

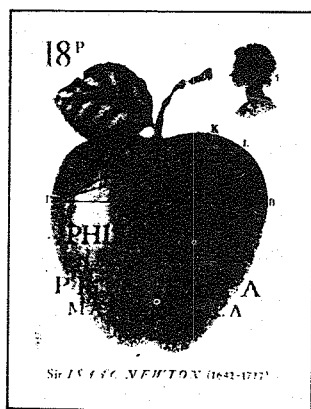
牛頓的PRINCIPIA簡介

何耀坤

臺南市私立光華女中

前言

PRINCIPIA 是英國科學家牛頓 (Isaac Newton 1642 ~ 1727)，於 1687 年出版的「自然哲學的數學之諸原理」之簡稱，是相當於「諸原理」的拉丁語。1987 年是 PRINCIPIA 的出版三百週年，在英國發行了如下圖一的紀念郵票。



圖一 PRINCIPIA 出版 300
週年紀念郵票 (英國)



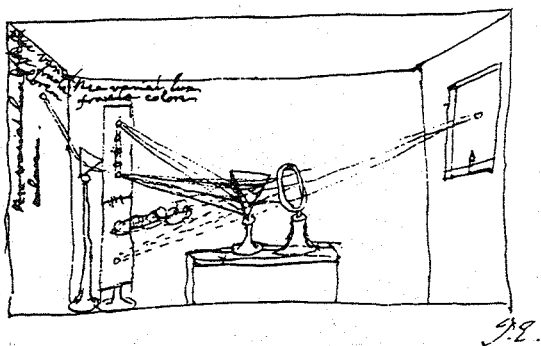
圖二 牛頓

牛頓誕生於 1642 年，於 1727 年逝世時 84 歲。他誕生那一年恰為提地動說的波蘭天文學家哥百尼 (Copernicus 1473 ~ 1543) 出版「迴轉論」一百週年，也是伽利略 (Galileo Galilei 1564 ~ 1642) 逝世之年。PRINCIPIA 是牛頓在四十四歲時的著作，是近世自然科學的重要古典。

說牛頓，一般人會聯想他看蘋果從樹上掉下而發現重力的法則，這發現在 1665 ~

1666年間。因為在1664～1665年間英國流行鼠疫，倫敦有大火，那年牛頓剛畢業劍橋大學。鼠疫蔓延到劍橋時他就回去故鄉，在這段期間產生下列三大發現的構想。①微積分法，②光的色理論（發現日光是多數單色光的混合，就是光譜的發現）圖三，③萬有引力的法則。

這三項都和天文學的發展有重要關係，尤其由①和③使行星、衛星及彗星的運動之科學研究成為可能，太陽系的構造成為明確的概念，後來也使星團及銀河系等恒星集團研究也成為可能。③的發現是以Kepler的三法則為根據，而證明此法可從萬有引力法則可導出。②的發現後來導出G.R. Kirchhoff和R. Bunsen的研究（1859～1862年），是對恒星和星雲的化學組成分析。



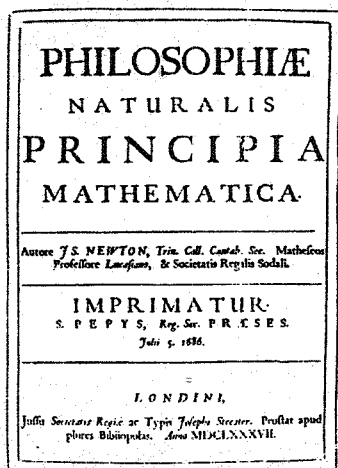
圖三 牛頓用三稜鏡分光情形的筆記

以上可證明近代天文學以牛頓的發現為基礎，而這三大發現在牛頓24歲時萌芽。這情形極相似愛因斯坦（Albert Einstein）畢業大學後未能找到適當工作，暫時在專利局服務期間，對特殊相對論，光量子論，布朗運動理論等三項一齊發現。

