循環小數的特性與質數的關係

劉祥通

省立嘉義師範學院

師專數學第六冊第六章循環小數裡提到，$\frac{n}{m}$為最簡分數，且$m>1$，將$\frac{n}{m}$寫成循環小數，則其循環小數之循環節長度不會超過分母減1。

筆者除了解說除法過程中的餘數必定是1，2，…$m-1$，中的一個，至多m次必可遇到與原數相同的餘數，這時就開始一個新的循環。另外，也試著寫一程式可以執行，讓學生觀察驗證。在探索過程中，發現了幾個問題：

1. 可利用 basic 語言中的陣列（ dimension ）來儲存計算除出來的值，不受單精度與倍精度限制（見附程式），因此可隨意算至小數點以下第n位，但不可超過32767 位（許慶芳，民76）。
2. 發現上述循環節長度不僅不會超過分母減1，且循環節長度能整除分母減1。
3. 最簡分數$\frac{n}{m}$其循環節長度與$\frac{n-1}{m}$，$\frac{n-2}{m}$，…$\frac{1}{m}$相同，所以探討循環節的情形，可以以$\frac{1}{m}$來探討。

例如：

```
Ok
RUN
請輸入分子? 1
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 1 / 7 =  0.142857142857142857142857
Ok
RUN
請輸入分子? 2
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 2 / 7 =  0.285714285714285714285714
```

```
Ok
RUN
請輸入分子? 4
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 4 / 7 =  0.571428571428571428571428
Ok
RUN
請輸入分子? 5
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 5 / 7 =  0.714285714285714285714285
```

```
Ok
RUN
請輸入分子? 3
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 3 / 7 =  0.428571428571428571428571
Ok
```

```
Ok
RUN
請輸入分子? 6
請輸入分母? 7
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 6 / 7 =  0.857142857142857142857142
Ok
```

```
Ok
RUN
請輸入分子? 1
請輸入分母? 13
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 1 / 13 =  0.076923076923076923076923
Ok
RUN
請輸入分子? 2
請輸入分母? 13
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 2 / 13 =  0.153846153846153846153846
Ok
RUN
請輸入分子? 3
請輸入分母? 13
請問計算至小數點以下第幾位? 24
 3 / 13 =  0.230769230769230769230769
Ok
```

```
Ok
RUN
請輸入分子? 1
請輸入分母? 11
請問計算至小數點以下第幾位? 30
 1 / 11 =  0.090909090909090909090909090909
Ok
RUN
請輸入分子? 2
請輸入分母? 11
請問計算至小數點以下第幾位? 30
 2 / 11 =  0.181818181818181818181818181818
Ok
RUN
請輸入分子? 3
請輸入分母? 11
請問計算至小數點以下第幾位? 30
 3 / 11 =  0.272727272727272727272727272727
Ok
```

由以上三例子可知：

(1) 此程式可作為計算、觀察循環小數循環的規律性。

(2) $\frac{1}{7}$的循環節長度 6，6 能整除（7－1）

$\frac{1}{11}$的循環節長度 2，2 能整除（11−1）

$\frac{1}{13}$的循環節長度 6，6 能整除（13−1）

(3) $\frac{1}{7}$與$\frac{2}{7}$，…，$\frac{6}{7}$循環節長度相同；

$\frac{1}{11}$與$\frac{2}{11}$，…，$\frac{10}{11}$循環節長度相同；

$\frac{1}{13}$與$\frac{2}{13}$，…，$\frac{12}{13}$循環節長度相同。

筆者爲了簡化問題，擬從分子爲1，分母爲質數著手，並分成以下三點來探討：

一、循環節長度與分母的關係及尤拉函數（*Euler function*）的關係。

如何將上述例子化成循環小數，不妨用下列方法：

(1)
$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0+\frac{1}{7}\\
\frac{1}{7}\times 10 &= 1+\frac{3}{7}\\
\frac{3}{7}\times 10 &= 4+\frac{2}{7}\\
\frac{2}{7}\times 10 &= 2+\frac{6}{7}\\
\frac{6}{7}\times 10 &= 8+\frac{4}{7}\\
\frac{4}{7}\times 10 &= 5+\frac{5}{7}\\
\frac{5}{7}\times 10 &= 7+\frac{1}{7}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

