彈簧的質量對振子運動的影響

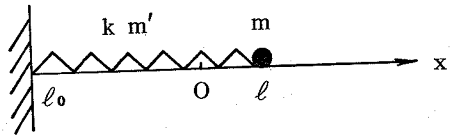
楊明洪

高雄市立壽山國中

在研究簡諧振動時，需要建立彈簧振子的理想模型。在這個理想模型中，彈簧的質量是被忽略不計的。但是實際的彈簧總有一定的質量，它將怎樣影響振子的運動呢？本文試作膚淺的分析。

一、關於有質彈簧的等效質量問題

見圖一，彈簧的倔強係數爲 k，質量爲 m'，自然長度爲 ℓ_0，振子的質量爲 m，彈簧的左端固定，取彈簧無伸縮時，右端所在處爲坐標原點。順彈簧向右爲 x 軸正向，建立一維坐標系。



圖一

當彈簧發生伸縮時，設其右端所在處的坐標爲 ℓ，右端點的速度爲 v，那麼整個彈簧的動能是多大呢？

在 x 處，取長度爲 dx 的一小段彈簧，則它的質量爲 $dm' = \dfrac{m'}{\ell_0+\ell}dx$，設其速度爲 v_x，由於彈簧的左端（固定端）速度爲零，右端（$x=\ell$ 處）速度爲 v，所以小段處的速度爲

$v_x = \dfrac{\ell_0 + x}{\ell_0 + \ell} v$，小段彈簧的動能為

$$dE'_k = \frac{1}{2} dm' v_x^2 = \frac{1}{2} \frac{m'}{\ell_0 + \ell} dx \left(\frac{\ell_0 + x}{\ell_0 + \ell} v \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m'}{(\ell_0 + \ell)^3} v^2 (\ell_0 + x)^2 dx$$

整個彈簧的動能為

$E'_k = \int dE'_k = \dfrac{1}{2} \dfrac{m' v^2}{(\ell_0 + \ell)^3} \int_{-\ell_0}^{\ell} (\ell_0 + x)^2 dx$，即

$$E'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{m'}{3}\right) v^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)式表明：

質量為 m' 的彈簧的等效質量為 $\dfrac{m'}{3}$，等效速度即是彈簧右端點的速度 v。

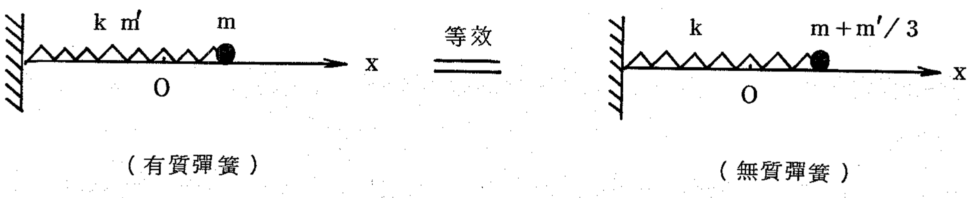
那麼，整個彈簧振子系統的動能應為

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m'}{3}\right) v^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m + \frac{m'}{3}\right) v^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)式表明：

倔強係數為 k，質量為 m' 的彈簧和質量為 m 的振子組成的彈簧振子系統等效於具有相同的 k 值的無質彈簧和質量為 $m + \dfrac{m'}{3}$ 的振子所組成的彈簧振子系統（參看圖二）。



圖二

二、彈簧的質量怎樣影響振子的運動

1. 振子的加速度

由於圖二中的左右兩個彈簧振子系統等效，所以，無質彈簧系統中，振子 $(m+\frac{m'}{3})$ 的加速度就是有質彈簧系統中，振子m的加速度，即

$$a=-\frac{kx}{m+m'/3} \quad \cdots\cdots(3)$$

2. 振子的運動方程

由(3)式知，彈簧質量爲m′時，振子m的運動微分方程爲

$$\ddot{x}+\frac{k}{m+m'/3}x=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