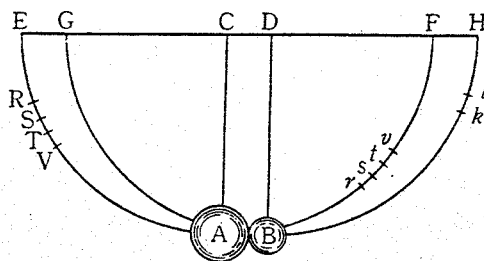
牛頓為何在1666年所發現的，一直等到二十年後的1687年才發表呢？對這點必須了解PRINCIPIA的出版經過。這本有關力學和重力理論的版本，為何掛上這麼大的表題呢？這本書不但記述物理現象的理論，同時他盼望表現近世科學的規範，我們從書上內容和文章的構成中可看出。事實上在該書上所提示的科學方法論，不限於物理學，也可做研究一般自然科學的範本。

一、PRINCIPIA的構成

今天研究物理學的人之中，少有人閱讀PRINCIPIA，這本書在數學上只使用歐幾里得（Euclid）幾何，和現在的力學教科書不同。牛頓完全沒使用他發現的微積分法，可能他在實際計算時使用過。因為微積分法在當時未一般化，他考慮科學界對該書的不必要爭論。因為歐幾里得幾何是理則學，能達到數學上的嚴密目標。他首先記述「定義」，然後寫出「公理」，「命題」，「補助定理」等來證明，並導出若干「系」。因為用這樣嚴密的理則學方法，所以他將這本書稱為「數學的」諸原理。



圖四 PRINCIPIA 的封面



圖五 自 PRINCIPIA

所謂「數學的」，並非指方法，是從少數公理中，以演繹法導出命題。這種記述方式在一般科學文獻中少見。按照一般自然科學的書的記載，首先根據若干觀測和實驗所得的事象，但在PRINCIPIA中，觀測和實驗是被演繹的命題或系的根據而提示。一看其提示法和一般書的有顛倒，是該書的最大特色。所以牛頓的方法不只是演繹法，也不是完全用歸納法，可謂演繹的歸納法，是演繹法和歸納法的組合，是分析和綜合的組合，先根據事實來追究原因，後來根據原因來論事實。

PRINCIPIA本文分為第一、二、三篇，因在前面記述定義和公理，故實際上分為四部。定義部分所述的概念改為現代用語，即是質量、運動量、慣性力、外力（作用）、中心力（重力）。接後記三個概念，是中心力的「絕對量」、「加速量」和「起動」，這在現代物理學中無其相對名詞。若勉強寫出，是「和重力質量比例之力」，「在某地點的重力加速度」，「和受重力的粒子之質量成正比之力」。

(1)時間和空間論

在文中牛頓對較陌生的名詞附寫定義，對一般較常用的如時間、空間、位置、運動並沒有寫定義，但在其後面的註解中有記述。如時間、絕對空間、場所、絕對運動、相對運動、絕對時間、相對時間等在文中的基本概念是此書重點。尤其時間和空間論後來由康德（Immanuel Kant 1724～1804，創設批判哲學的德國哲學家）在主著「純粹理性批判」對牛頓的自然科學認識論建立基礎。於十九世紀末奧地利科學家 Ernst Mach（1838～1916）對慣性系空間的絕對性有了批判。此書在本世紀初啓示愛因斯坦創一般相對論之基礎。

牛頓在文中對核心部分無寫定義，而將之附於註解部分，可能他爲了避免英國當時科學家故意找他麻煩，因而怕無法入本論，又如時間及空間這麼大的概念本來就很難下定義。PRINCIPIA的真髓在後述的力學和重力理論，因其實證的成功才能形成了時間和空間理論。

(2)力學的三法則

在書上「公理」部分就是牛頓力學的三法則，運動的第一法則是慣性的法則，由伽利略首先記述支持地動說。據亞里斯多德 (Aristoteles B.C. 384 ~ 322)；將運動分爲自然運動和強制運動，前者如天體的圓運動和自由落下，也有如煙的上升運動；後者如投射體常有強制力作用，如投石塊時石離手後繼續作用。

