分角面的判別

陳獻平

省立嘉義高中

在平面上爲求兩相交線的角平分線爲判別何者爲銳角分角線何者爲鈍角分角線可由圖形…等方法較易判別，但在空間中作圖不易，本文目的在於簡易判別那個分角面方程式爲銳角或鈍角分角面。

設 $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $\quad \overrightarrow{N_1}=(a_1, b_1, c_1)$

$$|\overrightarrow{N_1}|=N_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

$E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ $\quad \overrightarrow{N_2}=(a_2, b_2, c_2)$

$$|\overrightarrow{N_2}|=N_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$$

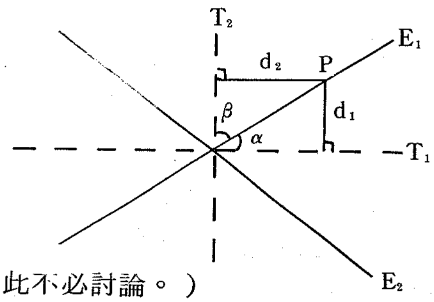
(1) 當 $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}>0$ 時

$$T_1: \frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{|\overrightarrow{N_1}|}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{|\overrightarrow{N_2}|}$$ 爲銳角平分面方程式

$$T_2: \frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{|\overrightarrow{N_1}|}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{|\overrightarrow{N_2}|}$$ 爲鈍角平分面方程式

(2) 當 $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}<0$ 時正負號的取法與上式相反。(*)

證明：其關鍵在於若 T_1 爲銳角分角面，則由 E_1 或 E_2 上任一點到 T_1 之距離應小於此點到 T_2 之距離。



T_1 爲銳夾角分角面 $\Leftrightarrow 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow 0<\sin\alpha<\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow d_1<d_2$$

(*註：$\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0$ 時，兩平面互相垂直，因此不必討論。)

令 $P(x_0, y_0, z_0) \in E_1 \Rightarrow a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0$

$$T_1: \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{N_1} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{N_2}$$

即 $(a_1N_2 + a_2N_1)x + (b_1N_2 + b_2N_1)y + (c_1N_2 + c_2N_1)z + d_1N_2 + d_2N_1 = 0$

$$T_2: \frac{a_1x + b_2y + c_2z + d_2}{N_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{N_2}$$

即 $(a_1N_2 - a_2N_1)x + (b_1N_2 - b_2N_1)y + (c_1N_2 - c_2N_1)z + (d_1N_2 - d_2N_1) = 0$

$$d_1 = \frac{|(a_1N_2 + a_2N_1)x_0 + (b_1N_2 + b_2N_1)y_0 + (c_1N_2 + c_2N_1)z_0 + d_1N_2 + d_2N_1|}{[(a_1N_2 + a_2N_1)^2 + (b_1N_2 + b_2N_1)^2 + (c_1N_2 + c_2N_1)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{N_1 |a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2|}{[2N_1^2N_2^2 + 2N_1N_2(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2})]^{1/2}}$$

$$d_2 = \frac{|(a_1N_2 - a_2N_1)x_0 + (b_1N_2 - b_2N_1)y_0 + (c_1N_2 - c_2N_1)z_0 + d_1N_2 - d_2N_1|}{[(a_1N_2 - a_2N_1)^2 + (b_1N_2 - b_2N_1)^2 + (c_1N_2 - c_2N_1)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{N_1 |-a_2x_0 - b_2y_0 - c_2z_0 - d_2|}{[2N_1^2N_2^2 - 2N_1N_2(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2})]^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad d_1 < d_2 &\Leftrightarrow [2N_1^2N_2^2 + 2N_1N_2(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2})]^{1/2} > \\ &\qquad [2N_1^2N_2^2 - 2N_1N_2(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2})]^{1/2} \\ &\Leftrightarrow 4N_1N_2(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{N_1} \cdot \vec{N_2} > 0 \end{aligned}$$

證畢

至於平面上的兩相交直線：$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 及 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

令 $\vec{N_1} = (a_1, b_1)$ $\vec{N_2} = (a_2, b_2)$ $N_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $N_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$

此二直線的分角線爲 $T_1: \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{N_1} = -\dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{N_2}$

$$T_2: \frac{a_1x + b_1y + c_1}{N_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{N_2}$$

同樣的，若 $\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} > 0 \Leftrightarrow T_1$ 爲銳角分角線，T_2 爲鈍角分角線

$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} < 0 \Leftrightarrow T_2$ 爲銳角分角線，T_1 爲鈍角分角線