學生的數學架構

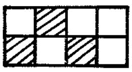
哈特(K. M. Hart)博士專題演講

呂玉琴　整理

國立臺灣師範大學科學教育研究所

今天所要講的是“學生的數學架構”〔Children's Mathematical Frameworks;(CMF);1983～1985〕，這是一系列研究中的第三階段的研究。第一階段是研究“中學數學與科學概念”〔Concepts in Secondary Mathematics and Science;(CSMS);1975～1980〕第二階段是研究“中學生的數學解題策略與錯誤”〔Strategies and Errors in Secondary Mathematics;(SESM);1980～1983〕。由前二個階段的研究結果發現了一個很強烈的事實，即：學生會發展一些自己的方法來解決問題。國中表現比較差的那20％～30％的學生只能做CSMS研究中第一層次的問題。例如：

問題1. 八人份的食譜需二杯水，那麼，六人份的食譜需多少杯水？

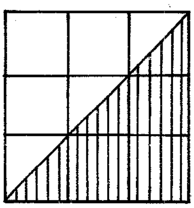
問題2.  斜線部分所表示的分數是多少？

問題3. $\frac{1}{3}=\frac{2}{\square}$

問題4. 

這個數是 $\boxed{\ .\ }$

問題5. 在直角坐標系中標出下列各點：(2,5),(3,7),(5,11)

問題6.  求斜線部分的面積

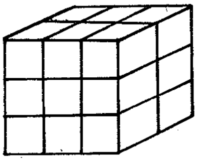
問題7. 已知 $a+5=8$，求 $a=?$

這 20％～30％的學生是用自己發明出來的學童法（Child methods）或幼稚園、小學所學過的初學法（Naive methods）來處理這些問題的。這二種方法的特徵是：

1. 傾向於使用整數（whole numbers）。
2. 包括點數（Counting）或疊加（adding）的方法。
3. 只針對手邊的問題來解決，而無法發展成一般性的解法。
4. 當碰到較難的問題時，這些方法就不適用了。

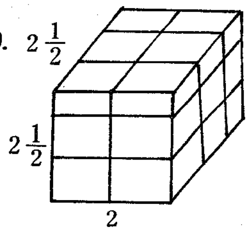
例如下列這二題求體積的問題：

問題 8.



年　齡	12+	13+	14+
答對率	55.6％	59.7％	67.3％

問題 9.



年　齡	12+	13+	14+
答對率	14.2％	18.7％	27.9％

對同一群的小孩，上述二個問題的答對率竟相差約 40％。造成這個差異的原因是學生採用點數的方法來處理體積問題，因此問題 8.能順利算出，而問題 9 因無法用點數的，因此答對率降低了許多。這些學生都學過求體積的公式，那麼，爲什麼學生不用他們學過的體積公式呢？學生並不是只在中學才使用學童法、初學法，可能學生在小學就一直在用這些方法，所以 CMF 的研究目的就是要找出小孩爲什麼喜歡用學童法、初學法，而不喜歡用教師所教他們的方法的背後理由。CMF 研究者猜測造成這種現象的可能原因是：學生在學習這些概念的過程中，教師常常使用具體物來幫助學生學習，而學生從具體教具操作學習到數學公式學習之間的轉型未成功。

一、具體操作，促進了解？

皮亞傑的理論在英國訓練師資時，是一個很受重視的理論。在皮亞傑的認知發展階段理論中，有一個階段是具體操作期，它適用於 7～11 歲的小孩。在具體操作期的小孩，一般來說要透過具體教具操作來學習，其學習效果比用任何的抽象符號來學習要好

。在英國師資教育階段，職前教師被告知：小孩只要用具體教具操作來學習都是好的，而用任何的抽象符號來學習都是不太好的。既然具體教具如此重要，那麼，我們如何使用具體教具來幫助教學呢？以下是具體教具的四種不同的使用方法：

1. 將具體教具嵌入教材中。例如：這片葉子的面積是多少平方公分？
2. 具體教具是用來教某個概念的基本概念。例如：體積是指要多少立方體才能塡滿這個盒子，所以用立方體積木來塡滿盒子。
3. 具體教具是用來證明所學的數學公式是很合理的。
4. 具體教具是用來較有結構的表達一個數學關係式。