第二篇是論物體在大氣中運動，是亞里斯多德以來的古典問題，需要有更新的理論來說明。運動的第二法則也是伽利略的發現，只論地上的重力，但牛頓將之擴大爲一般並提出運動方程式。第三法則是曾經伽利略，笛卡特 (Descartes 1596 ~ 1650)，Huygens (1629 ~ 1695)也提過。所謂「作用」相當於現在的「力」，也相當於力和運動量，作用 (運動量 $\times$ 速度) 或能量的保存法則，所以看起來牛頓對這點的論法似有些混亂情形。

(3)第一篇：諸運動

由十四章構成，提出圓運動，圓錐曲線上的運動及拋物運動。其中拋物運動曾有伽利略提過，又和Huygens提過單擺運動，圓運動由Huygens有過解答，此篇有許多題解，好像力學題解書，因爲所用的數學方法和現在不同，是本書中最難讀的部分。如果將本章題名改爲現代式可寫爲，第一章「將曲線以階梯函數的極限表示」，第二章以下各章名可寫成如「求算向心力」，「偏心圓錐曲線上的運動由於 r^{-2} 之力」，「以 r^{-2} 之力，設焦點而求軌道的方法」，「設焦點以外的曲線上之點或切線，以求軌道的方法」，「在所設定的軌道上，隨時間如何移動」，「直線的上升及落下運動」，「在隨意向心力的運動」，「遠日點、近日點的移動力」，「表面拘束運動和單擺運動」，「以向心力互相吸引的球運動」，「球狀物體的引力」，「非球狀物體的引力」，「因大物體的引力引起的小物體之運動」。

(4)第二篇：媒質中的運動

本篇處理有抵抗媒質中的物體運動，共由九章構成。有關氣體和液體的研究從十七世紀中期開始，如托里拆利 (Torricelli) 的大氣壓測定，巴斯卡 (Pascal) 的由高度的大氣壓變化，給呂薩克 (Gay-Lussac) 的真空唧筒，波義耳定律等。據文中記述方

式可看出，當時的牛頓已有如現在物理一樣的構想和觀點。本篇各章內容如下：「受和速度成正比的抵抗之物體之運動」，「和速度之平方成正比的抵抗」，「一次方和二次方複合的」，「於媒質內的圓運動成螺旋運動時」，「流體靜力學」，「媒質中的單擺運動」，流體的運動和投射體的抵抗」，「在彈性流體內傳播的運動」，「流體的圓（渦）運動」。

本篇記載有許多實驗結果，並附有數表。所謂「傳播」在具體上指音波，但他也有表示在Ether 媒質（Huygens在光波媒質所假設）的波動。對旋渦運動牛頓反對笛卡特的渦動說，他認為球迴轉引起的渦之周期和從中心的距離之平方成正比，所以和Kepler第三法則（周期和距離的1.5次方成正比）不同。

(5)第三篇：世界體系

這篇和前兩篇完全不同，由「哲學的諸規則」，「現象」，「命題」所構成，可謂PRINCIPIA的高峯。牛頓在文中強調說，對前面兩篇所記的數學有了解的人，才能接受這觀念。我們認為想要理解這本書的人，最少要了解前面所記的「定義」和「運動的法則」及第一篇前面的三章。以數學方法嚴格組成自然哲學論，在史上以本書為嚆矢。

牛頓在哲學的諸規則中選出四點，前兩點強調思惟的經濟及統一志向（原因儘量收斂歸結於同種），後兩點記述實驗的意義，如強調其普遍性和從實驗所歸納的命題，被其他實驗所否定以前應承認其真實性。他記述「規則」的形式上，有許多地方和笛卡特的方法有抗衡氣勢。「現象」部分記載天體運行資料。他記述的世界體系包括太陽、地球、五個行星，月、木星的四衛星、土星環及五衛星和彗星。論證和實證資料配合很精細，這部分可謂現代科學方法的模範，也可謂原型。在此所論不但是第一篇的應用，如天體運動，也包括第二篇的應用，如地球扁平構造，潮汐及彗星等。這命題部分經兩次改訂時，有修改並有增補。

