波動與三角函數

Bernice Kastner 著

吳家怡 譯

臺北市立師範學院

數學家常常為了解決某一種特殊情況，發展出新的方法，結果却恰好解決了完全不相干的另一個問題。這篇文章要討論的正是一個這樣的例子。

三角函數是由相似三角形的關係推展而來的，原來是為了用在無法直接測量的天文和地理上的問題。在下一節裏我們却可以看到這些函數如何用來形容波動現象。不過，我們先要做些練習，介紹三角函數之典型用途，以及一些常用到的直角三角學。

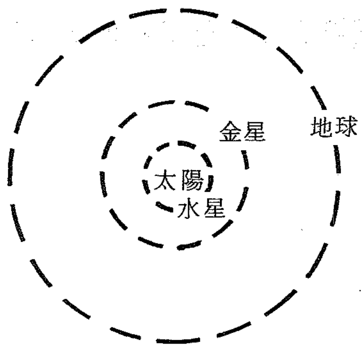
習題 I

1. 太陽的兩個最近的衛星是水星和金星，然後是地球（見圖一）。因此，我們在地球上總是看到它們出現在太陽附近。由地球上看，水星和太陽之間夾角約在0°到 23° 之間。

   (a)試作圖表示當夾角最大時，地球觀測水星的觀測線與水星軌道垂直（假設軌道為圓）

   (b)用三角函數表中適當的值來決定水星繞日軌道的半徑（以AU為單位，1 AU 約為地球至太陽間之平均距離，稱為（Astronomical unit）

   (c)如果金星和太陽最大夾角為 45°，求金星半徑（假設軌道為圓）。（這問題希臘天文學家Ptolemy 曾在西元 150 年左右提到）



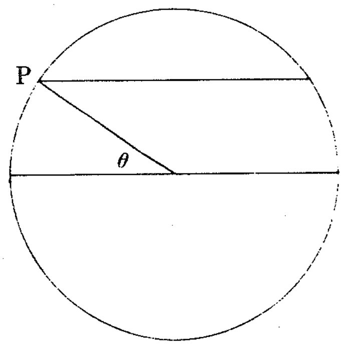
圖一

2. 有一種方法可以測出飛機場上空雲層（即所謂飛機場的"天花板"）在夜間的高度。先把探照燈垂直向上照，可以在雲上看到照出的光點，然後由地面上已知點A量出它的仰角爲 $75°$。由於A到探照燈脚的直線距離已知爲200米，求雲高。

3. 地球上任一點P的緯度是：從P到與P在同一經線上赤道上的點所成的弧之度量（見圖二）

(a)試證任一緯線的長爲赤道長乘以緯度之 cos 値。

(b)地球赤道長40,000公里，求緯度 $30°$ 之緯線長？$80°$ 之緯線長？

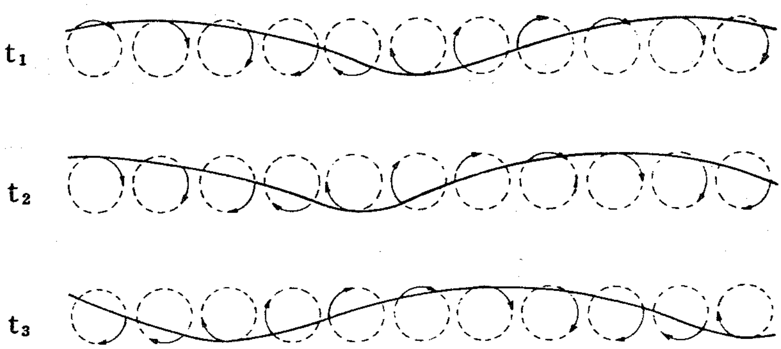


圖二

一、一些波動的例子

水波

水波可能是你最直接能觀測到的波動現象。試想當一塊石頭被投進平靜的湖裏，激起一圈圈的漣漪向外擴展。這時候，有一個東西——如軟木塞——浮在水面。水波經過時，它並不跟著水波移動，而是在原來位置上下浮動。圖三是一個水波的簡圖。圓圈表示水滴（或軟木）的實際運動情形，而實線則表示整個水波的運動狀況。