CMF 的研究興趣在具體教具使用方法 4，即利用教具來表達一個數學關係式。例如：使用積木來表示一元一次方程式。英國小學高年級就常常用具體教具來表達一個數學關係式。一般的書上都會告訴老師說：只要你用具體教具來教這些概念，有一天學生就會了解你要教的抽象概念。爲什麼我們認爲用具體教具來教學是好的呢？下列是一般的看法：

1. 形式化的數學透過具體教具來學習會較容易。
2. 如果學生能用具體教具來解題，那麼，學生也能轉成用數學公式解題，而且，只要學生需要，他們可以很容易的又回到操作具體教具來解題。
3. 當學生對使用公式來解題有困難時，學生應該可以回到用具體教具來幫助他處理困難。
4. 學生也很喜歡這種透過操作具體教具來學習數學公式的經驗。

上述對具體教具的看法僅止於是一種信仰（belief），沒有證據證明這些看法究竟是對或錯。

二、研究方法

CMF 的研究方法依序說明如下：

1. 徵求志願參與的教師

志願參與研究的教師都是碩士班的學生。由於 CMF 的研究對象是 8～13 歲的小孩，而在小學教書的老師通常不是主修數學的，但是參與研究的教師對數學都有興趣，且修過一些數學課。找碩士班學生參與研究有二個好處：(1)他們的素質都相當好，(2)他們可以幫忙處理資料，並作資料分析，這些資料也可以用來寫他們的碩士論文。由於

CMF 是要研究學生從具體教具操作學習到數學公式學習之間的轉型現象，因此在研究之前都先調查這些志願參與研究的老師是否在這學期內要用教具教學，又要教公式。

2. 參與研究的教師在教學前要詳細寫出教材的處理次序及如何使用教具、如何從具體操作到公式的教學教案。該教案雖然由教師與研究者共同討論出，但研究者並沒有企圖要影響教師的教學方式。教師需按照他們原來的教案教學，如果要改變教案，必需事前告訴研究者。

3. 在開始教學之前，研究者在每班選出不同程度的 6 名學生面談（一共要面談四次）。這 6 名學生的選法是：2 位程度好的學生，2 位中等程度的學生及 2 位程度較差的學生。這一次的面談目的是想了解：(1)學生在學之前是否已經會這個單元的概念了。(2)學生是否已經具備了學這個單元的預備知識。爲了觀察學生在學習之前、學習的過程中及學習之後的處理問題的方法是否會有變化，因此對某些固定的問題會在四次的面談中一再的問，以了解學生的了解情形。

4. 當教師認爲學生對具體教具操作的學習已經夠好並可以教數學公式之前，研究者對相同的學生做第二次的面談。理論上，教師認爲當學生透過具體教具學面積後，學生已經到了能發現面積公式的程度了。第二次面談的目的就是要了解學生是否眞的透過具體教具操作之後就已經了解公式了。

5. 教師教公式的那幾堂課，研究者都坐在教室內觀察學生如何從具體操作學習轉型至數學公式的學習。爲了詳細記錄，整堂課都錄音並記錄黑板上的任何文字。

6. 教完公式這堂課後，再對相同的學生做第三次面談。理論上學生處理問題的方式已經改變了。因爲以前他們是用具體操作而現在已學過公式了。

7. 在學生學完公式三個月後，做第四次面談。這次面談的目的是想了解：(1)學生是否還一直使用具體教具；(2)學生是否已經改變到使用公式了；(3)學生是否仍用他們自己的方法；(4)學生是否能看出具體教具操作與公式之間的關係。爲了達到最後一項面談目的，通常研究者會問學生類似下列的問題：

“有一天你們上課時，我發現你們在使用數學積木。又有一天，我去看你們上課時，發現你們在教面積公式。數學積木和面積公式之間有沒有什麼關係？”

或

“有新同學到班上來，要你當小老師教他有關面積的問題，你要如何教他？”

