 c\ell^2}{3\lambda^2} \qquad (2-58)$$

R叫做輻射電阻（radiation resistance），可以視作天線輻射難易的依據。

$\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ 是波長。

B. 點電荷加速運動的輻射

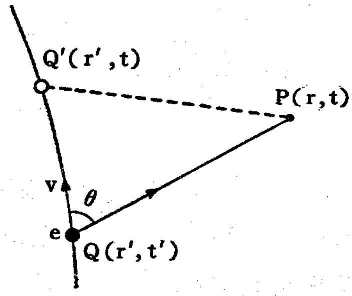
推遲勢（2－43）與（2－44）可適用於點電荷的加速運動。衆已熟知，作等速運動的點電荷，其場不出現能量的損失，因而不放出輻射能。然而，縱使點電荷在介質中作等速運動，若其速度超過該介質中的光速（c／n），則因切倫科夫效應（Cherenkov effect）而放出輻射能。關於這一點，容後加以討論。

設以電子為點電荷的例子。若電子的運動速度為 $\vec{v}$（見圖十三），則在十分遠離電子的觀測點P，式（2－44）分母的 r 可以移到積分符號外，又因電子的電流密度 $\vec{j}$ 之體積積分為 $\int \vec{j}\, dV' = e\vec{v}(t')$，故

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{\mu_0 e\vec{v}(t')}{4\pi r} \qquad (2-59)$$

式中，$t'=t-(|\vec{r}-\vec{r}'|/c)$。電偶輻射的演算結果，將其中的$\dot{\vec{P}}$以$e\vec{v}$置換，即得式(2-59)。這結果是電子的速度遠較光速爲小時的情形。

與光速相較，電子速度不能忽略時，運動電子在各點的推遲時間各自不同，不能作單純的積分。P點的電位變成電荷彷彿作如下變換所得的電位：



圖十三

$$e \longrightarrow \frac{e}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}=\frac{e}{1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}(t')}{rc}}$$

因此，電磁勢爲

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{e}{1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}(t')}{rc}} \qquad (2-60)$$

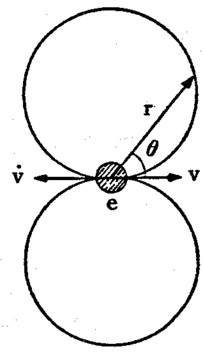
$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{e\vec{v}(t')}{1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}(t')}{rc}} \qquad (2-61)$$

這叫做李也納—維赫特勢(Liénard-Wiechert potential)。

在十分遠離電子處，輻射能與式(2-55)相同($\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$)，變成

$$S_r=\frac{\mu_0 e^2\dot{v}^2}{16\pi^2 cr^2}\sin^2\theta \qquad (2-62)$$

其角分布，如圖十四所示。



圖十四

總能W與式(2-56)一樣，變成

$$W=\frac{\mu_0 e^2\dot{v}^2}{6\pi c}=\frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (2-63)$$

特別重要的是，與 $\dot{v}^2$ 成正比。這項結果可以直接適用於軔致輻射。

與c相較，電子速度不能忽略時，式（2－62）與（2－63）要分別變更如下：

$$S_r = \frac{\mu_0 e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 c r^2} \cdot \frac{\sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5} \qquad (2-64)$$

$$W = \frac{\mu_0 e^2 \dot{v}^2}{6\pi c} \cdot \frac{(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta)}{(1-\frac{v^2}{c^2})^3} \qquad (2-65)$$

帶電粒子作圓周運動時的輻射，粒子速度小的情形叫做迴旋輻射（cyclotron radiation），而速度大的情形叫做同步輻射（synchrotron radiation）。

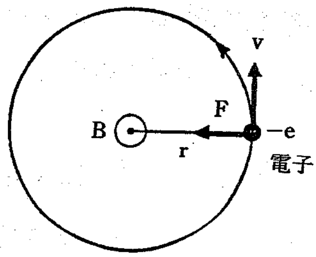
令電子在均勻磁場 $\vec{B}$ 中運動，則因羅倫茲力垂直作用於電子行進方向與磁場方向，所以電子作等速圓周運動。

