

美國數學教育的趨勢

單文經

國立臺灣師範大學教育系

壹、前言

今日的學生將在廿一世紀生活與工作。廿一世紀將是一個重視溝通的世界，電腦的運用十分普遍，舉世各國的經濟活動相互依賴，形成一個全球性的經濟網路。生活在這樣的未來世界的工作者，必須具備吸收新觀念、察覺新花樣，解決新問題的能力。數學是這些能力的基礎。

科技的運用已經使我們的工作場所數學化，統計也被普遍地運用在公共政策的爭論之上，因此，數學這門科學已經不再只是未來科學家才必須具備的高深知識，而是任何人都必須具備的基本知識。然而，一大串的研究報告指出美國的學生在數學一科的表現，遠不如日本及歐洲各國。

目前美國中學的數學科是選修科，而非必修科。每年約有百分之五十左右的美國中學生放棄選修數學科。黑人、南美後裔，以及其他少數民族放棄數學的比例更高。因為數學能力的高低，與其是否能在未來的科技社會中擔任領導者，有密切的關聯，因此不均等的數學教育，又導致其未來經濟能力的不均等。

從經濟的必需以及社會均等的考慮，皆可說明數學教育再興的重要性。美國在西元二千年時，將缺乏約五十萬個科學家和工程師；數學及科學的教師也將嚴重缺乏。因此，美國的數學教育家莫不大聲呼籲，對於國家及個人而言，皆有必要提高數學教育的水準，使未來的學生能接受高品質的數學教育。

本文即根據前美國數學學會（Mathematical Association of America）會長史汀（Lynn Arthur Steen）教授在一九八九年九月號「教育領導」（Educational Leadership）所發表的「為明日世界教數學」（Teaching Mathematics for

Tomorrow's World)一文，改寫而成。希望能提供我國數學教育的發展，作為參考。

貳、未來數學教育的目標

從整個教育史——始自柏拉圖的學苑及羅馬的四藝——學生皆被要求學習數學，俾便達到思考清晰的目標。後來，純粹推理被涵蓋進去，數學（特別是歐氏幾何）為養成嚴謹的思考習慣，提供了理想的通道。

約在五百年前，激增的商業需求，複雜的會計系統的普遍使用，導致算術及初等代數成為教育系統的一部分。約在二百年前，算術還是美國大學入學的條件之一，而且，算術也是基本教育的重要成分，“3 R”的第三個R。（Reading, Writing, Arithmetic.）

幾何和算術——思考和計算——不僅是學校數學教育的典範，也是家長心目中的數學內涵。然而，今日這二項內容，已不再是最重要的了。雖然，大多數的學童能夠計算得很好，但是，計算機的普遍使得這項難學的知能，變得不像以前一樣重要。而且，雖然中學生仍然學著幾何的證明，但是所學却很少能遷移到其它的生活領域中，使思考清晰。

為了協助學生能良好地生活在未來的世界中，中小學數學教育的目標必須調整，以因應資訊時代的全球經濟的需求。全美數學教師協會（The National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）所新擬定的「中小學數學基準」（Standard for School Mathematics），為廿一世紀的學生標定下列五項較廣泛的數學教育目標。

一、重視數學

學生必須體認數學在今日社會所佔有的重要角色。從會計與財政到科學的研究，從公共政策的辯論到市場的研究與政治的輿論調查。學生在學校中所受的數學教育，必須使他們相信數學對他們具有相當的重要性，如此，他們才會有繼續在學校中致力學習數學的動機。

二、以數學的方式推理

數學最重要的功能，乃在於培養一種心理習慣，協助吾人澄清複雜的情境。學生必

須學習搜集證據，作成臆測，形成模式，建構相對例證，並且完成健全的論證。這樣作，學生們將會發展其正確的態度，在不疑處有疑，並且發展其敏銳的頓悟力。

三、以良好的方式傳達數學的內涵

學習以良好的方式，讀、寫、說出數學的內涵，不僅可使所學到的數學知識有效地應用，而且也是理解數學的重要策略。在團體中共同研習數學，教同學學數學，彼此論辯解題策略，並且小心地以書寫的形式表達論證的步驟，乃是學好數學的不二法門。

四、能圓滿地解決問題

企業界希望學校的畢業生能夠以各種不同的數學方法來解決問題。因此，學生在學習數學時，應該多經驗各種不同的問題——不同上下文的，不同長度的，不同難度的，以及不同方法的，各式各樣的問題。學生們必須學習把題意含混的問題，重新扒疏處理，使題目變成易於分析；學生必須學習以適切的策略解題；學習必須能覺察並作成不同而適切的解答；並且能夠與其他的同學共同獲得較一致，有效且合邏輯的解答。

