

如何將研究文獻用於實際的教室中

(Putting Research into the Classroom)

哈特 (K. M. Hart) 博士專題演講

楊瑞智 整理

國立臺灣師範大學科學教育研究所

今天將根據個人目前所主持之那飛爾中學數學課程 (Nuffield Secondary Mathematics)，在實際發展教材的運作過程中，我們如何搜集、選擇及應用過去研究文獻的結果。

那飛爾中學數學課程主要包含三種教材

1. 核心教材 (Core Material)：

提供機會讓學生怎樣去用已學過的數學，亦即要學生去做許多的探索及解題活動。

2. 層次教科書 (Level Books)：

提供學生學習新的教材與技巧，在層次教科書裡所謂的層次，是指根據研究所得的學生概念瞭解層次。每一單元的安排，都由低層次（容易）進展到高層次（困難），使教材具有層次性的發展。

3. 教師手冊 (Teacher Material)：

教師手冊包含三類資料：

- ① 一般性 (General) 資料—指的是對單元教材已有的研究結果，例如針對不同學生那一種教法較有效。
- ② 核心教材相關的資料 (Linked to Core)—包括錄音帶、幻燈片、投影片及要點說明，老師根據這些資源提供有趣的數學應用活動。
- ③ 層次教科書相關的資料 (Linked to Level books)—包含各單元的教學策略、評量、學生推理的錯誤分析及學習成就紀錄等建議事項。

小學生的研究資料

此課程計畫的特色是，準備把發展出來的教材適合 90 % 以上的學生使用。換句話說，就包括了很多數學成就很差的學生，那麼這些很差的學生他們在 11—12 歲的數學能力，很可能只相當於 5—6 歲一般小孩的數學能力而已，所以要想知道這些學生會什麼，那就一定要回去找那些針對 5—6 歲小孩所作的研究。

因此在開始發展教材的時候，需要從研究資料中找出 5—6 歲小孩可以做的題目，試測後挑選出 95 % 左右 11—12 歲學生可以做的問題，接著再看看另外的 5 % 到底還會些什麼？

然而，11—12 歲這些低成就的學生與 5—6 歲的小孩，實際上還是不一樣的。雖然他們之間的數學能力差不多，但至少就學時間就不一樣，我們從 150 個這樣的學生樣本中，設法找出如果他們要學中學數學課程，那麼在學這之前，他們還需要學些什麼教材，已具有的預備知識又是那一些？

以下就是所找到學中學數學課程所需要的預備知識：

- (1) 把一些具有 1—6 點的圖形卡片，按照次序排出。
- (2) 給一個二位數，能夠說出它的前一個與後一個數。
- (3) 能夠往上數，從 1 或從任何一個數開始。
- (4) 當他們能讀出一個二位數時，也能正確寫出的能力。
- (5) 能把 25 以下的數，按照次序排出。
- (6) 如果給他兩組點的集合，能夠解釋那一組“多”或“少”。
- (7) 給他一疊的銅板，他可以數，且可以看出不一樣銅板的價值。
- (8) 如果要你付 45 便士的錢，能選擇一些銅板湊起來。

中學生的研究資料

前面所談的是指要發展中學數學課程時，說明為什麼要找一些國小學生的研究資料作為基礎。另外，第二種資料，是以中學學生為對象的研究資料。以下是我主持以中學學生為對象的三個研究計畫。

1. 中學數學與科學概念 (CSMS)

(Concepts in Secondary Mathematics and Science, 1975-80)

2. 中學生的數學解題策略與錯誤 (SESM)

(Strategies and Errors in Secondary Mathematics, 1980-83)

3. 學生的數學架構 (CMF)

(Children's Mathematical Frameworks, 1983-85)

CSMS 的資料

第一個研究計畫—CSMS，總共研究了十一個單元，從她們所發現的結果，把它放到教師手冊中，告訴老師們每一個單元裡面我們的學生感覺那一部分比較簡單或那一部分比較困難，是怎樣的困難。在 CSMS 的研究中，主要的工作有三方面：