參與研究的教師將面談錄音轉成書面資料，並對面談內容加以分析。研究人員亦將教師的上課錄音轉成書面資料給教師看。教師發現他們的教學很辛苦，並對學生的面談

資料很困擾，因爲學生在面談時會說老師沒教過。

由於 CMF 做了許多錄音與觀察，因此有很多的原始資料。這些資料是在不干擾的情況下的教師與學生的對談狀況，是一些定性的資料。由於 CMF 想了解：教師共同具有的教學特性，因此 CMF 亦做量化的工作。

三、研究單元

Hart 博士負責下列四個單元：

位值（5班，36個學生）；立體的體積（4班，24個學生）

圓周（2班，12個學生）；等價分數（3班，18個學生）

另外的三個單元：方程式、長方形的面積、擴大（Enlargement），由別人做。

本研究共有20位教師，150位學生參與，共有600捲錄音帶，並全部轉錄成書面資料。

四、研究結果

1. 教師從來不告訴學生爲什麼學生需要學一般化的公式。

雖然這些公式很有效率，但從研究資料發現教師告訴學生要學一般化公式的理由是：你總不能一輩子帶著積木來算體積吧！在20位的教師中，只有一位教師在教學時提到體積有時候是不能用積木來算的。例如：要用多少積木才能塡滿這個教室的體積？這就告訴我們爲什麼要學公式了。

2. 同樣的教材，各個教師用具體教具操作的時間有很大的差異。有的老師花90分鐘，有人少於5分鐘。有的教師在一堂課中會同時使用數學積木及公式，但卻很快的帶過。但很少有教師強調應花時間在具體教具學習到數學公式學習的轉換。

3. 學生的某些錯誤是來自教師本身犯了這種錯誤。這種錯誤常發生在教師想用很簡單的方式來表達觀念時。例如：

例一：

$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 45 \\ \hline 82 \end{array}$$

教師在教加法的運算時說：每行只能記錄到9，超過9，則多餘的要記到另一行去

。結果學生在做下面的減法問題時說：7 － 8 不夠減，向十位借 1 ，一行最多只能記到 9 ，所以借 1 ，此處寫 9 。

$$\begin{array}{r} 29 \\ \cancel{3}7 \\ -\ 28 \\ \hline \end{array}$$

例二：

$$\begin{array}{r} 132 \\ -\ 129 \\ \hline 003 \end{array}$$

一位很好的教師在做完上述的減法問題時問：我們需要前面這二個 0 嗎？

生：不必。

師：好。我們不要這些 0 就把這二個 0 丟掉。

結果學生在做下面的問題時說：丟掉後面的 0 ，答案是 2 。

$$\begin{array}{r} 376 \\ -\ 176 \\ \hline 200 \end{array}$$

教師說把 0 丟掉時是有點在開玩笑，但因為學生不了解數學，第一次碰到這種問題，學生把玩笑當眞，以為碰到 0 就丟。由此，我們得到一個教訓：學生是第一次學，而教師已學過很多次，因此教師在說這些話時需很小心。

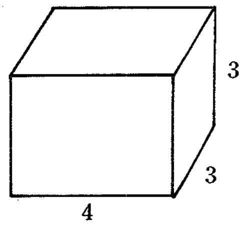
4. 教師在教學時常留下一個很大的斷層，希望學生自己去補。

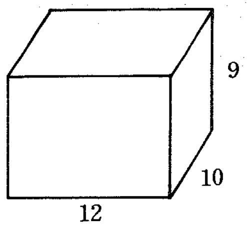
例如：

上課時，教師給每個學生 36 塊小積木，要學生做一個立體，然後列表收集每個小孩的立體的長、寬、高（如下表），以便找出體積與長、寬、高的關係。

體積	長	寬	高
36			

教師將學生疊出的立體畫在黑板上，圖形與學生桌上的立體模型一致（如下左圖），並算出體積。當教師算出體積後，教師將黑板上的數字擦掉，重新標上數字（如下右圖）。由於教師偷懶，沒有把原來的立體圖形抹去，只重新標上數字，使得學生對圖形與數字的不符感到很困惑。研究者認為教師應重畫一個圖形，因為這是另一個新的立體圖形。



