

數學師資教育研究與 數學概念發展的後續研究

哈特(K. M. Hart)博士專題演講

金 鈴 整理

國立臺灣師範大學科學教育研究所

壹、數學師資教育研究

一、觀察教師教學

首先，我要談的是有關職前和在職師資教育中的一些重要議題。

CSMS Concepts in Secondary Mathematics and Science 1975~1980.

SESM Strategies and Errors in Secondary Mathematics 1980~1983.

CMF Children's Mathematical Frameworks 1983~1985.

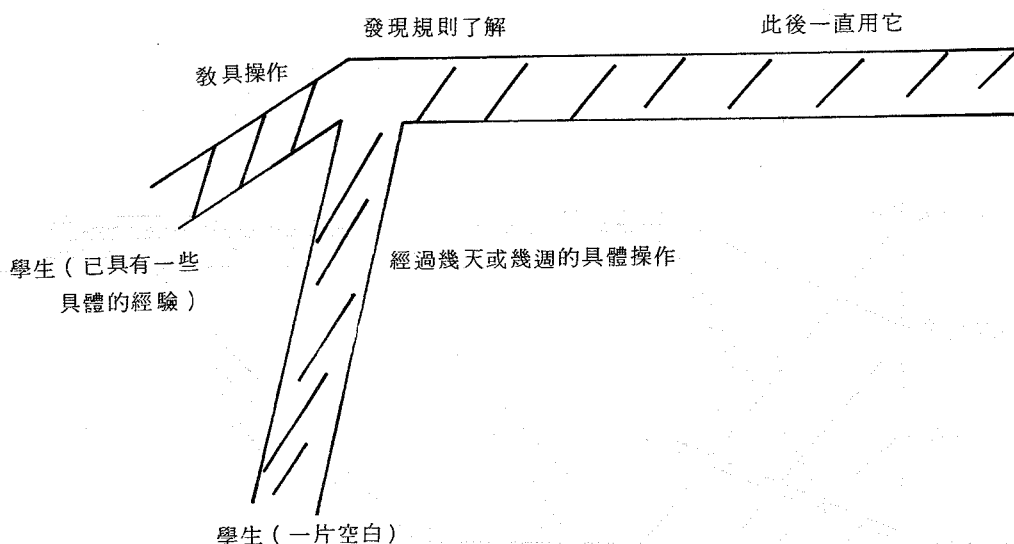
以上這三個研究計畫中的前兩個研究工作，主要是研究有關中學生（11歲到16歲）的表現。而第三個研究則是同時將教師的教學考慮在內，主要是觀察教師的教學，傾聽他們的講述，並進入教室中觀察教師如何利用具體教具教授由具體到形式的數學。同時，我們也作了錄音和錄影，但沒有介入或改變教師的教學過程。目的是要看一看教師們實際的教室教學是如何進行的？

在1984年後，我擔任英國皇家督學的幾年裡，主要的工作就是去經管全國的數學教育。因此，幾乎每天都要進入中、小學的教室中觀察數學教學，以便了解實際的教學活動。因為身為皇家督學，學校必須准許我自由地進入教室觀察，這是第一次我在未被邀請之下，觀察教師教學，並和教師們交談。於1986年，推動那飛爾中學數學課程之時，我又有機會仔細地觀察教師們的教學，看教師們如何利用具體教具教授由具體到形式的數學？其中轉化的過程又是如何？