第一階段發展測驗題目。

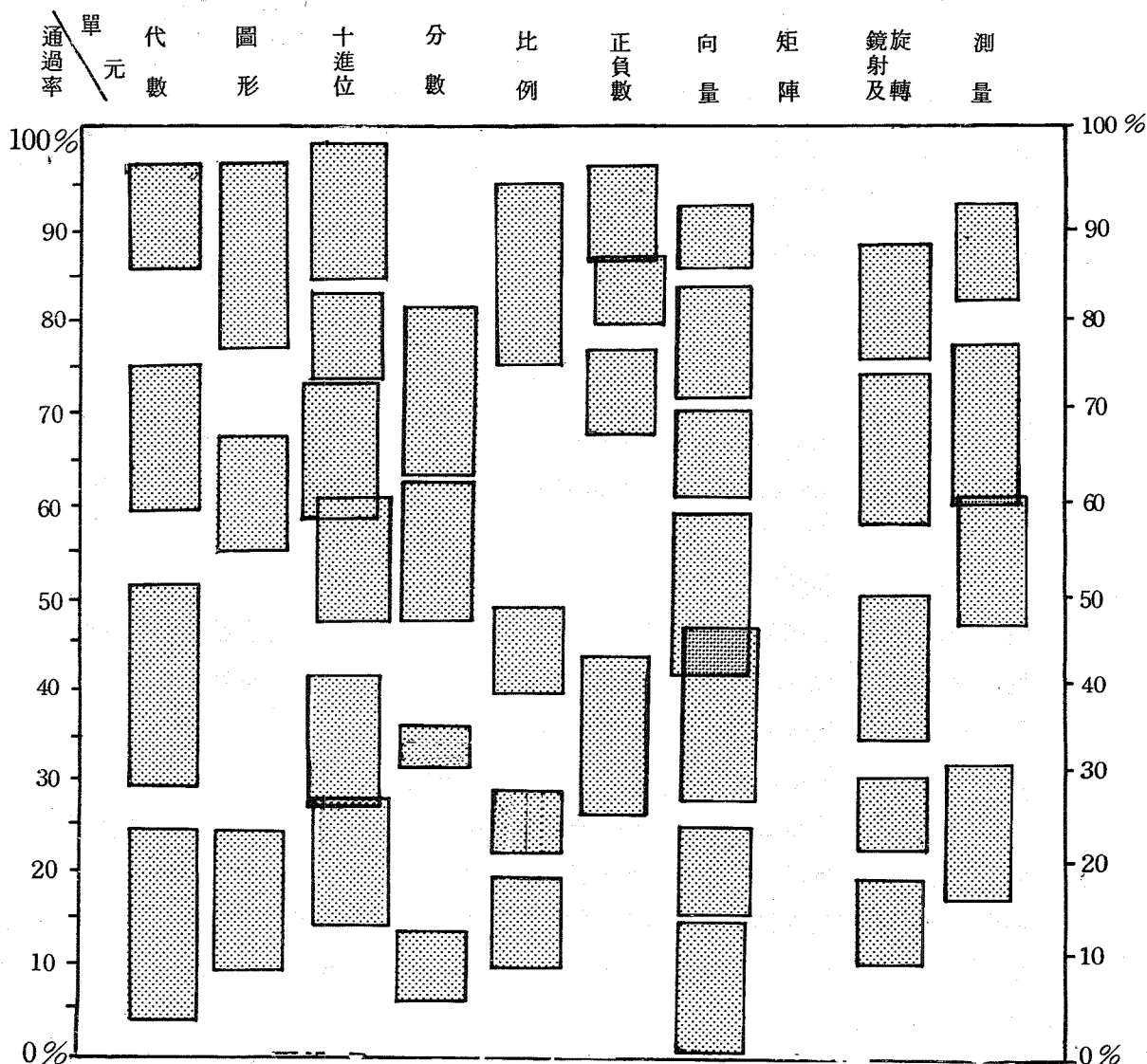
第二階段面測。面測又分為兩個角度來看，一方面要看學生對她們發展出來的題目到底懂不懂，如果不懂的話，那麼你測也沒有用。另一方面，學生了解問題以後，他解這些問題的方法與想法是怎麼樣？這要從面測中去瞭解。

第三階段大樣本的筆測（來自英國50個不同的學校，10,000個學生）。

研究樣本，是依照學生的智力分布，使樣本中智商低、中、高的分配形成常態分配。她希望這樣的樣本檢驗，可以把最後研究的結果，告訴老師，如果遇到一個混合能力編班的班級，班上學生的程度大概是怎麼樣。幾乎每一個樣本都參加了兩種概念的測驗。例如：同時參加比例單元，以及代數單元，或圖形單元。這樣的測驗方式，以用來比較不同單元間的難易程度，亦即概念間的橫向關係。