五、培養對數學的信心

學校有責任使學生有信心學好數學。換言之，學校應透過其教學培養學生對數學有積極的態度。學生是否能在未來的日常生活中，以工作人員、父母雙親、公民等的身分，妥善對應日漸增多的數學需求，就在於學校能否建立學生對數學的信心。今天，家長們雖然能夠體認數學的重要性，但是，却無法對自己的數學成就有相當的信心。要學生學好數學，就要使其獲得周圍建立在成功的基礎之上的人們，能給予學生充分的支持。

叁、有效的數學教學原則

史汀認為，即使以較舊的標準衡量，美國中小學的數學課程型態，也還算是“低成就”的。他認為，美國中小學的數學課程，根本是順應於過去，而盲目於過去，且對於學生的數學學習成就的期望不高。

若是以前列的NCTM的五項數學教育目標作標準，今日的數學課程也完全不夠。新的課程標準清楚地顯示，整個數學學習的環境都必須改變：不只所教的內容要變，教學的方法要變，評量的方法也要變。

最近的數學教育研究，揭示了有效教學數學的原則。不同的研究報告或許強調不同

的重點，但是，其間都有許多共同的地方：

一、提高期望

從一些國際性的數學教育研究，以及美國若干學區的研究，一致指出，如果對於學生的數學成就期望愈高，則其成就即會愈高。雖然，美國的學生家長一般認為，數學的學習必需要有特殊的天分，但是，事實上，所必需的只是努力再加上自信。學童會成功的，而且，如果我們期望他們學好，他們會學好的。

二、增加廣度

傳統的數學課程，集中於太狹窄的某些內容——先是算術，再導入代數，後來再導入微積分。大部分的學生會受惠於較寬廣的課程，一套能反映數學這門學問的延展力和豐富內涵的課程。推估、機會、度量、對稱、資料、解題，以及視覺表象等，與計算、操弄同為數學的重要部分——而且，對於許多學生而言，這些內容會更有趣些。

三、使用計算器

美國的中小學教師及測驗的編製者，不願意充分而適切地使用計算器，這點最能顯示美國數學課程的落後性質。研究顯示，適切地使用計算器，能提高學童對算術的理解，並且增進學童熟悉基本知能的程度。要求學童發展良好的數字意識，比只是熟記計算方法，更為重要。計算器不只提供了一種重要的計算方法（其他為心算、推估、紙筆及電腦），而且為發展數字意識的有力工具。

四、激勵主動參與

研究顯示，學生不只是學習教師所教的東西。學生的經驗會修正其先前的信念，因而產生其獨特的數學知識。純粹只是講述清楚，尚不足以改正其錯誤的概念。為了保證有效的學習，數學教師必須妥善運用教學策略，激發學生的主動參與，而非僅是被動地接受而已。

五、鼓勵協同合作

雇主總是希望雇員們能協同合作，完成共通的工作目標。大多數的複雜問題，必須許多不同人的貢獻才智，方才易於解決。學生學習數學必須學到如何與別人合作：共同

設計、討論、協商、質疑困難。在教室裏分組合作的教學，不僅能使學生學到上述知能，也是學好數學的有效途徑。

六、善用評量方式

有效的評量方式，必須符應教學的目標。像今天，數學的評量以多重選擇題為主要方式，因此，教師只是教學生怎樣應付這些測驗，而不管數學教學的真正目標。評量應該也是統整性的學習，而非只是應付某項客觀性的測驗而已，它必須妥善地設計，以確實反應出學生的所知與所思。總而言之，數學的評量，必須符應教學的目標：使學生重視數學，以數學的方式推理，以良好的方式傳達數學的內涵，能圓滿地解決問題，並且培養對數學的信心。

七、協助學生覺察數學的關聯性

數學的力量主要從其內部的統一性和外部的應用性。數學概念乃是彼此相聯結的。數論的結果為幾何的問題提供了線索，而又被應用在電腦科學及人造衛星的工程之上。中小學的數學教育必須利用每個可能的機會，讓學生覺察此種關聯性。這些關聯性，能促動學生的學習，並且增強其對於不同文脈下的各種概念的理解。我們不能再把數學當作是一個孤立的學問，也不能把數學的課程，當作孤立的科目，分立的主題，以及毫不相關聯的零碎知識。

八、激發創造力

數學常常被學生，甚至某些很好的學生視為「無聊」的科目，因為教師、教科書及測驗，都強調以一種正確的方法，解出單一的正確的答案。這樣的作法，無法激發學生的創意，而且也與多樣性的數學實際不符。新解法的不斷開創，不同而多樣的解答，比單一方法單一解答，更能維繫學生學習數學的興趣。電腦和計算器已經能代為執行數學的例行工作。值此電腦時代，吾人必須妥善運用吾人的想像力及智慧，也必須妥善運用吾人判斷力和記憶力。