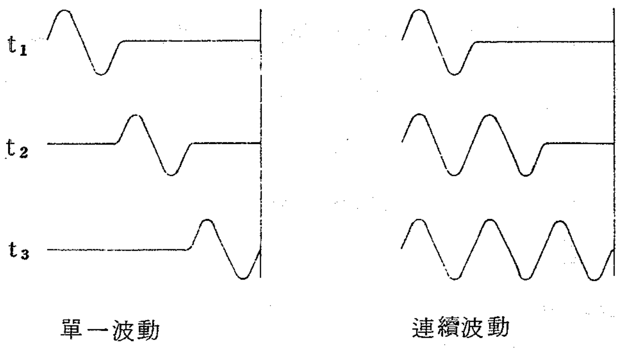


圖三　$t_1 < t_2 < t_3$

繩波

試試下面這個實驗。取一段繩子，把一端綁牢，握住另一端。拉緊繩子，然後很快地上下移動你握住的那頭。你製造出來的波會沿着繩子一直跑到另一端。注意繩子本身

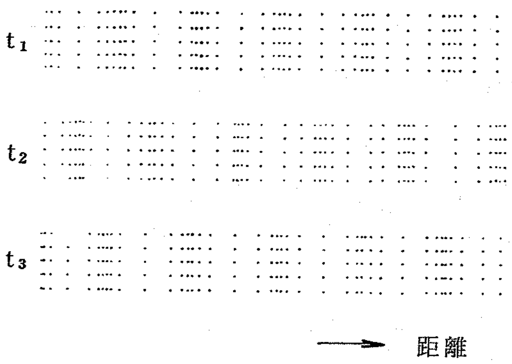
的小質點運動的方向與波前進方向垂直。圖四表示當時間變化時繩子的樣子。



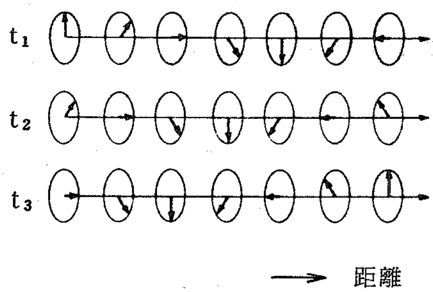
圖四　$t_1 < t_2 < t_3$

聲波

雖然我們看不見聲波，但是我們知道聲音是由它經過的介質分子傳送的。介質分子順着聲波運動的方向前後振動（為疏密波），產生了一些分子密度高於常態的區域，一些分子密度低於常態的區域。於是聲波經過介質的情形可以用圖五的模型來描述。



圖五　$t_1 < t_2 < t_3$



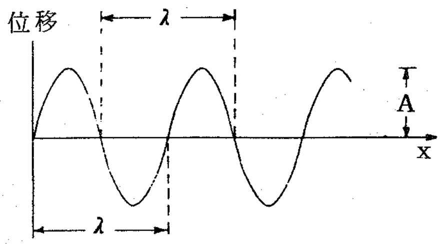
圖六　$t_1 < t_2 < t_3$

光波

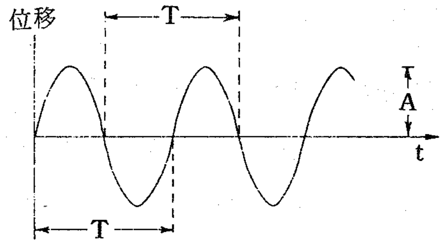
我們再來考慮我們一般所謂光線的電磁幅射。這是另一種波動例子：一個電場的波動。光可以看成它的電場向量是一個箭頭，在與波進行方向垂直的平面上轉動，如圖六。

二、波的分析

所有這些不同種的波，有些相似的性質可以圖形來表示。在這些擾動中，某一特定質點（不論是水分子或繩子上一小點）的運動其實只是在平衡點附近擺動。任何一瞬間，波動方向上各質點的位移畫出來，恰好成一正弦函數圖（見圖七）。如果把某一質點在不同時間的位移畫成時間的函數，則如圖八。



圖七



圖八

下面是討論波動時常用的一些名詞：

振幅A（ amplitude ）　是振動中任一質點由未受力的位置到最遠的位置之間的距離。

波長λ（ wavelength ）　是相鄰兩波峯（或兩波谷）的距離（如圖七）

週期T（ period ）　是同一質點連續兩次到達波峯（或波谷）之間所經過的時間。

頻率 f （ frequency ）　因為波在時間T之內走的距離為λ，所以波速 $v=\lambda/T$，而 $1/T$ 則稱為頻率 f 。$v=\lambda f$ 。

而各種聲音和各種顏色的光都是由於頻率 f 不同所致。而振幅則決定光或聲音的強度。法國物理學家Goseph Fourier在1822年證明；任何週期變動都可以表成一些正弦函數之和。於是正弦函數成了分析一般週期函數時（當然包括波動在內）最重要的數學工具。

習題Ⅱ

1. 在空氣中光速比音速快非常多。打雷時，我們先看到閃電，才聽到雷聲。如果閃電之後 8 秒聽到雷聲，問打雷的地方距離觀測者多遠？（假設閃光立刻可看見，而音速在溫暖的夏天空氣中是 350 m／ sec ）。
2. (a)鋼琴的最低音是個A，其頻率 27.5 週／秒（即 27.5 赫），求此音的波長（設聲速 350 m／ sec ）