CSMS 研究的十個單元及其關係

下面，我們將CSMS所研究的十個單元之通過率，圖示如下：



圖一 CSMS 十個概念單元所作筆測的通過率分布示意圖

圖一，這些一格一格的框框就是一群一群的題目，最旁邊的是通過率，就是有百分之多少的學生會做這題目，越上面的題目就越簡單。例如，最左邊的地方是代數，即文字符號的考題，那麼最上面的框框，等於是說有 86 % 到 97 % 的學生會做這些題目。這裡所謂的一格一格，就是一個層次一個層次，而不同單元的層次分布並不太一樣，整個放在一起看，就形成這樣的示意圖。

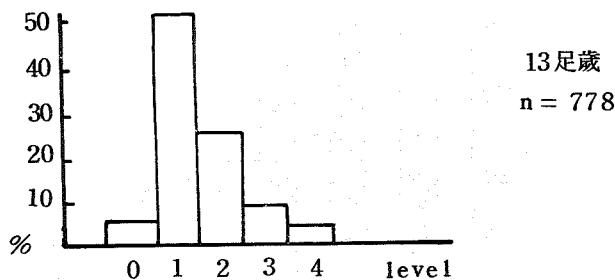
這裡我們可以看到兩種現象：第一，某些單元的題目可能有很簡單的題目，但相對的另一單元可能就沒有很簡單的題目。例如，代數有很簡單的題目，但分數則沒有（參

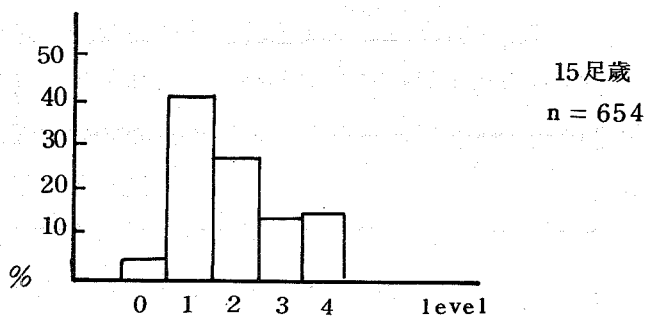
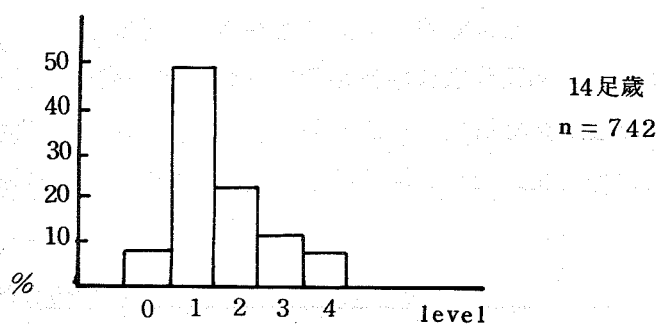
考圖一)。第二，從學生的觀點看，有些學生在某一單元學得較好，但另一單元就不一定，例如參考下表一，比例與代數這兩個單元的比較，第一列表示比例為零層次的學生，他們在代數上有31.6%為零層次，有62.9%為第1層次，6.3%為第2層次。但是從這個表上可以確定的是，在比例為0層次的學生，不可能在代數上為第4層次，反之亦然。

		代 數					Row Total	Row % Col. %
		0	1	2	3	4		
比 例	0	31.6 24.5	62.9 7.9	6.3 1.3	0 0	0 0	5	
	1	8.9 65.7	58.4 70.5	25.9 50.6	6.1 12.1	0 0	47.8	
	2	2.3 0.8	27.2 16.7	34.5 34.3	33.2 33.5	0.8 4.7	24.3	
	3	0 0	11.6 3.2	17.9 8.1	59.5 27.2	9.2 25	11.0	
	4	0 0	3 0.6	8.3 1.8	57.6 20.1	33.3 68.8	8.4	
	Non Scale	1.9 1	13.0 1.1	27.8 3.9	50 7.1	1.9 1.6	3.4	
Col. Total		6.5	39.6	24.5	24.1	4.1	1.3	n = 1574