設速度小時的軌道半徑爲r（見圖十五）

，則

$$m\frac{v^2}{r} = evB$$

$$\therefore\quad r = \frac{mv}{eB} \qquad (2-66)$$

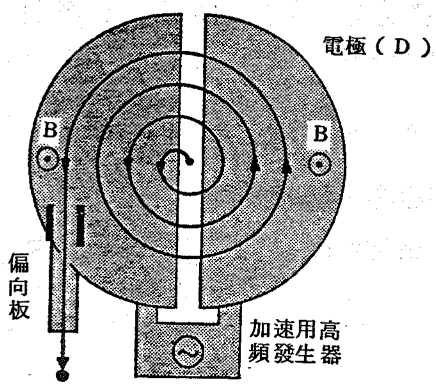


圖十五

即r視速度而定。圓周運動的角速度ω爲

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{m} \qquad (2-67)$$

這ω叫做迴旋角頻率（cyclotron angular frequency）。ω與電子速度（亦即能量）無關。能量不同時，只有半徑不同，而週期恆爲 $T = v\pi m/eB$ 。這是重要的事實，迴旋加速器（cyclotron）就是根據這原理來製作的（見圖十六）。



圖十六

這時的輻射能，只要將 $\dot{v} = r\omega^2 = re^2B^2/m^2$ 代入式（2－63），即可求出：

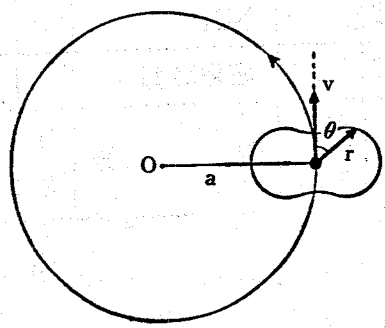
$$W = \frac{\mu_0 e^2 r^2 \omega^4}{6\pi c} = \frac{\mu_0 e^4 r^2 B^4}{6\pi c m^4} \qquad (2-68)$$

其角分布，如圖十七所示。

由 $1/m^4$ 知，爲了取出迴旋輻射，質量小的帶電粒子，亦即電子較爲有利，但當加速器來利用時，卻因這項能量損失而不能製作高能加速器。

另一方面，速度大時，須用相對論質量，而由運動方程式 $p\omega = evB$ 與 $p = mv\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 得角速度 ω 爲

$$\omega = \frac{eB}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (2-69)$$



圖十七

因此，週期 T 爲

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2-70)$$

即週期隨速度而變化。同步加速器（synchrotron accelerator）的情形是，將T固定，又因B隨質量的增加而成正比增加，故使B作週期T的變化即可。只要能夠造出大磁場，即能隨心所欲將粒子加速到所希望的高能。

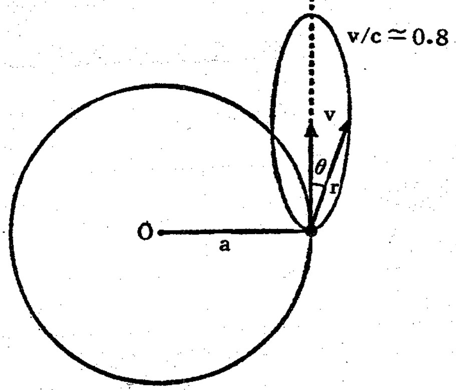
另一方面，在式（2-65）中，因 $\vec{v}$ 與 $\dot{\vec{v}}$ 正交，而 $\sin\theta = 1$，故總能爲

$$W = \frac{\mu_0 e^2 \dot{v}^2}{6\pi c} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \qquad (2-71)$$

此外，同步輻射的角分布，集中在 $\vec{v}$ 的方向，即圓形軌道的切線方向（見圖十八）。

C. 切倫科夫輻射

根據特殊相對論，粒子的速度不能超過眞空中的光速 c。但光在折射率 n 的介質中之速度 $c' = c/n$，例如，玻璃中的光速只有眞空中的 2/3，這時，粒子的速度可能大於 c'。

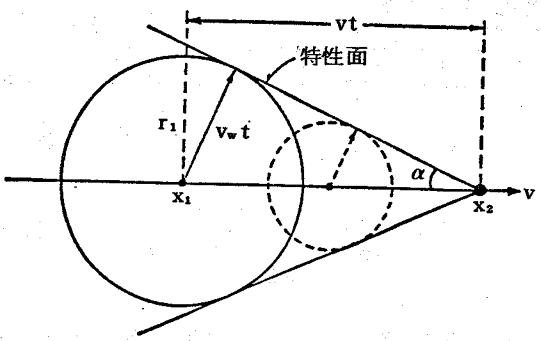


圖十八

在物質中，即使帶電粒子作等速運動，若其速度大於該物質中的光速 c'，則可放出

輻射能。1934年俄國物理學家切倫科夫(Pavel Alekseevich Cherenkov, 1904—)發現物質中的高速電子發出光線。這叫做切倫科夫效應，而這輻射叫做切倫科夫輻射(Cherenkov radiation)。