所以$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$

可看成7除10^6餘1

亦即$10^6\equiv 1 \pmod{7}$

(2)
$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{11} &= 0+\frac{1}{11}\\
\frac{1}{11}\times 10 &= 0+\frac{10}{11}\\
\frac{10}{11}\times 10 &= 9+\frac{1}{11}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

所以$\frac{1}{11}=0.\overline{09}$

可看成11除10^2餘1

亦即$10^2\equiv 1 \pmod{11}$

(3)
$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{13} &= 0+\frac{1}{13}\\
\frac{1}{13}\times 10 &= 0+\frac{10}{13}\\
\frac{10}{13}\times 10 &= 7+\frac{9}{13}\\
\frac{9}{13}\times 10 &= 6+\frac{12}{13}\\
\frac{12}{13}\times 10 &= 9+\frac{3}{13}\\
\frac{3}{13}\times 10 &= 2+\frac{4}{13}\\
\frac{4}{13}\times 10 &= 3+\frac{1}{13}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

所以$\frac{1}{13}=0.\overline{076923}$

可看成13除10^6餘1

亦即$10^6\equiv 1 \pmod{13}$

由以上例子，吾人可得以下簡單結論（預備定理）：

設m是質數，若且唯若l是最小正整數，使得$10^l \equiv 1 \pmod{m}$，則l爲$\frac{1}{m}$化成循環小數的循環節長度證明：先證“$\Leftarrow$”

設$\frac{1}{m}=0.\overline{r_1 r_2 \cdots r_l}$，其中$r_1, r_2 \cdots r_l \in \{0,1,2\cdots,9\}$

令$0.r_1 r_2 \cdots r_l = c$　則$\frac{1}{m}=c(1+10^{-l}+10^{-2l}+\cdots)$

$$=\frac{c}{1-10^{-l}}=\frac{c\cdot 10^l}{10^l-1} \qquad ie\ \frac{1}{m}=\frac{c\cdot 10^l}{10^l-1}$$

$\therefore 10^l-1=m\cdot c\cdot 10^l$　　$\because c\cdot 10^l\in N$　令$c\cdot 10^l=K$

$10^l-1=m\cdot K$　　$ie\ 10^l\equiv 1 \pmod{m}$

再證“$\Rightarrow$”

若l是最小正整數，使得$10^l\equiv 1 \pmod{m}$

存在一整數k，使得$10^l-1=mk$　　(i)

$\because m>1 \Rightarrow k<10^l-1<10^l \Rightarrow \frac{k}{10^l}<1$

令$\frac{k}{10^l}=0.r_1 r_2\cdots r_l=C$

由(i)式　$$\frac{1}{m}=\frac{k}{10^l-1}=\frac{C\cdot 10^l}{10^l-1}=C\cdot\frac{1}{1-10^{-l}}=C(1+10^{-l}+10^{-2l}+\cdots)$$

$$=0.\overline{r_1 r_2\cdots r_l}\ \#$$

尤拉函數（*Euler function* $\phi(m)$）：m爲正整數，小於或等於m與m互質之正整數的個數以$\phi(m)$表示。

根據*Euler Theorem*（*George E. Andreu* 1971），a，m均爲正整數，若$GCD(a,m)=1$，則$a^{\phi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$，此定理在此不證明。而$l$是否爲$\phi(m)$的因數才是我們要關心的。

吾人可寫成這樣的假設：

m是質數，l是$\frac{1}{m}$化成循環小數後的循環節，則$l\mid\phi(m)$

證：根據*Euler Theorem*：$10^{\phi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$

設$\phi(m) = l\cdot m+s \qquad (1\leqslant s < l)$

$1\equiv 10^{\phi(m)} \equiv 10^{ln+s} \equiv (10^{l})^{n}\cdot 10^{s} = 10^{s} \pmod{m}$