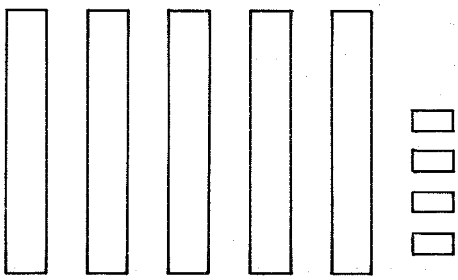


5. 有時教師所使用的具體教具操作與演算法完全無關。

8～9歲的學生第一次學二位數的減法時，教師使用可以拆開、組合的積木來說明。例如：

$$\begin{array}{r} 54 \\ -\ 28 \\ \hline \end{array}$$

教師要學生先拿出5根代表10的積木，並拿出四塊小積木代表4（如下圖）。然後，

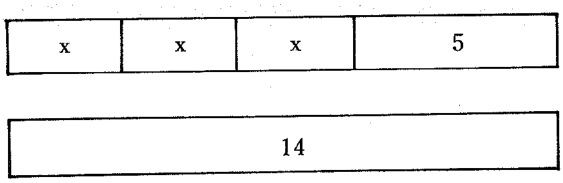


教師說：54－28，所以先拿掉2根積木，又4－8不夠減，所以拆開一根積木，再放回2小塊（10－8＝2），這時候剩下2根積木及6塊小積木，所以 $\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\,10} \\ \cancel{5}4 \\ -\ 28 \\ \hline 26 \end{array}$ ，答案是26。

此時，教師的具體教具操作是54－28＝54－20－8＝34－8＝24＋（10－8）＝24＋2＝26。但是我們的演算法卻是54－28＝（40＋14）－（20＋8）＝（40－20）＋（14－8）＝（40－20）＋6＝20＋6＝26。具體教具操作是先減十位再減個位，而演算法是先減個位，再減十位。具體教具操作的個位減法是10－8＝2，2＋4＝6，而演算法是14－8。因此具體教具操作與演算法根本是不同的事情，這二者根本完全無關。

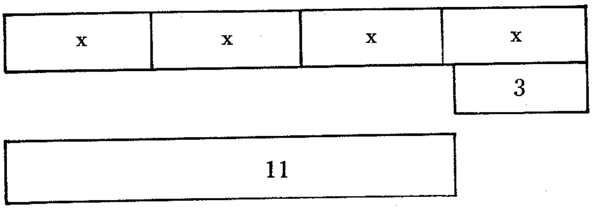
6. 有時教師所使用的具體教具操作比原來用演算法則處理問題更困難。

教師常常喜歡用積木來處理解一元一次方程式的問題。例如：3x＋5＝14

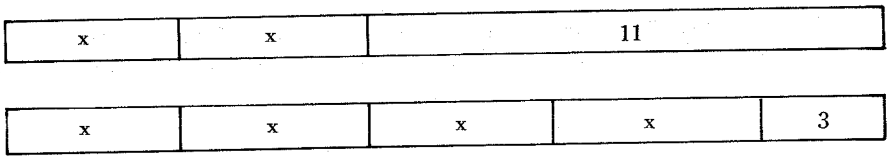


由於積木沒有一條 14 的，受限於積木的長度，教師通常以下列二種方法之一來處理方程式：(1)讓方程式的右邊值不超過積木的長，即不超過 10 ，(2)假設紫色或黑色的積木爲 14 。無論那一種處理方法都不是很好的方法。其實這時候用畫圖比具體積木更好，因爲圖形可以表出你所需要的長度。例如：