二、PRINCIPIA的普及及發展

對PRINCIPIA的出版了解較深的牛頓的好友哈雷（Edmond Halley發現哈雷彗星）等，在大學設此講座，後來由牛頓的學生們在天文學及數學方面將之推廣發展。但是在歐洲方面推展比較慢，因為在歐洲當時有笛卡特（法國），Hceygens（荷蘭），Leibniz（1646～1716 德國人）在科學界對牛頓有對抗意識，甚至有怨念，但是後來這些隨時間慢慢消失。PRINCIPIA對後來的影響及貢獻有兩點，一為對一般力學方

面，二為對天體宇宙為對象方面。後來力學的數學方法改用為微積分法，促進微積分法的實際應用推廣，是繼 Leibniz 法的 Bernoulli 兄弟，他們將之用於流體力學相關的方面，更經由最小作用原理，變分原理，而至 Lagrange (1736～1813 法國人) 的解析力學。這不只對一般理論的應用，尤其對解法方面非常有用，其後對理論物理的發展有決定性的影響。



圖六 哈雷

入十九世紀後，天文學方面由 Laplace 完成天體運動理論體系，出版天體力學。Gauss 開拓攝動論，創立橢圓函數和最小二乘法；Jacobi 完成偏微分方程式，成為天體的攝動理論基本方程式；Hamilton 革新天體力學；開發 Hamilton 原理，運動方程式；將力學整理為如今的數學體系。PRINCIPIA 中只考慮太陽和行星，行星和衛星等二體間的重力，但 Laplace 的天體力學更考慮其他天體的影響，使天體觀測結果和理論計算更接近，因此 Laplace 著的天體力學被稱為 PRINCIPIA 的第二版。

三、PRINCIPIA 的背景

PRINCIPIA 的正名為 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica，是牛頓將數學、物理學和天文學的研究成果整理的，萬有引力的法則也在此書中發表。此書於 1687 年 7 月從英國皇家學會出版，其出版的背後有牛頓的親友哈雷的很深友情和協助。當時哈雷任皇家學會書記，和牛頓是研究天文學的同伴，不但鼓勵牛頓完成大著，促使他將原稿送學會使承認其出版價值。當年學會因為出版一部大書「魚的歷史」用光出版經費，後來由哈雷負擔全部出版費用。

PRINCIPIA 於 1687 年四月完成第一篇原稿，翌年四月完成第二、三篇稿，於 1687 年夏季完成五百多頁的初版本。1701 年牛頓被封敘爵位 Knight，稱 Sir Isaac Newton，由平民列為貴族。後來因為微積分法的創始優先權問題，和德國 Leibniz (當時德國中央研究院院長) 有了爭論，但是以後 PRINCIPIA 的學術價值受各國的承認，於 1713 年出第二版，1726 年出第三版，PRINCIPIA 的理論漸漸成為近世科學的基礎。牛頓的這傑作於短期間內完成，值得驚訝。愛因斯坦曾經稱讚牛頓說過：「他是在人類能允許範圍內，發揮最大的智力，使人類知識水準提高的人」。

回顧近世科學史，自十五世紀至十六世紀有文藝復興，希臘古典學也復興，人類自由精神高昂，經由哥百尼的地動說，伽利略的運動力學，Kepler的行星運行法則，終由牛頓完成了PRINCIPIA，由笛卡特和牛頓的貢獻，是近世科學之開始。