因此$s=0 \quad\Rightarrow\quad \phi(m)=ln$ 　亦即 $l\mid\phi(m)$

（m為質數，則$l\mid m-1$）

二、m是正整數，$\frac{1}{m}$可化成循環小數的條件是什麼？

(1) 若m是2^{α}的形式，則$\frac{1}{m}$是有限小數。

(2) 若m是5^{β}的形式，則$\frac{1}{m}$是有限小數。

以此推論，m是2^{α}、5^{β} 的形式，則$\frac{1}{m}$是有限小數。

由此事實，筆者寫成以下之結論：

$\frac{n}{m}$是最簡分數，m只要有異於2及5的質因數，$\frac{n}{m}$即為循環小數。

三、若$\frac{n}{m}$為最簡分數，且$GCD(m,10)=1$，則$\frac{n}{m}$的循環節自小數點之後即開始。

分析：（i）若$\frac{n}{m}$為最簡分數，由以上討論可知，$\frac{n}{m}$是否為循環小數與n無關，筆者再次將問題簡化成$\frac{1}{m}$來討論。

（ii）利用定理A（*George E. Andreuls*，1971）

若且唯若 $GCD(a,m)=1$

則存在整數b，使得$a^{b}\equiv 1 \pmod{m}$

證：依定理A，令$a=10$，$GCD(10,m)=1$

∃整數b，使得$10^{b}\equiv 1 \pmod{m}$，設l為如此b中的最小正整數。

再根據預備定理 $\frac{1}{m}$必為循環小數，且循環節為l

$\frac{n}{m}$亦為循環小數，循環節亦相同。

設$\frac{n}{m}$自小數點後$k+1$位（$k\geqslant 0$）開始循環，而循環節長度為l。

令$\frac{n}{m}=0.r_1r_2\cdots r_k\overline{r_{k+1}\cdots r_{k+l}}$，$r_1,r_2\cdots r_{k+l}\in\{0,1,2\cdots 9\}$

其中$r_k\neq r_{k+l}$，否則$\frac{n}{m}$自小數點後第k位即循環

$$\frac{10^k \cdot n}{m} = r_1 r_2 r_3 \cdots r_k \overline{r_{k+1} r_{k+2} \cdots r_{k+l}} \qquad (\ast)$$

$$\frac{10^{k+l} \cdot n}{m} = r_1 r_2 r_3 \cdots r_k r_{k+1} \cdots r_{k+l} \overline{r_{k+1} r_{k+2} \cdots r_{k+l}} \qquad (\ast\ast)$$

$(\ast\ast)-(\ast)$ $\quad \frac{n}{m}(10^{k+l}-10^k) = r_1 r_2 \cdots r_k \cdots r_{k+l} - r_1 r_2 \cdots r_k$

$\Rightarrow n \cdot 10^k (10^l - 1) = m(r_1 \cdots r_{k+l} - r_1 r_2 \cdots r_k)$

$\because m$，n 互質（$\frac{n}{m}$為最簡分數）$\therefore 10^k \mid m(r_1 r_2 \cdots r_{k+l} - r_1 r_2 \cdots r_k)$

$\because GCD(m, 10) = 1$ 如果 $k \geqslant 1$ 則 $10 \mid (r_1 r_2 \cdots r_{k+l} - r_1 r_2 \cdots r_k)$

但 $r_k \neq r_{k+l}$ 亦即 $r_1 r_2 \cdots r_{k+l} - r_1 r_2 \cdots r_k$ 之個位數不為零

所以 $k \geqslant 1$ 之假設錯誤，k 應該為 0

亦即$\frac{n}{m}$自小數點後第一位就開始循環。

參考資料

1. 繆龍驥等（民73年）：循環小數與非循環小數
   師專數學第六冊（第二版），P 175～176
2. 不名譯（民73年）：質數十一講——小數
   數學傳播季刊（第八卷，第三期），P 10～11
3. *George E. Andrews* (1971) : NUMBER THEORY , P 62
4. *George E. Andrews* (1971) : NUMBER THEORY , P 94

本文所用之程式：

```
1000 INPUT "請輸入分子";N
1010 INPUT "請輸入分母";D
1020 INPUT "請問計算至小數點以下第幾位";DIGIT
1030 PRINT N;"/";D;"=";
1040 PRINT USING "###";QUOTIENT;:PRINT".";
1050 DIM NUM(DIGIT+1)
1060 RESIDE=N MOD D
1070 QUOTIENT=N \ D
1080 FOR I=1 TO DIGIT
1090 N=RESIDE*10
1100 NUM(I)=N\D
1110 RESIDE=N MOD D
1120 NEXT I
1130 FOR I=1 TO DIGIT
1140 PRINT USING "#";NUM(I);
1150 NEXT I
```