九、減少支離破碎的數學課程

某些數學課程的設計，建基於某些零碎的教學目標之上，因而產生了某些斷簡殘篇式的課程，學生所習得的也只是某些零散的知識。然而，在實際的生活所發生的問題

，却往往是統整而不零碎的。支離破碎的數學課程損毀了數學的邏輯統整性，而此正是數學表現其獨特性的主要來源。

十、要求學生多習作

要求學生多習作，是學好任何學科的不二法門。在數學課內要求學生習作，可以達到多層目的：達成以良好的方式傳達數學內涵的數學教育目標；協助學生澄清其對數學概念的理解；提供機會予喜好習作勝於數學的學生，使其能因此而樂於學習數學。許多數學教師報導，以習作日記以及其他的「後設性作業」(meta-assignments，學生反省其學習數學的經驗)，有正面的結果。若與一般學校裏漫不經心的盲目演算相比，數學的習作更能使學生有意義地表達其數學的理解力。

十一、鼓勵討論

數學課中，最常見的情形，是老師講，學生聽；老師寫黑板，學生記筆記；老師演算，學生照著練習；然後，學生再獨自作作業。其實，這些方法都不如鼓勵學生進行嚴謹的討論和質疑困難來得有效。以辯論探討的方法，尋求具有說服力的證明，是數學方法中的重要部分。只有實際去作，而非純粹聽講，才能達到預期效果。

肆、未來數學教育重點的改變

一、教學內容的改變

數學教學的內容，宜因應未來數學教育目標而改變其重點。電腦的採用，復加工作中應用數學的機會日增，使得某些內容比較另外一些內容重要。許多在日常生活中應用頻繁的數學內容，反而很少在學校中學得到，而另有某些內容，已經過時，但是，却因為它們仍然在教科書中或是在測驗中，所以仍被視為教學重點。這些現象，必須改弦更張，否則，不足以因應未來之需求。

茲試臚列十一項內容，係未來數學教學必須加強者：

1. 幾何與測量
2. 機率與統計
3. 配對與關係
4. 空間推理

5. 資料搜集
6. 觀察與臆測
7. 推估與心算
8. 真實問題
9. 三度空間幾何
10. 圖解推理
11. 離散數學

另外五項，則必須逐漸減少其重要性：

1. 分數
2. 長除法
3. 手繪圖
4. 紙筆計算
5. 二欄證明

此五項中的前四項，因為計算器及電腦的普遍而降低其重要性。最後一項內容，幾何的二欄證明，則從未成為真實的數學內涵：它只存在於學校幾何的練習中，與幾何辯識的豐富推理毫不相干。幾何可以更有效地教學，而不需要此種刻板的證明，而且，可以在幾何之外的內容中，把證明這個項目，教得很好。

上述教學內容的改變，必須在中小學整體性地實施。諸如機會和改變，形狀和型象，數量和變數等主題，應該貫穿整個數學課程。

二、教學方法

教學內容固然要變，教學的方法也要變。如果不在教學方法上有所興革，即使教學內容改變，也是枉然。

下列的教學方法，宜為未來的重點：

1. 主動學習
2. 解決問題
3. 具體資料
4. 教學多樣化
5. 口語溝通
6. 寫作練習

7. 文字解題
8. 連續性的評量

同時，有許多目前常用的數學教學方法，則必須儘量減少使用：

1. 注入式教法
2. 機械性記憶
3. 一種方法，一種解答
4. 死記規則
5. 大量的刻板練習
6. 例行性的測驗卷

三、評量方式

教學評量方式也宜配合教學內容及方法的改變。有效的評量方式有：

1. 不只是用多選題，而宜併用文字題；
2. 允許學生使用計算器；
3. 讓學生有機會顯示其所知，以及其如何思考，而非只是測量其所不知的；
4. 在解題時，宜強調統整的知識，以及整體的解題策略（例如：推估、繪圖、模擬、電腦、計算等）；
5. 進行統整性的教學評量，而非支離破碎的；
6. 採用多樣化的教學評量方式，如觀察、口試、作業簿、筆試，以及團體性的研究計畫。

伍、結論——共同致力數學教育改革

課程內容、教學方法及評量方式，必須作整體性的變革，才能真正裨益於未來的數學教育。除非如此，無法產生有利的改變。全美數學教師協會所擬定的中小學數學基準，為美國未來的數學教育提供了相當好的藍本。我們已經清楚該作什麼，也知道應該怎麼作。所必要的，就是大家齊心合作，共同致力，採取行動。