表一：比例（代數）概念各了解層次學生的代數（比例）了解層次分佈

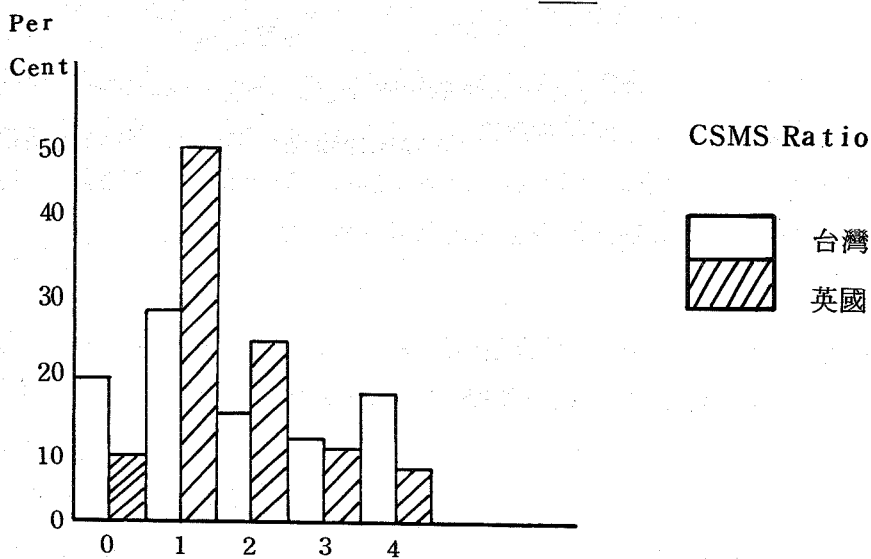
接著，我們考慮年齡的成長對瞭解的影響。從每一個單元的研究結果中發現小孩們並不因為年級增加（或年齡成長），概念了解就一定會比較好一點。例如以比例這個單元來看，參考下圖二，13、14、15歲了解層次的分佈，基本圖都差不多，一年與一年的差異並不太大，大部分的學生還是保留在第一個層次。





圖二 不同年齡群在比例單元的了解層次分布圖 (1976)

另外，圖三是英國學生與台灣學生在比例這個單元的比較，發現其分布圖是不太一樣。特別是，台灣在第4層次比英國多，但在第0層次也比英國多。



圖三 英國學生與台灣學生比例了解層次的比較圖

•學童法與幼稚法 (Child methods / Naive methods)

通常在教學的時候，我們總是認為簡單的先教，然後再往上教難的，這想法基本上是好的，目前雖沒有看到任何實證的檢驗支持這樣的想法。不過，至少大家都認為這樣是對的。

從研究中，我了解到一件事情，即小孩子常常在解題的時候，用一些並不是我們老師教他的方法，這件事是做研究以後才知道的。我也一直把這結果告訴英國的數學老師。自然地，我們會問：學生為什麼會用這些方法呢？

例如，8人份的玉米湯食譜如下：

玉米8兩、奶油2茶匙、清水2公升、煉乳半公升、雞汁凍4塊。那麼：

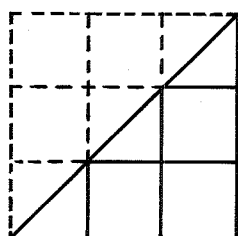
- ①要做4人份的玉米湯，需要多少水？
- ②多少塊雞汁凍？
- ③要做6人份的玉米湯，需要多少水？
- ④多少塊雞汁凍？
- ⑤多少煉乳？

在英國前4個問題，絕大部分的中學生(13、14、15歲)都會(80%以上)，但是到了最後一個問題只有30%會，其間有50%的差異。在英國有關比例的問題，通常學校教的方法有下列三種：一是用比例公式($a : b = c : d$)，另一種是找單位量，就是一個人應該有多少，再去乘幾個人，另外一種方法是做分數的乘除運算，即倍數法。

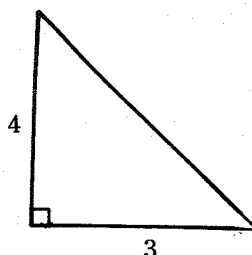
在她150個面測的樣本裡面，竟然沒有一個學生用上面所說的三種方法中的任何一種，每一個學生告訴她的作法，例如問4人份的玉米湯所需的數量，學生都說折半。接著再問折半的意思是什麼？折半是不是除以2，還是乘以 $\frac{1}{2}$ ？學生竟然說不是，折半跟除以2與乘以 $\frac{1}{2}$ 無關，折半是一種加、減的方法而已，折半是降一半下來。