(b)鋼琴之最高音是個C，其頻率4200週／sec，求其在空氣中的波長？

3. 無線電波和光波一樣，也是電磁波光譜的一部份，傳送的速度是 3×10^8 m／sec。試求由一個電臺以每秒 750×10^3 / sec（即750千赫）的頻率發出的無線電波波長。

4. (a)假設圖七的方程式為 $y = A \sin kx$

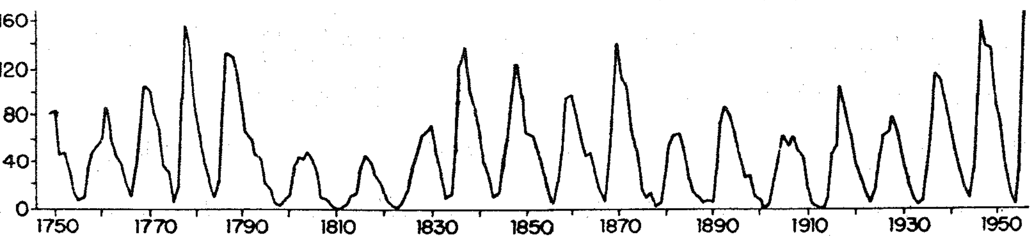
試證 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

(b)同理試證圖八 $y = A \sin \dfrac{2\pi t}{T}$ 的圖形

在(a)中我們考慮時間固定為t時波動中任一點x的位移。

而在(b)中則考慮某一固定點x在任一時間t的位移。

5. 天文學家Donald H. Menzel. 在我們的太陽一書中給了下面兩個圖（圖九），表示1750～1960年間太陽黑子活動記錄。 雖然到現在還不能完全解釋其原因，但可以看出太陽黑子的確呈週期運動。利用圖九估計它的週期。



圖九

三、原始三角函數的擴展──wrapping function

前面我們提到正弦函數恰好可以形容波動的情形。但是，這時我們考慮的 sin x，sin t，x或t不一定是個銳角，而可以是任何大小的實數。所以我們必需擴展三角函數的定義，使它們成為實數函數。

雖然這些函數最早的應用主要涉及直角三角形，一開始的定義實際上是利用和圓有關的某些線段。設P為圓上某一點，圓心O，選OP為單位長── 所以圓成為單位圓。（見圖十）並讓 $\overline{OQ}$ 為水平半徑，使∠POQ為銳角，和 $\overline{OQ}$ 垂直的半弦 $\overline{PS}$ 就被定義為

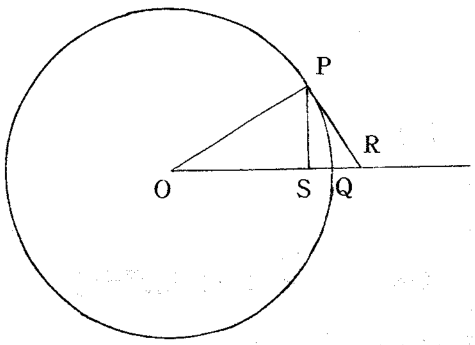
$\angle POQ$的正弦値（$\sin\angle POQ$）。若$R\in\overrightarrow{OQ}$，而$\overline{RP}$爲圓在P點之切線，則定義RP爲$\angle POQ$的正切値（$\tan\angle POQ$），OR爲$\angle POQ$的正割値（$\sec\angle POQ$）。而$\angle POQ$的餘弦、餘切、餘割則定義成其餘角的 sin，tan，sec 値。讀者可在習題Ⅲ-1中證明這個定義和一般用直角三角形的對邊、鄰邊來定義的三角函數是一樣的。

假設把一個坐標的原點放在單位圓的圓心上，x 軸在$\overline{OQ}$上。設想將一條很容易彎曲的數線繞在單位圓上，並且把數線的零點放在點（1，0）。線上的正値依反時針方向繞；數線的負數部分依順時針方向繞，如圖十一。這一種把實數對應到單位圓的函數叫 “wrapping function”。於是對任何實數 t，它所對應的像$P(t)$爲圓上一點。換句話說$P(t)$的坐標爲(x,y)。我們定義