3. 振子的角頻率及週期

由(4)式可知，彈簧質量爲m′時，振子m的角頻率爲

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+m'/3}}$$

所以週期爲

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+m'/3}{k}}$$

4. 振子的速度

由(4)式可得：

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m+m'/3}x \quad , \quad \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{m+m'/3}x$$

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{m+m'/3}x \quad , \quad vdv=-\frac{k}{m+m'/3}xdx$$

積分便得：

$$v^2=-\frac{k}{m+m'/3}x^2+c$$

當 $x = A$（振幅）時，$v = 0$，則 $c = \dfrac{k}{m + m'/3} A^2$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}\ \sqrt{A^2 - x^2} = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

5. 振子的位移

(5)式可寫成

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

即 $\dfrac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$ ， 積分可得：

$$x = A \sin(\omega t + \varphi')$$

令 $\varphi' = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$，則振子的位移表為

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+m'/3}}\ t + \varphi\right)$$

若 $t = 0$ 時，$x = A$，則 $\varphi = 0$，則

$$x = A\cos\omega t = A\cos\sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}\ t$$

6. 系統的彈性勢能

在圖一中，設振子的初始位置坐標為 x_0， 終止位置坐標為 x，則系統的初動能為

$$E_{k0} = \frac{1}{2}\left(m+\frac{m'}{3}\right) v_0^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m'}{3}\right) \omega^2 (A^2 - x_0^2),$$

末動能為

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m'}{3}\right) v^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m'}{3}\right) \omega^2 (A^2 - x^2)$$

彈簧振子系統內力的功爲

$$W = E_k - E_{k0}$$ ，即

$$W = \frac{1}{2}k\,(x^2 - x_0^2)$$

所以，系統的彈性勢能變化是

$$E_p - E_{p0} = \frac{1}{2}k\,(x^2 - x_0^2)$$

若取 $x_0 = 0$ 處爲零勢點，則系統的彈性勢能表爲

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

7. 振子的最大速度

當振子m位於 $x = 0$ 處，由能量守恒有：

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{3}\right)v_m^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\left(m + \frac{m'}{3}\right)v_m^2 = kA^2$$

$$v_m^2 = \frac{k}{m + m'/3}A^2$$

$$\therefore\quad v_m = A\sqrt{\frac{k}{m + m'/3}} = A\omega$$

這個結論，還可以在(5)式中，令 $x = 0$ 而立即得到。

三、運動規律對比表

設有兩個彈簧振子系統，它們的倔強係數 k ，振子質量m都相同，但一根彈簧爲有質彈簧，質量爲 m' ，另一根爲無質彈簧，那麼，它們的運動規律的異同見下表。

彈 簧 質 量	m'	0
倔 強 係 數	k	k
振 子 質 量	m	m
振子加速度	$-\dfrac{kx}{m+m'/3}$	$-\dfrac{kx}{m}$
振子運動方程	$\ddot{x}+\dfrac{kx}{m+m'/3}=0$	$\ddot{x}+\dfrac{kx}{m}=0$
振子角頻率	$\sqrt{\dfrac{k}{m+m'/3}}$	$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
振 子 速 度	$\sqrt{\dfrac{k(A^2-x^2)}{m+m'/3}}$	$\sqrt{\dfrac{k(A^2-x^2)}{m}}$
振子最大速度	$A\sqrt{\dfrac{k}{m+m'/3}}$	$A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
振 子 位 移	$A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m+m'/3}}\,t+\varphi\right)$	$A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\varphi\right)$
振 子 動 能	$\dfrac{1}{2}\dfrac{mk}{(m+m'/3)}(A^2-x^2)$	$\dfrac{1}{2}k(A^2-x^2)$
系 統 動 能	$\dfrac{1}{2}k(A^2-x^2)$	$\dfrac{1}{2}k(A^2-x^2)$
系 統 勢 能	$\dfrac{1}{2}kx^2$	$\dfrac{1}{2}kx^2$
系統總能量	$\dfrac{1}{2}kA^2$	$\dfrac{1}{2}kA^2$