關於6個人的玉米湯所需的數量，英國學生幾乎都把6人看成4個人加2個人，所以8折半變4，4折半變2，那麼 $4 + 2$ 就是6，這是他們的解法。由於學生都是用折半、折半再相加的方法(“折半疊加法”)，所以對於最後一道題(5)就碰到困難了。因為8人份煉乳半公升，所以，6個人份，就要把半公升折半，再折半一次，然後相加，等於需要將分數 $\frac{1}{2}$ 折半、再折半，這比整數難太多了。這也就是為什麼本小題跟其他小題的答對率有50%差距的道理。

另外，我們也發現中學生用的一些解題方法，有一些其實是他們小時候學的，在小學時學來的。例如，圖四，這兩個計算面積的問題有格子，學生可以點數，沒有格子他們沒有辦法數，答對率就相差很多。



Age 12 13 14
77.5 86.9 91.4



Age 12 13 14
31.4 38.7 47.5

圖四 計算面積，有格子與沒有格子的比較

接著，另外一個是從位值單元找出來的題目，如下：

英國全國測驗結果

Divide by 20		答案				
		1.2	1	1.4	1 餘 4	不能算
(I) 24 (n=170) 11-12 yr		9 %	7 %	8 %	12 %	15 %
	(n=240) 11-15 yr	34 %	1 %	15 %	3 %	6 %
		0.8	0	0.16	0 餘 16	不能算
(II) 16	11-12 yr	7 %	2 %	4 %	—	51 %
	14-15 yr	36 %	—	6 %	—	23 %

有趣的是，有這麼多百分比的學生，認為下列都是不可能發生的。

- (1) 商不為整數。
- (2) 小數除以大數。

前面所舉的例子中，有一種稱為學童法 (Child Methods)，是小孩子自己發展的方法，如：使用折半法解比例問題。有一種稱為幼稚法 (Naive Methods) 是他小時候學來的方法，就像利用數格子解面積問題，這些方法有下列四點特徵：

- (1) 傾向使用整數處理問題。

- (2)使用數數，往上數及疊加的方法。
- (3)只適用來解面前特定的問題，而不是一般性的解法。
- (4)當他們碰到較困難的問題時，這些方法就變得沒有效。

• 學生的一些錯誤類型

在我們的研究中，除了建立學生的了解層次以外，也發現到一些學生的主要錯誤類型，這些結果可以附在教師手冊中告訴老師。舉例說明如下：

例1.描點：(2, 5) (3, 7) (5, 11)

這些點都在同一直線上，把這直線畫出來。請問這直線上共有多少個點？

	<u>無限</u>	<u>很多</u>	<u>多於1</u>	<u>1</u>
13 歲	6.4 %	12.6 %	63.8 %	0.8 %
14 歲	6.2 %	5.1 %	69.2 %	2.0 %
15 歲	19.6 %	9.7 %	51.6 %	0.2 %

例2.請問有沒有點介於(2, 5)與(3, 7)之間？

若有，有多少個？

	<u>無限</u>	<u>很多</u>	<u>多於1</u>	<u>1</u>	<u>0</u>
13 歲	4.1	6.4	27.5	36.8	15.4
14 歲	4.0	3.0	22	41.8	17.7
15 歲	11.0	7.7	31.3	34.4	13.1

我們發現學生有許多不同類型的答案，對於第一題直線上總共有多少點？有些學生給的是他們所畫的點的個數，有些學生計數在這張紙上所通過的格子點的個數。另外，對於第二題介於(2, 5)與(3, 7)中有沒有點？有的話，有多少點？許多學生會認為沒有點或只有一點（指中點）。所以在她們發展的教材中就根據這些研究資料，告訴老師們“在教學的時候，除了告訴學生把兩點連結成一綫以外，同時也要告訴學生，在這兩點之間到底是怎麼的一個狀況”

例3. C 與D 是否等長？

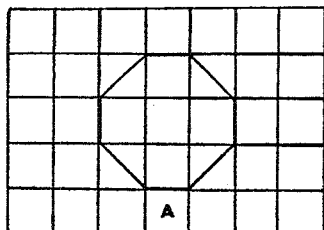


答案

等長	12 歲	13 歲	14 歲
	51 %	50 %	46 %

這一個是皮亞傑 (Piaget) 發展出來的題目，我們放在實測單元的試題裡，問 C、D 這兩條綫段是一樣長嗎？結果有這麼高百分比的學生說他們等長。

例 4.

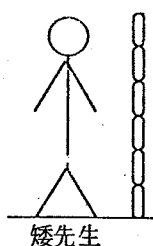


8 cm	12 歲	13 歲	14 歲
	43 %	43 %	42 %

類似上一問題，學生認為這個八邊形的周長是 8 公分，對角綫長與邊長一樣，並且這百分比很一致，與年齡不相關。

例 5.