$4x-3=11$



$2x+11=4x+3$



其實在解一元一次方程式時，教師所要教的是等量公理，即方程式左、右二邊同時處理相同的量，例如：

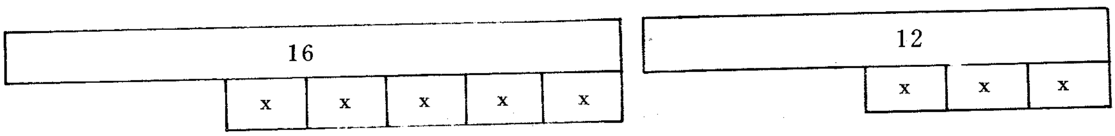
$3x+5=14$

左、右各減 5 ，化簡爲：

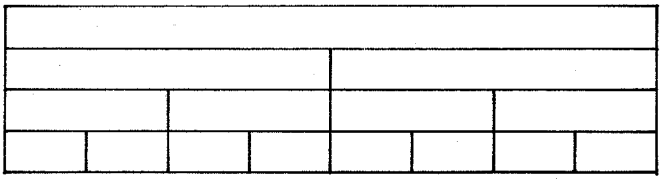
$3x=9 \Rightarrow x=3$

學生用積木來表示一元一次方程式實際上比學等量公理難（見下面例子），因此，利用積木來處理解一元一次方程式的表現方式並不是一個好的方式。

$16-5x=12-3x$

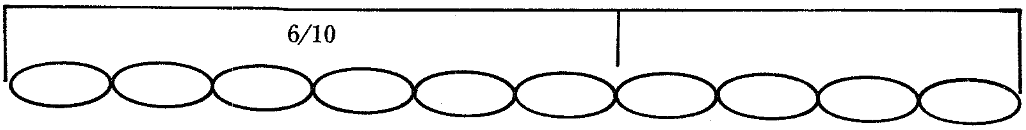


7. 教師在使用具體教具教學時，對於具體教具所展現的眞正意義似乎都沒有交待清楚。



教師在使用積木說明等價分數 $1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$，並給出規則“將分數的分子、分母同乘一個數就可以找到一個等價分數”後，研究者面談了一位學生。

師：你能不能舉出一個分數也是 $\frac{6}{10}$？



師：你畫了這些小香腸要做什麼？

生：我把它們分開來，就像我們在教室中畫的一樣。

師：我懂。你把它們當作積木。

生：對！符合十分之…，多少？

師：$\frac{6}{10}$，我要你舉出一個和 $\frac{6}{10}$ 相等的分數。

生：比 $\frac{1}{2}$ 大。

學生是根據他自己所畫的橢圓的大小來做，教師在教學時可能較少強調這些橢圓應一樣的大小。

師：你能不能舉出一個分數也是 $\frac{6}{12}$。

生：嗯，12，6（指著一半的地方），這是$\frac{6}{12}$。

師：你畫了12個圓圈。

生：（數了6個）這是$\frac{6}{12}$。$\frac{3}{8}$（用手蓋掉12個圓圈中的4個），1，2，3，4，5，6，7，8，這8個當作1，而3在這裏，所以$\frac{3}{8}$和$\frac{6}{12}$不相等。

師：對，$\frac{3}{8}$和$\frac{6}{12}$不相等。現在你怎麼辦呢？你剛剛爲什麼遮掉4個圓圈呢？

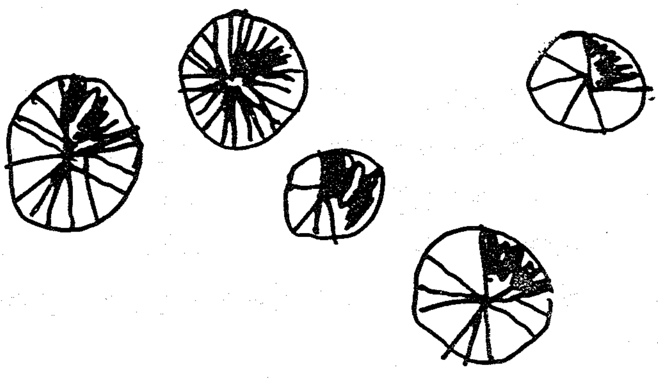
生：因爲這裏有12個圓圈，遮掉4個才會剩8個，才可以找$\frac{3}{8}$。而$\frac{3}{8}$與$\frac{6}{12}$不相等，因爲$\frac{3}{8}$有3個圓圈，而$\frac{6}{12}$有6個圓圈。現在試試$\frac{6}{11}$，（用手遮掉一個圓圈後）他們相等。

師：和什麼相等？

生：嗯，$\frac{6}{12}$。

教師在使用具體教具教學時，對於具體教具所展現的眞正意義似乎都沒有交待清楚，才會產生上述這種以分子的個數是否相等來判斷等價分數的情形。教師在教學過程中總認爲透過具體教具來學習，當學生學過公式後，仍然隨時可以回到具體教具來解題。事實正好相反，學生是先有答案再反過來使用教具操作，而非像教師所認爲的是先操作教具才有答案。例如在等價分數的教學過後三個月的面談中。