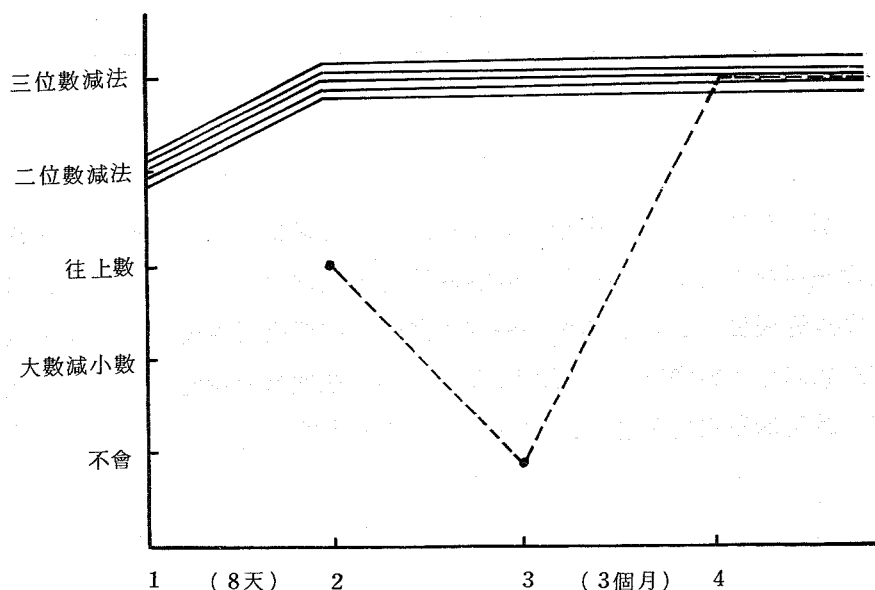
依據我的看法，從事數學教育研究的工作者是很需要去傾聽和觀察教師的教學，而這是一個教師本身所無法知道的一個層面。

二、教學理論與實際的差異

師資教育者的許多好構想，只有當它對教師的實際教學有用處的時候才比較有效、有價值。在英國數學教育界，一般都認為以具體教具來學習形式的數學是個好的教學和學習的過程。同時，教師也被鼓勵這麼做，這樣的理論可以用下面的圖形來說明：



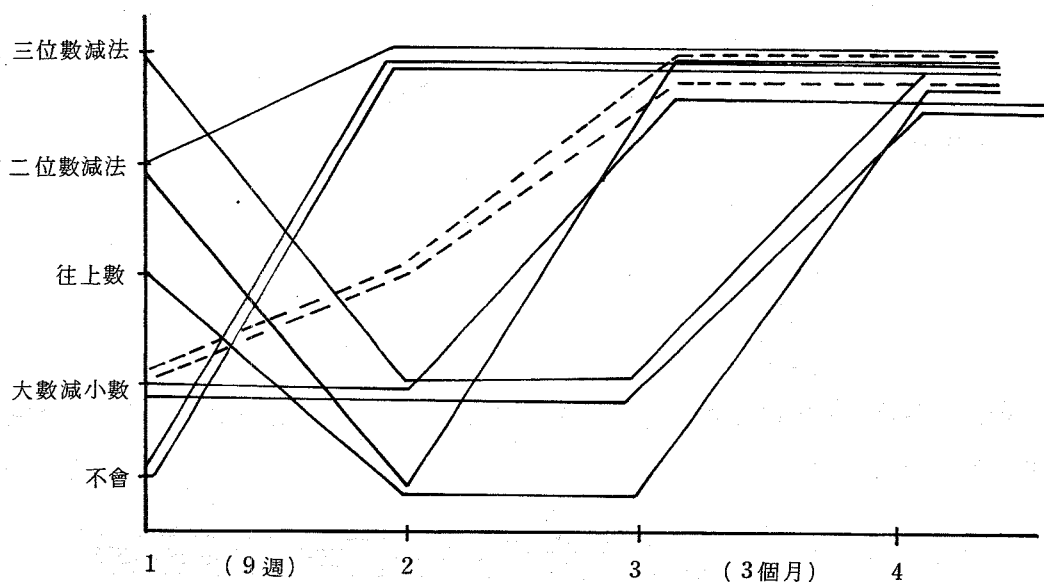
但是，我們的研究證據顯示，其實學生的表現並不像是理論所說的那樣。如下圖一是6位已有具體教具學習經驗的小孩子在“三位數減法”單元的學習表現情形。



(圖一)

圖一是根據與學生面談的結果製作的。面談的目的是要了解學生如何經由具體教具的操作之後，了解三位數減法的演算法則。圖一中縱軸的刻度表示學生的不同表現，而橫軸則表示面談的次數和時間的間隔。圖中有5位學生和理論說的一樣，但是，另一位（虛線者）的表現就不是那麼一回事了。他在第2次面談時使用“往上數”的策略做減法運算，在經過一段時間的教學之後，第3次面談時他却都不會做了，再過3個月後，他却又都會做三位數的減法了。