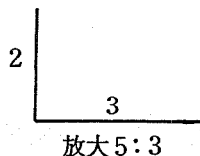
加法策略



矮先生有 4 根火柴棒高，
高先生有 6 根火柴棒高，
高先生有多少個迴紋針高？

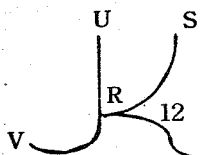
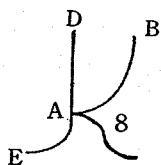
學生使用加法策略答題的百分率：

13 歲	14 歲	15 歲
51.4 %	50.6	39.1



5

47.6 %	39.4	39.7
--------	------	------



AB 9 units

求 RS

43.6 %	40.3	34.2
--------	------	------

UV 18 units

求 DE

32.2 %	29.3	25.1
--------	------	------

像例1.到例4.這種簡單的問題，學生們使用的是所謂的學童法（Child Method）或幼稚法（Naive Method），而當他們碰到像例5.這樣較困難的問題時，學童法或幼稚法就使不出來了。因為沒有辦法數或折半，這個時候他們就只好轉變策略，而用所謂的加法策略（addition strategy），也就是看相差，而不用乘法，這些學生不能辨別這應該是使用乘除的問題。

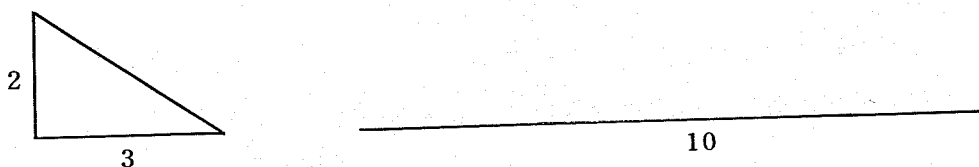
SESM的資料

除了把主要錯誤類型告訴老師以外，同時還儘可能的提供老師一些補救教案。這些補救教案，主要是從文獻中找或我們自己實驗過的。在我第二階段 SESM 的研究，就是針對主要錯誤類型，探討犯錯的原因，設計補救教案。這計畫的研究方法包括以下四個步驟：

- (1)對13、14、15歲一般能力的學生筆測，找出使用“加法”策略的學生。
- (2)以筆測的試題與這些學生面談。
- (3)以其他問題來面談這些學生，包含一些喚起“衝突（conflict）”的問題。
- (4)嘗試設計教學教案，進行教學實驗。

• 認知衝突

在研究過程中，除了用原來的考卷問學生以外，另外還提供一些問題，希望能造成學生的認知衝突，就像這樣的一個例子，給學生一個三角形（兩股為2，3），放大後底邊為10要學生算高應該是多少？



如果用加法策略，會得到答案9，當學生畫出三角形以後，就可以直觀感覺這兩個三角形形狀好像不一樣，因而產生認知衝突。

從面談中，發現學生雖然知道畫出來的三角形形狀不一樣，但該怎麼辦呢？他們並沒有能力說，我應該改變解法。學生唯一能做的工作是，把畫出來後感覺太長的部分擦掉一點，使兩個三角形看起來像一點。像這樣的過程，雖然讓學生感受到所用方法可能是錯的，但是還不足以讓他放棄原來的方法。下次再碰到類似問題時，可能同樣還是會

回到他的加法策略。

●教學實驗

我們在診斷教學的這個計畫 (SESM) 裡，總共做了五個單元，其中比例、代數、分數三個單元的研究報告已經出版，另外圖形、實測這兩個單元還沒出書。

在我的研究中，找到學生所以使用加法策略解比例問題原因有三個。第一點就是他們逃避用乘法來解問題，第二點他們絕對逃避做分數的乘法運算，第三點他們不會去找比例尺，不會算放大或縮小的倍數。

我就根據這些加法策略者的特徵來發展教案，教案發展後，首先是對小群學生做教學實驗讓老師可以很仔細地檢討，學生是否真的在改變，同時在教學活動進行的過程中，要求錄音。事實上，如果你教學時同時錄幾次音，然後自己回來聽，你就會知道教的怎麼樣。若要改變自己的教學，這是一個很好的方式。