自然科學原以社會發展為基礎，和自然及技術相關。近世歐洲自然科學的興起，淵源於古代希臘的數學和哲學精神，及中世紀阿拉伯鍊金術培養的實驗精神結合。十七世紀時英國哲學家培根（Francis Bacon）建立科學方法，笛卡特建立數學方法，伽利略將這兩個方法實踐於自然科學研究，這是近世科學的革新，從此歐洲科學急速進展，並促進工業生產技術。我們應特別注意數學、科學和哲學形成三位一體，是西方學術的特色。古代希臘和近世歐洲間並沒有直接的文化連續，民族、政治、宗教和社會組織又不同，為何能有歐洲性的統一作用呢？因為希臘文化，羅馬帝國，尤其基督教統一了各時代。

四、PRINCIPIA的宇宙論

(1)第三篇、世界體系的意義

PRINCIPIA記述地上的運動法則和天體運行法則的統一理論，換句話說，是伽利略的落體法則和Kepler的天體運行三法則之統一，第三篇如標題，記述我們的世界狀況，並非記法則，是記其存在。那麼以前的亞里斯多德和Ptolemaios（英文稱Ptolemy，古代希臘數學及天文學家）之宇宙體系概念崩壞後，PRINCIPIA建立如何宇宙體系呢？

亞里斯多德的自然學中的天文學雖然是精密的實證科學，Ptolemaios宇宙體系也精巧，都以太陽系內天體為主，但PRINCIPIA的宇宙體系中太陽系問題非最重要。後世人對PRINCIPIA的四部構成，有兩種看法。一認為第三篇的天體論是該書高峯，是最重要結論部分。二認為該書序文的公理、運動法則是全體的核心，第一篇只是數學的預備，第二、三篇是對等的，對媒質中的運動和天體運動等個別問題的應用。PRINCIPIA發表當時一般人關心注意第三篇，因為和古今大問題「世界觀」相關。在第三篇中牛頓意圖在宇宙論中導入新觀念。

(2)Cosmology的崩壞

所謂宇宙（在中文，字＝空間，宙＝時間，是指事物因果的流轉），不包含價值意識，但由來希臘語的cosmos含有調和和秩序等價值觀念。cosmology是關於cosmos

的世界觀，cosmos 概念和天文學或天體物理所說的宇宙（universe）非完全相同。
亞里斯多德和Ptolemaios的體系是cosmology，非太陽系模型，是對空間的意識構造。
 但是PRINCIPIA可謂排除cosmology，使我們對太陽系的認識擴展至恒星和銀河世界，又認為時間和空間是絕對的，時間沒有開始和終了，是無限的；空間也沒有中心或邊界，是無限空間。我們由事物變化和事物間的空隙而感覺時間和空間，因為我們的關心常集中在事物。在PRINCIPIA中動因的一部屬於時間和空間之性質，而在時間、空間，事物關係中保證能尋求普遍法則。換句話說，在宇宙的任何地方，於任何時刻，保證運動法則都普遍能成立。

在亞里斯多德體系中認為物理的法則原因在宇宙，這樣世界觀特稱「原因的宇宙」。在PRINCIPIA所說的宇宙是運動方程式和重力的結果，非地上運動法則受宇宙結構支配，特稱「結果的宇宙」。牛頓將行星以外的許多恒星認為如太陽。至於恒星的生成原因，數目，距離等，牛頓解釋，在該書中也沒有提出。

PRINCIPIA以後的天體宇宙研究轉為個別科學方面，如Laplace的太陽系內天體運行研究很精密。天體力學方面能計算而預測新行星，愈提高PRINCIPIA的威信，天體力學的成功使以前的「原因的宇宙」的cosmos觀念崩壞。自十八至十九世紀天體望眼鏡大型化，觀測恒星技術進展，由Herschel，Messier等陸續發現連星，恒星運動，星雲，銀河等。究竟這些天體也是PRINCIPIA的法則所貫徹的「結果的宇宙」，世界科學界愈來愈傾向以PRINCIPIA的觀念來看宇宙。

主要參考書

Isaac Newton：PRINCIPIA（日文譯本）春秋社版

島尾永康：ニュートン 岩波新書

佐藤文隆：宇宙論への招待 岩波新書

廣瀬秀雄：天文學史 誠文堂新光社

鈴木敬信：天文學辭典 地人書館