另外，我們再來看一看一組高程度的初學者的表現（8~9歲， $n=10$ ），如下圖二。



(圖二)

其中有兩位和理論所說的一樣，從不會三位數的減法，經過一段教學之後就學會了。有兩位本來還會“大數減小數”，經過教學之後就學會了“往上數”的方法，之後便學會了三位數的減法。但是，其餘的幾位小孩子就和理論所說的不一樣了。我的看法是，這種情形顯示出：實際學生學習的情形，未必就如理論所說的。此外，我們更應該告訴教師們，真實的學習情形是如此的不同於理論所說的。

三、發展式的教學與反覆練習式的教學

接著，我要談一談研究的資料能幫教師或師資教育者什麼忙？美國有位研究者 Gr-ouws 曾在他的研究中，觀察教師的教學有多少時間用在“發展概念的教學”？有多少時間用於“反覆練習的教學”？他發現美國的教師花很少的時間在促進學生發展概念的教學，而將大部分的時間花在要學生做一些練習而已。進一步實驗研究發現，各位一半的時間分配方式來教學，小孩子的測驗成就較佳。

當我是皇家督學時，在觀察 40 分鐘的教學中，我常常拿著錶來計時，看看教師有多少時間分別用於發展的和反覆練習的教學活動上？一般而言，大約只有少於 5 分鐘的時間用於發展概念的教學，因此，在 5 分鐘之後，學生就不知道他們要做什麼？並不是他們不懂數學的內容，而是不知道自己要做些什麼事？我希望教師能將自己的教學錄影、錄音，課後自己看一看自己教學的情形，算一算教學時間是如何分配的？有多少時間用於發展概念的教學？何時開始要學生收起課本做練習？我認為師資教育者若能鼓勵教師們將自己的教學過程錄影、錄音下來，課後分析自己的教學情形，然後，建議教師怎樣的教學方式或時間分配是較有效的，那麼，師資教育的培育過程將會更有成效。

在發展概念的和反覆練習的教學時間各佔一半的教學中，較重要的是發展式的教學活動是如何進行的？也希望使教師了解什麼是發展式的教學活動？什麼是反覆練習式的教學活動？

美國在數字概念方面所作的研究，其中有一部分我認為應該可以傳達給教師，就是：學習任一單元的教材都可能有許多不同的學習方式。例如：減法運算中有所謂的“拿走型”和“差”，這是不同的。例如，有些教師利用數學積木來教學生學習代數方程式 $2x + 11 = 4x + 3$ 。

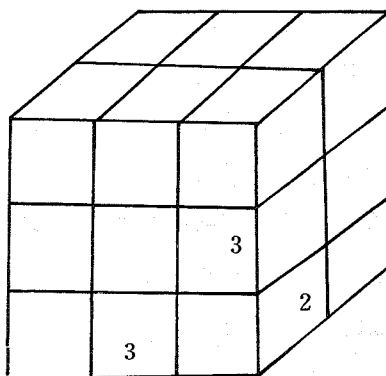
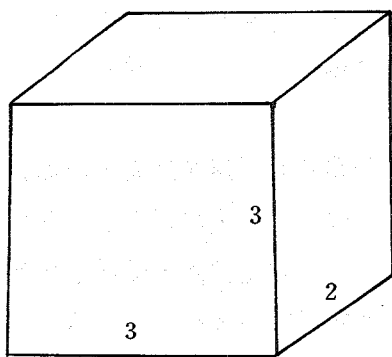
x	x	11
---	---	----

x	x	x	x	3
---	---	---	---	---

這樣的方式是要讓學生看到兩邊相同的東西 x 可以先“拿走”，事實上，這裡只要用“對照”（Match）來看就可以了，而不一定需要強調“拿走”。所以，對學生而言，告訴他們說是“對照”比說“拿走”要有意義。這也就是說，研究的發現告訴我們：相同的運算對學生而言，會具有不同的意義，我們不應該將它們都看成相同，而放在一