在我們的數學課程中，也發展了一系列的問題，讓老師評鑑自己，在課堂上跟學生對話的情況。例如，你是怎樣發問？對學生問的問題，你的反應怎樣？會不會對學生問的問題根本就不理？等等。老師根據這一系列的問題，配合教學錄音帶來檢驗自己，了解自己的教學。

就在做這個研究的時候，發展教案其實也碰到過失敗的經驗。譬如在比例這個單元，要糾正學生從加法策略到正確的比例推理，第一次的教案，結果從延後測一亦即在教完以後隔兩、三個月再來測驗學生，發現學生還是不會，後來找到的理由是，因為要會解那些問題需要會分數，而她發現這些學生分數的基礎不夠，所以根本就沒有辦法教會他們比例推理。換句話說，你要教學生用乘法來解比例問題，需要用到分數，而分數的乘法，在了解層次裡面是在頂層，即最高層次。而比例問題，需要用乘法解的，也是到頂。因此，要將兩個最難的教材合併起來，去教那些比較不會的學生，其困難可以想像。

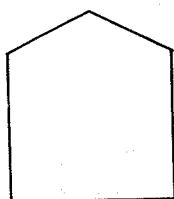
對這種難上加難的教學問題，真要教學生用乘法解比例問題，一定會涉及分數的乘法。怎麼辦？要麼放棄不教，反正很困難學生學不會，所以不教，這是一種答案；另一種辦法是，我只處理一部分，另外一部分藉助於其他媒體。我的處理方式是有關分數乘法這部分靠電算器來幫忙，而讓學生專心來學乘法，以乘法來處理比例問題。

利用電算器來幫忙學生做分數的乘法運算，關於這一部分的教學，另外又做了一個小組實驗，經過這樣處理的教學實驗就比第一次成功多了。有這個成功的經驗以後，接著，就進一步應用到一般的班級來試教看看，而與前面實驗不同的是，前者所教的學生

都是用加法策略者，而一般班級的學生就不一定了。實驗教學結果，發現最後定案的教案，用在一般性班級教學，效果同樣良好。我發展的教案可並不是革命性的教案，因為我不認為一個老師會接受革命性的東西，所以教案發展出來以後，一定是要老師可以接受的，那麼他才會拿去用。

•教學原則

以下就是實驗教案中的一個例子：



將房子放大 3 倍

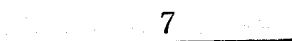
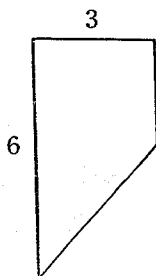
將房子放大 $1\frac{1}{2}$ 倍

給定比例尺，求新圖各部分的長

如上的房子，要畫出 3 倍大，那麼對於加法策略者在畫的時候，並不去算乘，而是比 3 次一段一段延伸，而 $1\frac{1}{2}$ 倍大，就去比一倍再加一半，但後來房子本身的長度是分數時，又要把它一倍再加一半，那又是分數的問題，這個時候他原來一段一段的方法，就用不上來。此時，學生就會請老師告訴他們怎樣做這個問題的方法。換句話說，要讓學生用他自己的方法去做，做到他的方法沒有辦法解決時，那時候他才會去學你要教他的方法。

最近我們再進入教室觀察，老師怎樣去教一些一般化的公式，如面積公式等於長乘寬。我們發現英國的教學老師，在教一般化的公式時，從來不告訴學生，為什麼我們需要這樣一般化的公式，一般化的方法。然而，我的想法是老師要讓小孩子用他的方法去解他可以做的問題，然後才慢慢地把問題加深，到他的方法已沒有效了。在那個時候，他碰到困難，才會想要學新的方法，學更一般化的公式，這種情況下，你才來教他，這時才會有效。

接著，我提供以下的一個例子：



3 變為 7

由於3變為7，然後學生要畫6這一段。其實他可以畫7再7，因為他看到6跟3的關係。換句話說，雖然3跟7的比例尺很難，可是學生在處理這個問題時，他仍舊可以使用他的加法策略，還是達不到教學者的目的。所以在這個時候，你可以換一個方式問：你告訴我3乘以什麼是7？即，如何的一個比例尺，從3變為7，對這類的教法，我提出下列的原則：在教學時，較好的方式是從學生可以做成功的地方，想辦法把他接到一般化的公式去，而不是從他失敗的地方開始。所以你要去找到他會的是什麼，他是怎麼樣做，接下來才提出具有挑戰性的題目，那時他的方法就失效，感覺到需要學新的方法。換句話說，學習是建立在成功之處學習。