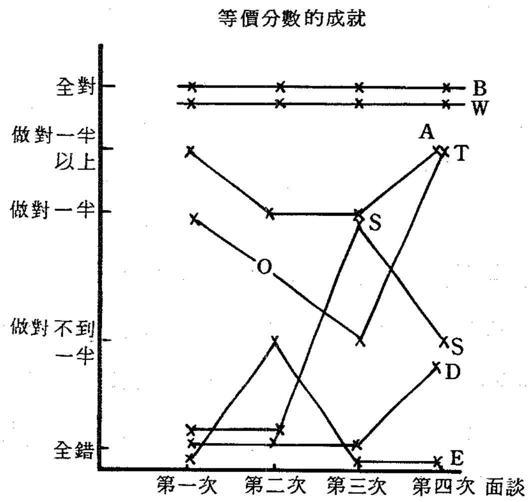
師：你能不能舉出一個分數也是$\frac{6}{10}$。



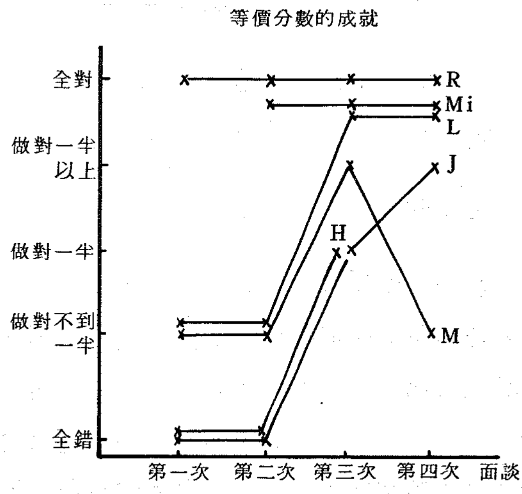
有二個學生用上面的圖形來說明等價分數。其實，除非事前已經知道那二個分數是等價，否則由圖形根本無法知道那二個分數是等價。學生這樣畫是因爲教師教學時，畫這些圖形就很隨便。如果教師眞的想用圖形來教等價分數，那麼，教師應把圖形畫的很精確，甚至二個分數圖形可以重疊在一起。由此，我們得到一個教訓：教學時，如果要透過圖形來教一些規則或觀念時，應把圖形畫的很精確。

8. 教師常認爲第一次學沒學會無所謂，反正中學有機會再學一次，其實並不然。

研究者爲了檢驗學生是否眞的在中學有再學一次，因此做這個實驗時，選一群學生來自某一個國小，因爲來自同一個地區，因此這些學生大概都會到某一個中學去，所以研究者在那個中學亦選了一群學生，然後看這二群學生對等價分數的學習狀況。



小學（ 10 ～ 11 歲 ）
0 表示只問代號T的同學一個問題



國中（ 12 歲 ）

在這七個小學生中（上圖左），代號B、W的學生在學習等價分數之前就已經有等價分數的概念了；而代號S、D、E的學生在學習之前完全不會等價分數，而學過等價分數三個月後也會不到一半；至於代號A、T的學生到底在教學過程中學到多少也很難說。由上圖右，我們發現學生在國小沒學好，則在中學只有一半的機會可以學好。

9. 評量時，教師不應該只注重答案的對錯，更應該注意學生的解題過程。

利用乘法來產生等價分數

面談 / 學生	剛教學完	教學完三個月後
Br	×??×○√√√√	×××××
G	√√×××××××××	××○√√?
J	×××○○	×××××××
M	√××××××××	?××××××
Bi	××××√√√√	××××√
L	√√√√√√√√√?	×√×××× 有 3 題用除法處理

√ 表示學生用分子、分母同乘一數的方法來產生等價分數
× 表示學生不是用乘法來產生等價分數，包括使用猜測的方法
○ 空白
? 面談者不知道學生是使用什麼方法來解題，或面談者的問題幫助學生解題。