起來教。

從Karen對小孩子所做有關計數的研究中，也顯示出：如果小孩能用點算來做低層次的問題，那麼千萬不要用屬於高層次，但却又可以點算的問題給他做，以免他仍然用點算來做。例如：求體積的問題。



左邊的問題學生比較會用公式來計算，而右邊的問題只要用點算就可以了。所以，教師應了解此一情形，在命題之前先仔細地考慮“要學生做什麼？”並確認所命的題目的確是要學生做些我們要他做的事。同時，研究的結果也顯示出：同年齡群的學生，解題的表現不一定相同，其中存有相當大的個別差異。所以，教師在教室教學中的角色應是幫助、教育和提供資訊給所有的學生，而非只是站在講台前滔滔不絕地說說而已，就像我現在一樣。

四、教師的期望

教師的期望和學生的表現是有相當關連的。例如 Rosenshine 的研究，將相同成就的幼稚園小孩分成兩組，一組實驗組，一組控制組，前者告訴教師說這些小孩是高成就的學生，而後者却隻字未提（其實兩組的小孩的能力相近）。經過一年的教學之後，證實實驗組的學生成就的確比控制組要高。我也曾問過一些職前的準教師，是否同意有 40% 的學生無法學好數學？他們幾乎一致地同意此一看法。在英、美數學被認定成是一門很難學習的學科，若是小孩子學不好，他們的父母親一般來說，並不會抱怨，因為，他們認為學數學是需要一些天分的。說起來矛盾的是，如果數學是如此的特別，需要特別的天分才能學好的，那麼，為什麼每位學生每天都得學數學？所以，教師的期望和

學生實際的表現之間存在著很大的差距。

五、評 量

接著，我想談一談有關評量方面的問題。我認為我們應該和教師討論：為什麼需要評量學生的學習表現？那是爲了要：

1. 了解學生們是否已經準備好，可以繼續學習其它的數學內容？
2. 了解教師的教學成效如何？
3. 了解班上那些學生學得最好？

而在評量之後，我們又該做些什麼呢？

1. 重新教授某些部分。
2. 診斷與改正學生的錯誤。
3. 將學生的表現依照好壞的順序排列。

我認為上面所提的第 3 部分是最不重要的工作，但是，我們却常常花費了大部分的時間，試圖了解那些學生學的最好，而後將所有學生的表現排序。在英國，我們已經趨向於以評量學生的“思考技能”(Thinking Skills)來取代只評量學生答案的對或錯。並試著發現學生是否能自己提出假設，能看出規律，能以嘗試錯誤來解題，以便了解學生的解題過程，而不是僅僅看他們所得的答案是對是錯而已。如果只是看學生解題的結果，常常是無法看到這些思考過程的。而這些又是必須經由傾聽學生和其同儕之間相互的討論之中，才能了解的。經由傾聽學生間的交談，與學生面談，並給他們問題要求他們解釋的這些過程之中，我們已經獲得了許多訊息，讓我們了解他們到底是如何思考的。

只要教師有時間、肯花時間，這些獲取訊息的研究方法是很簡單的，而且是教師們能立即使用的、有用的方法。所以，我們應該試著了解學生是否真正了解教學的內容。一種有效的方法是問學生一些非例行性的問題，在 CSMS 的四則運算單元中就有一個問題是：

一位園丁有 391 株水仙花，想要種在 23 個不同的花圃之中，每個花圃中要有相同數量的水仙花，那麼你將如何算出每個花圃中要種幾株水仙花？

$$\begin{array}{cccc} 391 - 23 & 23 \div 391 & 23 - 391 & 391 \times 23 \\ 391 + 23 & 23 + 23 & 23 \times 17 & 391 \div 23 \end{array}$$