提供那飛爾數學課程發展經驗以增進教師教學

根據這些研究的結果，我們現在已有能力發展所謂的層次教科書，即從簡單到困難。在層次教科書中，我將目前整個中學數學課程分為五個單元，分別是：數、空間、實測、機率與統計，及函數與結構等，對每一單元學生們依照自己的了解層次，選擇教材。例如在數這個單元，你可能已學到第七層次，可是這個時候你可能，只在空間的第一層次，或者是說可能還無法去學比較難的單元，如函數。也就是說，學生他可能在某一分支上，可以一直往上，然後才轉移到其他單元。當然我們就需要考慮單元與單元之間的橫向關係。

總之，從CSMS的研究結果，使我們有一個大致上的概念，怎樣去發展層次教科書；另外，從SESM的研究中發現學生犯錯的原因與擬定診斷性教學教法，使我們知道怎樣去避免學生犯錯。例如我們在編寫比例單元的教材時，我們就避免學生去用加法策略，雖然這種方法他可以成功地解決簡單的問題，但如果他持續用下去，就會碰到困難。

在英國大家都認為所發展的教材應該配合你的學生，而不是讓每個學生都來配合你這一套教材。所以，我們發展教材的目的，是要讓班上不同能力的學生，能同時學習有適合自己能力的教材。

在我們的研究過程中，除了研究結果對參與的老師有用以外，研究方法其實對老師也很有用。譬如面談的時候，老師只傾聽學生所講的，不作打斷與教學等的這樣經歷，對老師而言是很有用的。而且在研究中，如小孩回答的資料，對老師而言，等於研究人員就幫你整理好了資料，老師就可以直接從中學到小孩是怎麼想等等的資料。

另外，由於我們發展的試題具有標準化，所以等測完以後，老師就可以根據這些測試的資料，知道自己學生在這一單元的了解層次，及往下學的層次是在那裡。我們提供

研究的考題給老師的另外一個用意是，希望能夠影響老師怎樣去收集有效的評量考題。譬如有一個問題可以很容易地去檢驗出學生使用加法策略，那麼這樣的題目你就應該留下來，作為明年用，後年再用。在英國一般的老師題目考完以後，考試卷就丟了，以致沒有辦法從自己的經驗中學習。

我們在發展問題過程中，常常需要針對同一個概念，重覆的修訂問題內容。例如，以下是我們在發展連比的考題中，從第一個問題，修訂為第二個問題，最後定案的是第三個問題，同樣都是問 2 : 4 : 6，他們的內容之間到底有什麼差異呢？

甲買 2 個三明治，乙買 4 個同樣的三明治，丙買 6 個同樣的三明治，總共 240 元。

那麼，甲、乙、丙各應付多少錢？

在辦公室裡辦公，甲一星期來 2 天，乙一星期來 4 天，丙一星期來 6 天，這 3 人需付 240 元的咖啡費。那麼，甲、乙、丙各應付多少錢才公平？

在辦公室裡辦公，甲一星期來 2 天，乙一星期來 4 天，丙一星期來 6 天，這 3 人共付開燈的電費 240 元。那麼，甲、乙、丙各應付多少錢才公平？

第一個問題，由於每一個三明治有單價，所以此題中自然的就有單價在裡頭，對小孩子來講就變得很簡單。第二個問題，照理咖啡本身應該有價錢，而不根據咖啡的價錢，這裡要根據的是只看你來幾天，且要假定你每天喝的咖啡都差不多，且不管你喝多少，都是一樣的價錢。所以在這裡小孩子就認為很困難，因為他想到的是咖啡的單價，而你要的是另外一種標準。第三個問題，是介於這兩個問題之間，比較有自然的價格在裡面——電費。電費當然與你用電的時間有關，所以這個為比較自然的單位。也就是說，雖然針對的是同一概念的問題，却有不同的難度。透過這樣的研究，我們把這個經驗傳達給老師，告訴老師們：題目要問的到底是什麼？學生可能的方法是那些？學生會碰到什麼樣的困難？等。

在我們發展那飛爾的中學數學課程時，教材的內容是由一些有經驗的老師主筆。在此工作的進行中，常常由我主持，大家一起共同討論來修改，我發現一個現象老師常常忘記學生的預備能力是在那裡。譬如說，學生只會 100 以內數的操作，那麼老師在發展教材的時候，往往忘記這一點，很自然地一下子就跳到 150 去。亦即，我想強調的是老師們常常忘記學生只會到那裡，總是把學生高估了！