上表是學生在學習等價分數時的第三次及第四次面談的結果。由表中我們發現學生在教學過後三個月的面談中都放棄使用乘法來處理等價分數，即使是最好的學生（代號L）也改用除法來解題。沒學會使用乘法來處理等價分數的學生，有時用加法也會做對。從CSMS的大量數據可以看出，那些可以用加法來處理的等價分數都是很簡單的題目。這些使用加法來處理等價分數的學生並不是因爲他們了解到加法和乘法都可以處理這種問題，而這些問題用加法就可以簡單的處理了，而是這些學生根本不會使用乘法來處理這些等價分數。因此，如果想使學生用乘法來做等價分數，那麼教師在閱卷時就不該只看對、錯，而應該注意學生在處理問題時是否用乘法或加法了。

10. 學生犯錯的原因之一是教師將他們放在一個容易犯錯的環境中。

$$\begin{array}{r} 45 \\ 19 \\ \hline 5_{1}4 \end{array}$$

一個8歲的學生在做上面的加法時說：5＋9＝14，寫4，將1放在旁邊。當學生要做十位的相加前，研究者說：等一下，你這個1是什麼？

生：這個1是剛剛14中的1。

師：與19中的1的值是否一樣？

生：不一樣。

師：19中的1是多少？

生：10。

師：14中的1呢？

生：不是10，因爲寫的比較小，應該比10小。

師：這一題的答案呢？

生：5,4

學生的想法也很合理，教師要學生將進位的1寫小一點，因此學生認爲寫小一點就表示這個1所代表的値也小一點。教師不要爲了讓本子整潔一點而強調要小孩寫進位的數較小，以免學生犯了系統制度下的錯誤。

五、結　論

從CMF的研究結果得知，皮亞傑的理論在使用時並非如此完整，還有一些地方是需要加以塡補的。具體教具的學習不一定那麼好，如果想利用具體教具來教學，那麼，需將具體教具教學與概念之間的關係好好的分析，這樣才可能帶領學生學好。從具體教具的學習到數學公式的學習並非可以立即的、直接的進行。當學生不會利用公式解問題時，不要期待學生會利用教具來解題，公式與具體教具之間的斷層很大，學生無法自己接起來，如果教師要用具體教具再帶他一次可以，但不要期待他會操作教具來了解公式，那是不可能的！

六、答聽衆問

問：CMF的研究似乎是個案研究，如何將它的研究結果一般化？

答：CMF的研究包括20位老師，150位學生。所有的教師都沒有在補具體教具與公式之間的斷層，而所有的學生也都沒有說具體教具與公式之間有何關係，按照這樣的數量應該已經具有一般化了。在今天所舉的例子中，除了最後一個例子眞的是個案以外，其他的例子都是研究結果中具有代表性的例子，能代表學生的學習情形。

問：教師對於大部分的學生沒學會他所教的概念時，有何感想？

答：當教師知道有一半的學生沒有學會他所教的概念時，教師認爲這是很正常的現象。教師的這種反映反而讓研究者感到很驚訝！

問：CMF 的研究結果對師資訓練有何影響？

答：我過去有 10 年師資訓練的經驗。以往，我偏向於讓教師知道用什麼方法教較好。現在，我除了讓教師知道怎麼教較好以外，我還要讓教師了解學生學不好不能全怪學生。當我把 CMF 的研究資料給在職訓練的教師聽時，那些在職教師發現他們也都是這樣教，而 CMF 的研究結果可以讓教師明白這樣的教法並不是最好的。

問：CMF 的研究結果對教學有何影響？

答：英國目前的教育比較注重外表，例如：禮貌、乾淨。其實教育應多注意的是腦中的活動。英國的中、小學教師每週要上課 30 小時，教師協會只希望減少班級人數，有電腦…，其實教師協會應要求政府減少教師的上課時數，使教師有較多的時間去設計教學、教材。

問：學生不喜歡數學，放棄數學，怎麼辦？

答：最重要的是找到學生不喜歡數學，放棄數學的原因。通常它的原因有二：(1)小學教師是採包班制，教師只教他喜歡的學科，而很少花時間在教數學上；(2)學生認爲他們的教師不喜歡數學，因爲教師在教數學時很少微笑，教師會說：今天我們要學的是一些很困難的數學。因此，根本的解決之道要從師資訓練著手，要讓教師喜歡數學，學生才可能會喜歡數學。