物體在介質中運動時，若其速度超過該介質的彈性波之相速，則會發生所謂馬赫的衝擊波(shock wave)。切倫科夫輻射酷似衝擊波。例如，物體以超音速運動時，聲波在於運動物體的後面，在特性面所限制的領域行進(見圖十九)。聲源 x_1 在某時刻發出的聲波，當聲源到達 x_2 時，傳播到半徑 r_1 的球面上。其次的聲波又從 x_2 傳播出去。因爲這些過程連續進行，故得通過聲源中心而擁有共同切線的一連串圓形波，聲源靜止時是球面波，但運動時是具有圓錐狀波前的波。由圖十九知，設 x_1 到 x_2 的時間爲 t，則因 $r_1 = v_w t$，$x_2 - x_1 = vt$ (v_w 是聲速，v 是聲源的速度)，故



圖十九

$$\sin\alpha = \frac{r_1}{x_2 - x_1} = \frac{v_w t}{vt} = \frac{v_w}{v} \qquad (2-74)$$

這角度 α 叫做馬赫角(Mach angle)。

實際上，物體不必發出聲音，物體一旦超過聲速，物體運動本身的結果，自動向兩側發出衝擊波。同樣的事，在光的情形也會發生。

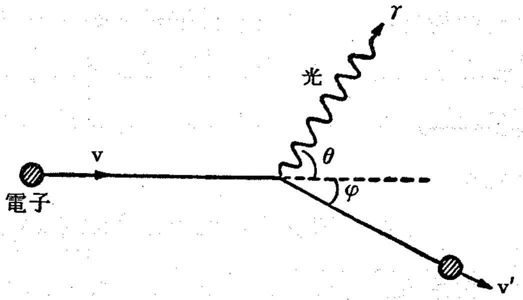
設電子以速度 v 來入射介質中(折射率 n)，在介質中放出光子($h\nu$)，其方向與入射方向成 θ 角，而電子本身被彎曲 φ 的角度(見圖二十)。若光子的動量 $p = h/\lambda$，則 $\lambda = (c/n)/\nu = c/n\nu$，即 $h\nu = pc/n$。

若依相對論來處理電子的運動，則能量及動量的守恆定律爲

$$mc^2 r = mc^2 r' + \frac{pc}{n}$$

$$mvr = mv'r' \cos\varphi + p\cos\theta$$

$$0 = mv'r' \sin\varphi - p\sin\theta$$



圖二十

式中，$r=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ ， $r'=(1-\frac{v'^2}{c^2})^{-1/2}$ 。由上列三式消去 v′與 φ ，得

$$\cos\theta=\frac{c}{vn}+\frac{p}{mvr}\cdot\frac{n^2-1}{2n^2}=\frac{1}{\beta n}+\frac{\lambda e}{2\lambda}(1-\frac{1}{n^2}) \qquad (2-75)$$

式中，$\beta=v/c$ ， $\lambda e=h/mvr$ 爲入射電子的德布羅依波長 (de Broglie wavelength)。

輻射條件是 $v>c/n$ ，即 $\beta n>1$，而在短波長側是限在相當於 con $\theta=1$ 的 λ_{min} 値範圍內。在非相對論的近似法中 ($v/c\equiv\beta\ll1$)，條件 $\beta n>1$ 表示 $n\gg1$ 。

當 $\lambda e/\lambda\ll1$ 時，電子的反衝可以忽視，而 $\varphi\simeq0$ ，表示電子往前直進，式 (2 － 75) 變成

$$\cos\theta=\frac{c}{vn}=\frac{1}{\beta n}\ ,\quad \theta=\cos^{-1}(\frac{1}{\beta n}) \qquad (2-76)$$

而光沿這 θ 方向輻射出去。

由於 $\omega=2\pi c/n\lambda$ ， $\omega_{max}=2\pi c/n\lambda_{min}$ ， 故由電子來輻射的能量爲

$$W=\frac{e^2v}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int_0^{\omega_{max}}(1-\frac{c^2}{n^2v^2})\omega\,d\omega \qquad (2-77)$$

式中，$n=n(\omega)$ 代表光的色散。關於光的色散，容後再加討論。 (待續)