大部分的小孩不相信他們會被問這樣的問題，因為，學生們認為他們不可能被問是如何去運算的？題目應該會告訴他們用什麼運算方法，而由他們來計算。而且教師總是常常告訴他們用些什麼運算。學生甚至說，我需要做的事都不在你所給的8種答案之中，我需要做的是391減去23再減去23再減去23……等，這顯示出這些學生仍停留在使用連減法的階段，離除法尚有一段距離。有些學生認為 $23 \div 391$ 和 $391 \div 23$ 都可以，後來要他們使用電算器來計算這兩個運算的結果，通常他們只操作 $391 \div 23$ ，因為，他們認為除法應該是大數除以小數才是。

另一個問題是要求學生自己想出一個背景故事來說明 9×3 的意義，這類型問題的成功率和所給定數字的大小有很大的關係。其實，這跟數字的大小應該是無關的，因為，我們只是要學生說故事而已，而不是計算結果，但是，事實上是有關係的。例如： $84-28$ ，學生大部分以“拿走型”的故事來敘述。比方說，84顆糖果吃了28顆糖果，還剩下幾顆糖果？而除法 $9 \div 3$ 中大部分的故事仍然涉及糖果。比方說，9顆糖果平均分給3人，每人分多少顆？之類的故事。詳細的資料見下表一所示：

年 齡 (人數)	$84-28$	$9 \div 3$	$84 \div 28$	9×3	84×28
10~11 (147)	86 %	65 %	44 %	37 %	18 %
11~12 (1092)	78 %	58 %	41 %	42 %	31 %
12~13 (.295)	77 %	64 %	58 %	55 %	35 %

(表一)

其中有關乘法的問題，通過率降低了很多(37%)，學生比較不會造乘法的問題來說明乘法的意義，反而連加法的例子比較常見。但是，有許多學生所學 9×3 的例子是“你有9顆糖果，我有3顆糖果，我們乘起來有 9×3 顆糖果”。在英國是先教乘法，再教除法的，可是研究的資料中却發現，學生較不容易了解乘法的意義，而除法却較容易了解。爲了要了解學生是否真正了解，我們應該鼓勵教師儘量提出讓學生容易去想、去探索、去追究的許多不同型態的問題。例如：前面我們曾談過的“三位數減法”單元中，3個不同學校 James, Forge, William 的學生表現資料如下：(其中的分數部分代表通過的比例)

	James	Forge	William
課 後	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{5}{6}$
3個月後	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{6}{6}$

在三個月當中，學生可能做了些練習，但未再教授他們類似的單元。關於減法的演算法，有些學生是這麼做的：

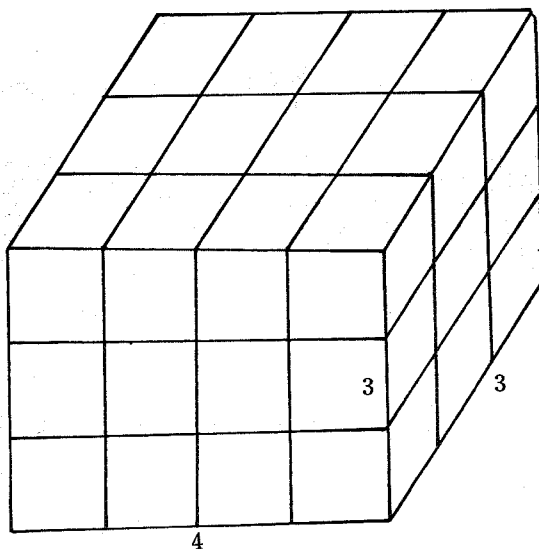
$$\begin{array}{r} 2191 \\ 307 \\ - 129 \\ \hline \end{array}$$

認為 307 和其上一行的數不一樣的學生，在三所學校之中的比例分別為 $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{3}$

，在面談中學生是這麼說的：7 減 9 不夠減向上一位借 1，但這一位沒有 1 可借，所以，再向上一位借 1，1 個一百變成了 10 個十，借 1 個給個位數剩下 9 個十，個位數就有 17 了。我們一再地問完成此類減法過程的學生，最上面的一列數字是什麼？他們說是 2191 或 21917，那麼一開始時被減的數字是多少？他們說是 307，這個數字有沒有改變呢？學生說有啊！它們是改變了，因為，它們每次都會改變的呀！所以，學生會做一些題目並不表示他們真的懂了。