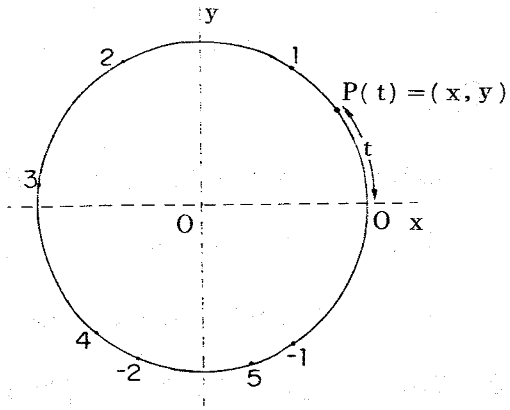
$$\sin t=y，\cos t=x，\tan t=\frac{y}{x}，$$

$$\cot t=\frac{x}{y}，\sec t=\frac{1}{x}，\csc t=\frac{1}{y}$$

讀者可以在習題Ⅲ-2中證明當角在第Ⅰ象限時這種三角函數的定義和原有的定義是一樣的。



圖十



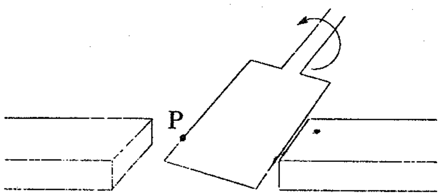
圖十一

四、wrapping function 在物理方面的意義

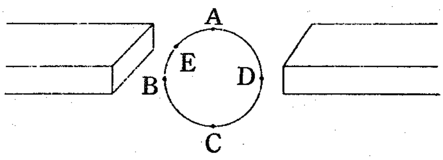
利用電和磁的交互作用以產生交流電的發電機，就是wrapping function 一個實際的模型。如果一個線圈連接上一個安培電表（這是測電流量的表）。將磁鐵通過線圈，安培表顯出有電流產生。磁鐵對線圈移動愈快，電流愈大。移動方向相反時，電

流方向也相反。同樣的，如果一條電線通過磁鐵的南北極之間，與電線相連的安培計就顯示出有電流產生。

交流電發電機則利用一個線圈在磁鐵南北極之間轉，如圖十二。如果跟着線圈上一點P運動，你會發現它走的路線是一個圓（圖十三）。當P經過圓上A點或C點時，它的運動方向和磁場方向相同，所以沒有電流。當P經過B、D點時，它的運動方向和磁場垂直，在線圈上產生最大電流。而P經過E點，則線圈與磁場呈 45° 角，電流為中度。由於線圈在磁場中轉動，在電線中所產生的電流恰好就和波動一樣是時間的正弦函數呢！



圖十二



圖十三

習題Ⅲ

1. △ABC中∠C為直角，∠A＝∠POR（圖十）

   定 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\sec A=\frac{c}{b}$

   試證 $\sin A = PS$，$\tan A = PR$，$\sec A = OR$（O，P，R，S見圖十）

2. 你一定還記得，當Q為弧度量時，半徑為 r 的圓上，角 θ 所對的弧長為S。用這性質證明若∠POQ為第一象限角，而三角函數依wrapping function定義，則 $\sin\angle POQ = PS$，$\tan\angle POQ = PR$，$\sec\angle POQ = OR$（見圖十）。

3. 我們國內的電力公司供應的交流電頻率為60週／秒，也就是說如果 t 表示某一固定時間 t_0 以後的時間，則家用電的實際電流 $i = I_m \sin(2\pi f t + \alpha) = I_m \sin(120\pi t + \alpha)$，其中 I_m 為最大電流；α 稱為相角，是由圖十二中線圈在 t_0 時的位置來決定。

   (a)見圖十三當 α 為下列各值時，試決定當P點在 t_0 時的位置該是A，B還是E。

已知α為(i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) 0 (iii) $\frac{\pi}{4}$

(b)若$\alpha = 0$，試求三個 t 值使 $i = 0$；再求三個 t 值使 $i = \pm I_m$。

(c)若$\alpha = \frac{\pi}{2}$，試求三個 t 值使 $i = 0$；再求三個 t 值使 $i = \pm I_m$。

(d)$\alpha = \frac{\pi}{4}$，各求一個 t 值使 $i = 0$，和 $i = \pm I_m$。

參考資料

1. Atkins, 1970. *Physics* 2ded. New York; John Wiley & Sons.
2. Bitter, 1963. *Mathematical Aspect of Physics*. Science Study Series.
3. Kline, 1959. *Mathematics and the Physical World*.
4. Kock, 1965. *Sound Wave and Light Wave*.
5. Minnaert, 1954. *The Nature of Light and Color in the Open air*.
6. Polya, 1963. *Mathematics in Science*.
7. Van Berjeijk, Pierce, and David 1960. *Waves and the Ear*.
8. Weisskopf, 1962. *Knowledge and Wonder*.
9. Wood, 1961. *The Physics of Music*.

〔本文譯自：Application of Secondary School Mathematics (NCTM)〕