六、教師教學的準備工作

最後，我要強調的是：我們應該鼓勵教師分析教學的數學內容、教學目標，以及想一想教學前需要有那些準備工作？例如（面談資料），對體積公式的了解，學生已經學過體積公式，而且已經也有了數學積木操作體積的經驗，但是，在要求他說明是如何做下列問題時，他的說法和想法却是出人意料之外的。（I：表示面測者，S：表示學生）



S： $3 + 4 + 3$ ，我想這好像不太對……

I：噢！你在計算 $3 + 4 + 3$ 嗎？

S：我不覺得它是 7，因為 1，2，3，……，12 我已經有 12 啦！

I：那什麼地方錯了呢？

S：啊！是 20，21，……，因為它那兒有 3 個 3 都有 7，所以是 $3 \times 7 = 21$ 。

I：真的每邊有 7 個嗎？

S：不對，這邊是 12，……，30，36，是 36。

I：好，我們看看是否有其它的方法來湊 4，3，3。

S：不對，不對，應該是相乘才是。

I：你要試試看嗎？怎麼試呢？

S： $3 \times 4 \times 3$ 。

I：這是什麼意思？

S：你是說 $3 \times 4 \times 3$ ？

I：你會做 3×4 嗎？要不要筆和紙？（學生很久沒反應）

I：你真的不知道如何乘這三個數字嗎？

S：我常常忘記如何乘三個數字，我只會乘兩個數字，不會三個數字相乘的。

但是，在這之後，我看過 8 位教師教體積單元，却沒有一位教師會想去了解或檢查學生是否會三個數字的乘法。而一般教師是這麼說的： 4×3 是多少？學生甲回答 12，那麼 12×3 是多少？學生乙說是 36，答案就是 36。如果我們在教學之前先仔細地分析此單元的內容和學生所需的先備知識，那麼，教學的成功率也許會提高一點。

貳、數學概念發展的後續研究

昨天（4 月 21 日）我看到也聽到了你們使用 CSMS 的研究工具和方法在這裡所做的一些研究，因此，我想在做了這許多 CSMS 的相同研究之後，如果還有研究經費支持的話，接著應該做些什麼工作呢？以下便是我的幾點建議：

1. 再檢驗和確認各年齡群在各層次試題中的表現，例如 ϕ 值、H 值。
2. 試著找出跨越單元的任何可能的共同的、一般的特徵。
3. 設計一些合於這些共同特徵的問題，再測試一下，並與原來各單元中屬於同一層次的問題作比較，看看這些問題是否確實地反應出這些共同特徵。

4. 檢驗看看這些特徵是否真是各個不同單元的共同特徵。
5. 根據上述特徵所發展的不同單元的題目，讓一些學生同時測試兩個或兩個以上的單元，看看他們在不同單元中的表現是否一致。
6. 嘗試依據這些一般的或共同的特徵，針對一個新的單元來設計一份測驗試題，再看看這份試題是否能夠形成一個合適的尺度（Scale）。
7. 填補某些單元中層次之間的差距，並將每一單元的層次對不同年齡群的學生作縱向（向上、向下）的擴展。

還有一些稍早我曾提及的研究，是需要更多的研究證據來支持的，大致可分為下面幾個方向：

1. 發展式的教學活動和練習式的教學活動在各個不同單元中時間分配的情形。教師在了解之後，他們教學改變的情形又是如何？
2. 教師如何分析自己的教學活動？對他自己往後的教學有何影響？
3. 有關證明（Proof）、邏輯（Logic）、和估測（Estimation）的教學研究。
4. 對成功教師的教學分析。例如：時間的分配、課前準備的情形、學生參與的狀況等。
5. 解題技能的研究。
6. 解題過程的評量。
7. 經過怎樣的教學過程，可能幫助學生由較低層次的理解到達一些更高層次的理解？

最後，我很自私地希望大家一同努力找出不同國籍的學生之間一些共同的表現和特徵。至於，那一國的學生比那一國的學生表現得好？或好在那裡？並不是我所關心的，而是希望找出某些一般的、共同的特質，希望它能適用於全世界。